RE... ...
36211
BIBLIOTECA PROVINCIALE
Armadio
Palchetto
Num° d' ordine
NAZIONALE
B. Prov.
R. BIBLIOTECA
VITT. EM. III
921
NAPOLI
Digitized by Google

B - Sh...
II
921

Digitized by Google

G10104

ANALYTISCH-GEOMETRISCHE

ENTWICKLUNGEN

VON

Dr. JUL. PLÜCKER,

PRIVATDOCENTEN IN BONN.

ERSTER BAND.

BIBLIOTECA NAZIONALE VITTORIO EMANUELE III NAPOLI

MIT ACHT KUPFERTAFELN.

ESSEN,

BEI G. D. BAEDEKER.

1828.

BIBLIOTECA NAZIONALE VITTORIO EMANUELE III NAPOLI

Digitized by Google

BIBLIOTECA PROVINCIALE
NAPOLI

BIBLIOTECA NAZIONALE VITTORIO EMANUELE III
NAPOLI

Vorrede.

In diesen „analytisch-geometrischen Entwicklungen," von denen der erste Band vorliegt, gedenk' ich eine neue Behandlungsweise der analytischen Geometrie niederzulegen. Ich nenne dieselben neu, ohngeachtet die Principien, auf welche sie beruht, in einzelnen Fällen schon zur Beweisführung mögen angewandt worden seyn. Aber solche Beweise stehen nicht in generischem Zusammenhange mit dem Ganzen, und erscheinen deshalb als analytische Kunstgriffe, während sie im Grunde doch anders nichts sind, als Einzelnheiten einer allgemeinen Methode.

Die von mir aufgestellte und durchgeführte Behandlungsweise ist eine rein analytische, in demjenigen Sinne des Wortes, in welchem man dasselbe seit Monge nimmt. In jeder Gleichung zwischen Coordinaten seh' ich einen geometrischen Ort, in dem Systeme zweier solchen Gleichungen die Durchschnitte zweier Oerter, und endlich und hauptsächlich in jeder dritten Gleichung, die eine algebraische Folge zweier gegebenen ist, einen neuen geometrischen Ort, der die Durchschnitte der, durch die beiden gegebenen Gleichungen dargestellten, Oerter enthält, und dessen Natur von der Form der resultirenden Gleichung abhängt. Fast überall genügt es, die Verbindung durch einen unbestimmten Coefficienten blofs anzudeuten; ja sogar, wenn man die Form der Gleichungen einmal kennt, auch diese durch ein blofses Symbol zu bezeich-

Digitized by Google

nen. Hiernach erhält man z. B. (III, §. 10) durch die Combination von ein paar Buchstaben die wichtigsten und allgemeinsten Sätze über Linien zweiter Ordnung, und zwar viele neue Sätze neben solchen, deren Beweis man für nicht leicht zu halten gewohnt ist.

Es begreift sich leicht, dafs wir sicher sind, auf diesem Wege die einfachsten und zierlichsten Constructionen zu erhalten. Man braucht nur zu erwägen, dafs wir die gegebenen Figuren, und zwar zunächst die, sie vertretenden, Symbole, nie aus dem Auge verlieren, und, bei der Einfachheit der Verbindung, in jeder Gleichung bis zur Endgleichung hin, die Beziehung zu den gegebenen Gleichungen wiedererkennen — während, von der einen Seite, in der alten Geometrie, wie sie z. B. Apollonius handhabt, das Hauptthema in den Schatten von Umschreibungen zurücktritt, eben so wie die Hauptconstructionen von Hülfslinien maskirt werden, und, von der andern Seite, die blofse Anwendung der Algebra auf Geometrie in Eliminationen sich verliert.

Die Eleganz der rein analytischen Constructionen (namentlich der von Herrn Gergonne in dem 7. und 8. Bande seiner Annalen gegebenen) ist nie in Abrede gestellt worden; wohl aber die Fruchtbarkeit derselben in Vergleich mit gemischten Methoden und einer rein constructiven, als deren Repräsentant, in einer gewissen Sphäre von Entwicklungen, ich Herrn Poncelet nennen darf. Ueber diesen Punct kann ich nicht ganz mit Stillschweigen hinweggehen, weil ich allerdings die Fruchtbarkeit einer Methode als ein, gewissermafsen practisches, Criterium ihrer Vorzüglichkeit betrachte. Jene rein constructive Methode sucht die Raumverhältnisse und die Beziehung der Figuren zu einander unter verschiedenen Gesichtspuncten in Verbindung zu bringen; sie geht abwechselnd vom Besondern zum Allgemeinen und vom Allgemeinen zum Besondern. Eben hier liegt die Hauptquelle ihrer Fruchtbarkeit, aus der eine Reihe einzelner (zum Theil auch den gemischten Methoden angehörigen) Theorien hervorgegangen ist, wie z. B. die Theorie der Pole, der Chordalen (*axes radicaux*), der Transversalen, das Projections-Verfahren, die Anwendung der Lehre vom Schwerpuncte auf die Geometrie. Aber denselben unschätzbaren Vortheil, der aus dem Bestreben hervorgeht, die Resultate unter allgemeinen Gesichtspuncten zusammenzustellen, kann auch die analytische Geometrie sich aneignen, wenn sie aus ihrem Bereiche jede überflüssige Entwicklung und jede Vermischung von Construction und Rechnung verbannt. Alsdann eröffnet sich in ihr ein neues Feld der Forschung, in welchem man sich viel leichter bewegen kann, weil hier Alles auf eine Combination blofser Symbole ankommt. Zugleich ergibt sich hier ein wesentlicher, sehr bedeuten-

Digitized by Google

der Vorzug: der Gebrauch imaginärer Gröfsen. Denn sehr häufig stehen die Resultate der Geometrie in einer solchen Verbindung, die, in der analytischen Bezeichnung, durch imaginäre Ausdrücke vermittelt wird: und diese Art der Verbindung kann in der constructiven Methode nur auf Umwegen erkannt werden. Ich wage hier nicht zu entscheiden, ob dieses überall geschehen kann; aber so viel scheint gewifs, dafs dadurch nothwendig ein fremdartiges Element in diese Art der Behandlung hineinkommt.

Die Beziehung der Poncelet'schen Methode zu der meinigen hat mich mehrmals überrascht, und zwar um so mehr, als die Art der Beweisführung eine so ganz verschiedene ist. Auf einem ungemein leichten Wege gelange ich z. B. zu denjenigen Resultaten, die Herr Poncelet in Gergonne's Annalen mitgetheilt hat, und, noch mehr, einige dieser Resultate gaben mir Winke zur Ausbildung meiner Methode im Einzelnen. So war die, in der 354. Nummer angeführte, Aufgabe die unmittelbare Veranlassung zu der (III, §. 8.) aufgestellten Theorie der Osculation, die, wie mir scheint, erst zu den zierlichsten Darstellungen führt, wenn man sie auf beliebige krumme Flächen und Linien doppelter Krümmung überträgt. Noch auffallender mufste mir die Beziehung der beiden Methoden zu einander werden, als ich mehrere neue, unter sich sehr verschiedene Resultate, zu denen ich auf meinem Wege gekommen war, später in dem ersten und zweiten Hefte des, von Herrn Crelle herausgegebenen, Journals für Mathematik wiederfand. Ich meine nemlich die hauptsächlichsten Sätze, deren blofse Aussage Herr Steiner, der in die Fufsstapfen des Herrn Poncelet zu treten scheint, an dem eben angeführten Orte gibt. Um nur das anzuführen, was sich auf den Inhalt des vorliegenden Bandes meiner Entwicklungen bezieht, nenne ich erstens die Aufgaben der 217. und 218. Nummer, die Herr Steiner, als Erweiterungen des Problems der Tactionen, blofs anführt, mit der Bemerkung, dafs er zur Construction derselben gekommen sey; und zweitens die Construction der gemeinschaftlichen Tangenten zweier gegebenen Linien zweiter Ordnung. Die Sätze *), aus denen Herr Steiner diese Construction herleitet, sind ohne Beweis mitgetheilt (der Beweis ergibt sich auf analytischem Wege unmittelbar), und hier ist es, rücksichtlich der Methode, nicht ohne Interesse zu vergleichen, wie er durch Zusammenstellung von Flächen zweiter Ordnung, die sich in ebenen Curven schneiden, auf einem Umwege zu demjenigen Systeme zweier geraden Linien hingeführt wird, das ich „Chordal-System zweier Linien zweiter Ordnung“ genannt habe.

*) Crelle's Journal I, p. 46.

Obgleich durch meine Entwicklungen sich eine einzige Methode hindurchzieht, so erscheint dieselbe doch unter verschiedenen Nüancen. Um diese näher zu bezeichnen, verweise ich beispielsweise auf die verschiedenen Beweisarten, die ich von dem Satze gegeben habe, „dafs die Durchschnitte der ge„genüberliegenden Seiten eines, in eine Linie zweiter Ordnung beschriebenen, „Sechsecks sich in solchen drei Puncten schneiden, die in gerader Linie lie„gen.“ Der erste Beweis (292) liegt in der blofsen Nebeneinanderstellung zweier Coefficienten derjenigen Gleichung, die man erhält, indem man die allgemeine Gleichung der Linien zweiter Ordnung mit einem unbestimmten Coefficienten multiplicirt, und alsdann zu der allgemeinen Gleichung eines Systems zweier geraden Linien addirt. Man gelangt auf diese Weise zu einem allgemeinern Satze über die Verbindung von geraden Linien und einer Linie zweiter Ordnung. Der eben angeführte Satz erscheint ferner als ein sehr specieller Fall eines allgemeinen Satzes über die Zusammenstellung dreier, durch dieselben beiden Puncte gehenden, Linien zweiter Ordnung, und den Beweis dieses allgemeinen Satzes erhalten wir einmal (362) durch Abziehen der Gleichungen zweier Linien zweiter Ordnung von einander, wenn wir die geometrische Bedeutung der Coefficienten derselben berücksichtigen nnd die Coordinaten-Axen gehörig bestimmen; das andere Mal (383) durch die Verbindung blofser Symbole vermittelst unbestimmter Coefficienten. Der vierte Beweis (384) ist ein indirecter, der sich an ein, zum Behuf einer andern Beweisführung aufgestelltes, Schema anknüpft. Zugleich kommen wir auf diesem Wege zu einer geometrischen Bedeutung derjenigen geraden Linie, welche die drei, in Rede stehenden, Durchschnitte enthält. Diese Art indirecter Beweise scheint eine besondere Würdigung zu verdienen. Der fünfte Beweis des obigen Satzes endlich, den ich beiläufig (392 Note) angezogen habe, geht zu Gleichungen des dritten Grades, die blofs durch Symbole bezeichnet werden, zurück, und ist als der unmittelbarste Beweis anzusehen.

Der vorliegende erste Band meiner Arbeit bildet gewissermafsen ein Ganzes für sich. Jedoch konnten Resultate, die der Geometrie der Ebene angehören, namentlich Sätze und Constructionen, die sich auf Linien zweiter Ordnung beziehen, hier noch keine Stelle finden. Durch diesen ersten Band, und besonders durch den letzten Abschnitt desselben, sind neue Entwicklungen fast unmittelbar gegeben, wenn wir, statt zwei Coordinaten-Axen, deren fortan drei nehmen. Hier erscheint die Leichtigkeit der Behandlungsweise um so gröfser, als, bei der Auffassung der Constructionen im Raume, die Einbildungskraft in höherm Maafse in Anspruch genommen wird.

Die nächste Veranlassung zu den „analytisch-geometrischen Entwicklungen“ waren meine Vorlesungen über die höheren Zweige der Mathematik an

Digitized by Google

der hiesigen Universität, und ebenso gedenk' ich dieselben, in Verbindung mit meinen Vorlesungen, zunächst auf Flächen zweiter Ordnung, und dann bis auf die allgemeinsten geometrischen Untersuchungen, mit Benutzung derjenigen Vortheile, welche hier die sogenannte höhere Rechnung gewährt, fortzuführen.

Ich bemerke noch schliefslich, dafs von den beiden ersten, einleitenden, Abschnitten des ersten Bandes, bereits vor einiger Zeit schon, mehrere Exemplare abgesondert worden sind.

Bonn, im September 1827.

Inhaltsanzeige.

Seite

Erster Abschnitt. Zur Theorie der geraden Linie. 1

Zweiter Abschnitt. Zur Theorie des Kreises. 47

Dritter Abschnitt. Zur Theorie der Linien zweiter Ordnung. 127

§. 1. Verlegung des Anfangs-Punctes der Coordinaten. Discussion aller einzelnen Fälle, welche die allgemeine Gleichung umfafst. 128

§. 2. Veränderung der Richtung der Coordinaten-Axen. Beziehung der constanten Gröfsen ein und derselben Curve zu einander für verschiedene Systeme. 131

§. 3. Geometrische Bedeutung der einzelnen Constanten in der allgemeinen Gleichung des zweiten Grades zwischen zweien veränderlichen Gröfsen. 147

§. 4. Ueber Berührung zwischen einer Linie zweiter Ordnung und geraden Linien. . . 156

§. 5. Zusammenstellung ähnlicher Linien zweiter Ordnung. 166

§. 6. Verbindung der Gleichungen einer Linie zweiter Ordnung und eines Systems zweier geraden Linien zu der Gleichung eines neuen solchen Systems. 177

§. 7. Winkel-Beziehungen. Brennpuncte. 207

§. 8. Linien zweiter Ordnung, welche sich in denselben beiden Puncten schneiden oder sich in demselben Puncte berühren. Einfache Osculation. Höhere Osculation. Zwiefache Berührung. 222

§. 9. Verbindung der Gleichungen zweier gegebenen Linien zweiter Ordnung zu der Gleichung einer Linie derselben Ordnung. Chordal-System. Chordal-Punct. . . . 241

§. 10. Allgemeine Schemata. 256

Digitized by Google

Erster Abschnitt.

Zur Theorie der geraden Linie.

1. Wenn in einer Ebene zwei feste, sich schneidende, gerade Linien OX und OY, Fig. 1.
die wir, so wie die Ebene selbst, uns als unbegränzt denken, der Lage nach gegeben sind: so können wir den Ort jedes Punctes der Ebene durch die Abstände desselben von diesen beiden geraden Linien so bestimmen, dafs er mit keinem andern Puncte verwechselt werden kann. In den nächsten Entwicklungen, die wir als Vorbereitung für die spätern Abschnitte betrachten, nehmen wir diese Abstände, wie gewöhnlich geschieht, auf geraden Linien, die den der Lage nach bekannten parallel sind, und nennen sie Coordinaten. Die Coordinaten des Punctes M sind also MQ und MP. Statt dieser Linien können wir die ihnen gleichen OP und OQ nehmen, und auch diese Coordinaten nennen. Die beiden festen geraden Linien heifsen Coordinaten-Axen, oder auch blofs, wo keine Verwechslung Statt finden kann, Axen; der Punct, in welchem beide sich schneiden, heifst Anfangs-Punct der Coordinaten; wir bezeichnen ihn überall durch O, so wie die Axen durch OX und OY. Die Coordinaten, welche in die eine dieser Axen fallen, heissen Abscissen; die, welche in die andere Axe fallen, Ordinaten. Jene bezeichnen wir durchgehends mit x, diese mit y; und nennen die eine Axe auch Axe der x oder erste Axe, die andere Axe der y oder zweite Axe. In Beziehung auf verschiedene Puncte sind x und y als veränderliche Gröfsen zu betrachten.

2. Wenn wir irgend zwei sich schneidende gerade Linien als Coordinaten-Axen nehmen, und wir wollen Puncte bezeichnen, die nicht in demselben der an ihrem Durchschnitte entstehenden vier Winkel sich befinden, so treten verschiedene Vorzeichen der veränderlichen Gröfsen ein. Es ist hier keineswegs meine Absicht, in ein ausführliches Detail über die Theorie der entgegengesetzten Zeichen einzugehen; ich bekenne mich aber entschieden für die Ansicht, welche Herr von Münchow vor Kurzem auf eine eigenthümliche Art aufgestellt, und für den Fall der beiden Trigonometrien durchgeführt hat. *) Da nemlich die verschiedenen Vorzeichen ihrer Natur nach sich nur auf die Art beziehen,

*) Grundlehren der ebenen und sphärischen Trigonometrie von K. D. v. Münchow. Bonn 1826.

wie wir Gröfsen, und namentlich in der analytischen Geometrie Linien-Längen bezeichnen, so müssen wir natürlich die Rechtfertigung ihrer Einführung in eben dieser Bezeichnungs-Art suchen. Verschiedene Zeichen treten da ein, wo eine einzige Formel mehrere besondere Fälle umfassen soll. Dafs eine entgegengesetzte Lage der bezeichneten Linien (wohl zu verstehen zunächst nur in den Formeln, die wir für unsere Rechnung aufbauen) den entgegengesetzten Zeichen entspricht, ist eine Folge hiervon, kann und darf aber nicht als Axiom angesehen werden.

Fig. 1. 3. Wenn wir z. B. den Abstand der Fufspuncte der Abscissen MQ, M'Q' zweier Puncte M und M' auf der zweiten Axe, oder die Entfernung der Puncte selbst, wenn dieselben auf dieser Axe liegen, durch δ bezeichnen: so haben wir in dem Falle, dafs die beiden Puncte auf derselben Seite der ersten Axe liegen:

$$\delta = b - y, \qquad (1)$$

im andern Falle aber:

$$\delta = b + y, \qquad (2)$$

wenn wir die Abstände der beiden Puncte von der ersten Axe, (Abstände, die auf geraden Linien, die der zweiten Axe parallel sind, genommen werden) durch b und y ausdrücken. Den einen Punct mögen wir als fest, den andern als beweglich, mithin dessen Ordinate y als eine veränderliche Gröfse betrachten.

Wenn wir nun den auf die angezeigte Weise genommenen Abstand je zweier Puncte, die in Beziehung auf die erste Axe irgend eine beliebige Lage haben, algebraisch auf dieselbe Weise ausdrücken, also die beiden Gleichungen (1) und (2) in eine einzige Gleichung, für welche wir die erste derselben nehmen mögen, zusammenfassen wollen, so müssen wir die zweite folgender Gestalt schreiben:

$$\delta = b - (-y),$$

d. h. wir müssen dem y ein — Zeichen als inhärirend, y als negative Gröfse, betrachten. Das Zeichen der Ordinaten ändert sich also, wenn wir von Puncten auf einer Seite der ersten Axe zu Puncten auf der andern Seite derselben übergehen. Es ist hierbei durchaus gleichgültig, wo wir die positiven Ordinaten nehmen, wie es gleichgültig ist, ob wir die beiden Gleichungen (1) und (2) in die erste derselben, oder in die zweite zusammenziehen.

Auf ähnliche Weise verhält es sich mit den Zeichen der Abscissen; für Puncte, die auf verschiedenen Seiten der zweiten Axe liegen, müssen wir dieselben mit entgegengesetzten Zeichen einführen.

Die Zeichen der Ordinaten wie der Abscissen ändern sich, indem sie durch Null gehen.

Die Bestimmung der positiven Seite der x ist beliebig, wie die Bestimmung der positiven y; und beide Bestimmungen sind auch von einander unabhängig.

4. Wenn wir nun ferner mehrere Gleichungen, die sich auf verschiedene Fälle beziehen, auf die angezeigte Weise in eine einzige Gleichung zusammengezogen haben, so können wir diese Gleichung mit andern Gleichungen verbinden; und wenn wir alsdann im Resultate der Rechnung die verschiedenen Zeichen der bezüglichen Gröfsen restituiren, so kommt dieſs auf Einerlei damit hinaus, als wenn wir für jede der Gleichungen, welche auf die besondern Fälle sich beziehen, besonders die jedesmalige Rechnung angelegt hätten.

Hierbei ist nur die Bemerkung zu machen, dafs wir, wenn wir Gleichungen zum Behuf einer einzelnen Auflösung einer geometrischen Aufgabe anlegen, gewöhnlich gezwungen sind, mehrere Fälle zusammenzufassen.

Wir wollen hier nicht länger bei der Theorie der entgegengesetzten Gröfsen verweilen und verweisen auf die oben angezogene Schrift. In dem Folgenden werden wir jedesmal,

Digitized by Google

wo wir verschiedenen Vorzeichen begegnen, Rechenschaft darüber geben, woher sie kommen und was sie anzeigen.

5. Wenn wir durch y' und x' constante, positive oder negative, Werthe bezeichnen, so ist durch die Gleichungen:

$$y = y', \qquad x = x',$$

ein bestimmter Punct gegeben, und diese Gleichungen heifsen daher die Gleichungen des Punctes. Die erste Gleichung:

$$y = y'$$

enthält die Bestimmung, dafs jener Punct auf einer geraden Linie liegt, welche der ersten Axe parallel ist, und von der zweiten Axe ein Stück, das gleich ist y', abschneidet. Weil aber jedem Puncte dieser Geraden obige Gleichung zukommt, so ist

$$y = y'$$

die Gleichung einer der Abscissen-Axe parallelen geraden Linie; und wenn wir y' gehörig bestimmen, so erhalten wir die Gleichung jeder beliebigen parallelen Geraden. Auf ähnliche Weise ist:

$$x = x'$$

die Gleichung einer der Ordinaten-Axe parallelen geraden Linie, welche von der ersten Axe ein Stück, das gleich ist x', abschneidet. Indem wir die beiden Gleichungen verbinden, haben wir die Gleichungen des Punctes, der zugleich auf jenen beiden geraden Linien, d. h. im Durchschnitte derselben, liegt.

Die Gleichungen des Anfangs-Punctes der Coordinaten sind:

$$y = 0, \qquad x = 0;$$

und die erste Gleichung für sich allein ist die Gleichung der Abscissen-Axe; die zweite Gleichung stellt die Ordinaten-Axe dar.

6. *Jede Gleichung, die in Beziehung auf y und x vom ersten Grade ist, stellt eine gerade Linie dar.* Wir können, indem wir durch Division den Coefficienten des ersten Gliedes fortschaffen,

$$y + Ax + B = 0 \quad \text{oder} \quad y = ax + b \qquad (1)$$

als die allgemeine Gleichung dieses Grades betrachten. Wir wollen in dem Nächst-Folgenden die Gleichung unter der zweiten Form nehmen. Setzen wir in diese Gleichung für x einen bestimmten Werth x', so ergibt sich aus derselben der entsprechende Werth von y, den wir durch y' unterscheiden wollen. Indem wir aber x als constant betrachten, verbinden wir eigentlich die gegebene Gleichung mit der Gleichung $x = x'$, die eine, der Axe der y parallele, gerade Linie vertritt. Wir suchen also den Durchschnitt dieser letztgenannten Linie mit der durch obige Gleichung dargestellten. Durch diesen Durchschnitt geht auch die, der ersten Axe parallele, gerade Linie, deren Gleichung ist:

$$y = y'.$$

Da der Punct, dessen Coordinaten y' und x' sind*), ein Punct der durch (1) dargestellten geraden Linie ist, so haben wir zwischen y' und x' die Bedingungs-Gleichung:

$$y' = ax' + b. \qquad (2)$$

Zwischen den beiden Gleichungen (1) und (2), können wir eine beliebige der constan-

*) Wir werden im Folgenden statt: „der Punct, dessen Coordinaten y' und x' sind" kurz: „der Punct (y', x')" schreiben und ebenso öfters statt: „die durch die Gleichung (1) dargestellte gerade Linie" blofs: „die gerade Linie (1)".

ten Gröfsen b und a eliminiren. Um b zu eliminiren, brauchen wir blofs abzuziehen, und erhalten auf diese Weise:

$$y - y' = a(x - x') \qquad (3)$$

für die Gleichung einer geraden Linie, die durch den festen Punct (y', x') geht. Die letzte Gleichung (3) spricht deutlich den Character der geraden Linie aus, denn, wie wir auch x bestimmen mögen, wir haben immer:

$$\frac{y - y'}{x - x'} = a = const.$$

Fig. 2. d. h. mit Beziehung auf die 2. Figur, wo M' den Punct (y', x') bezeichnet,

$$\frac{MQ}{M'Q} = const.$$

wohin auch M fortrücken mag.

7. Wenn wir den Winkel, welchen die durch (1) dargestellte gerade Linie mit der ersten Axe bildet, von der positiven Seite der x nach der positiven Seite der y nehmen, und diesen Winkel durch α, den Coordinaten-Winkel aber durch β bezeichnen, so ist:

$$a = \frac{MQ}{M'Q} = \frac{\sin \alpha}{\sin (\beta - \alpha)};$$

also, wenn der Coordinaten-Winkel ein rechter ist:

$$a = tang\ \alpha.$$

8. Setzen wir $x = 0$ in der Gleichung:

$$y = ax + b,$$

so bestimmen wir den Durchschnitt der geraden Linie mit der zweiten Axe; die Ordinate dieses Punctes ist also die zweite Constante b. Auf ähnliche Wiese ergiht sich $-\frac{b}{a}$ für die Abscisse des Durchschnittes mit der ersten Axe.

9. Wir haben oben zwischen den beiden Gleichungen (1) und (2) b eliminirt, und sind so zu einer Gleichung (3) für eine gerade Linie, die durch den festen Punct (y', x') geht, gekommen. Wenn wir zwischen denselben Gleichungen die andere Constante a eliminiren, so kommen wir zu einer neuen Gleichung für eine gerade Linie, welche durch denselben Punct (y', x') geht; wir erhalten nemlich auf die angezeigte Weise:

$$b(x - x') - y'x + yx' = 0. \qquad (4)$$

Fig. 3. In dieser Gleichung spricht sich nicht so deutlich, als in der Gleichung (3), der Character der geraden Linie aus. Wir wollen indefs diese Gleichung in die Sprache der Geometrie übersetzen, und zwar vorerst annehmen, unser Coordinaten-System sey ein rechtwinkliges. Sey MM' die gerade Linie, M' der Punct (y', x'), M der veränderliche Punct (y, x). Alsdann ist der Inhalt des Rechtecks QP gleich $b(x - x')$, und ebenso RP gleich $y'x$ und RP' gleich yx'. Die Gleichung (4) geht also über in folgende:

$$QP - RP + RP' = 0;$$

und wenn wir reduciren, so kommt:

$$MR = MQ.$$

Fig. 4. Wäre der Coordinaten-Winkel kein rechter, sondern ein beliebiger, den wir durch β bezeichnen wollen, so finden wir in Beziehung auf die 4. Figur ebenfalls MR = MQ, wenn wir statt die Gleichung (4) geradezu zu behandeln, alle Glieder derselben zuvor mit $\sin \beta$ multipliciren, mithin die Gleichung

$$b(x - x') \sin \beta - y'x \sin \beta + yx' \sin \beta = 0$$

geometrisch deuten und dabei gerade so wie eben verfahren.

Digitized by Google

Die Gleichung (4) ist also anders nichts, als die algebraische Aussage von folgendem bekannten Satze:

Wenn man durch einen beliebigen Punct der Diagonale eines Parallelogrammes zwei gerade Linien zieht, von denen jede zweien Seiten desselben parallel ist, so sind die beiden neuen Parallelogramme, die zu beiden Seiten der Diagonale entstehen, dem Inhalte nach, einander gleich.

10. Wenn aufser dem Puncte (y', x') noch ein zweiter Punct (y'', x'') gegeben ist, so folgt aus (3):

$$a = \frac{y'' - y'}{x'' - x'};$$

und aus (4):

$$b = \frac{y'x'' - y''x'}{x'' - x'}.$$

Die Constanten in der Gleichung (1) der geraden Linie sind also auf diese Weise bestimmt.

11. Für die Durchschnitte einer geraden Linie, die durch zwei gegebene Puncte (y', x') und (y'', x'') geht, mit der zweiten und ersten Axe, ergeben sich also folgende Bestimmungen:

$$y = b = \frac{y'x'' - y''x'}{x'' - x'},$$

$$x = -\frac{b}{a} = \frac{y''x' - y'x''}{y'' - y'}.$$

12. Die Gleichung endlich der geraden Linie, welche durch die beiden Puncte (y', x') und (y'', x'') geht, ist folgende:

$$y(x'' - x') - x(y'' - y') = y'x'' - y''x', \qquad (5)$$

eine Gleichung, zu der wir durch Elimination der beiden Constanten b und a zwischen den drei Gleichungen:

$$y = ax + b,$$
$$y' = ax' + b,$$
$$y'' = ax'' + b,$$

gekommen sind.

13. Wir können der Gleichung für die gerade Linie eine symmetrische, für manche Rechnungen sehr bequeme, Form geben, indem wir die Segmente, welche dieselbe auf den Axen bestimmt, die Stücke OP und OQ, als die beiden Constanten derselben einführen. Bezeichnen wir diese Segmente durch p und q, so erhalten wir auf der Stelle die gesuchte Gleichung aus (5), wenn wir: Fig. 5.

$$x' = 0,\ x'' = p,\ y' = q,\ y'' = 0$$

setzen. Auf diese Weise kommt:

$$py + qx = pq, \qquad (6)$$

welcher Gleichung wir auch folgende Form geben können:

$$\frac{y}{q} + \frac{x}{p} = 1 \qquad (7)$$

14. Es ist offenbar, dafs, wenn wir durch n irgend eine beliebige Zahl bezeichnen, die Gleichung (7) befriedigt wird, wenn wir

$$y = nq,\ x = (1 - n)p$$

setzen, und dafs mithin die so bestimmten Coordinaten einem Puncte der durch obige

Digitized by Google

Gleichung dargestellten geraden Linie angehören. Wenn wir $n = \frac{1}{2}$ nehmen, so bestimmen die Gleichungen:

$$y = \frac{q}{2}, \quad x = \frac{p}{2}$$

die Mitte des von den Axen interceptirten Stückes der geraden Linie.

15. Die Entfernung zweier beliebiger Puncte (y'', x'') und (y', x') von einander ist durch die Länge der dritten Seite eines Dreiecks bestimmt, dessen beide ersten Seiten gleich sind dem Unterschiede der gleichnamigen Coordinaten und einen Winkel mit einander bilden, der dem Coordinaten-Winkel oder dessen Neben-Winkel gleich ist. Wir haben daher, wenn wir diese Entfernung durch D, den Coordinaten-Winkel durch β bezeichnen:

$$D^2 = (y'' - y')^2 + 2(y'' - y')(x'' - x')\cos\beta + (x'' - x')^2.$$

Das positive Zeichen des mittlern Gliedes besteht für alle möglichen verschiedenen Lagen der beiden Puncte gegen einander, denn je nachdem $(y''-y')$ und $(x''-x')$ von gleichem Zeichen sind, oder nicht, haben wir für den, der dritten Seite des Dreiecks gegenüberliegenden Winkel, den Nebenwinkel von β oder β selbst zu nehmen. Ist der Coordinaten-Winkel ein rechter, mithin $\cos\beta = 0$, so reducirt sich die letzte Gleichung auf folgende:

$$D^2 = (y'' - y')^2 + (x'' - x')^2.$$

16. Der algebraische Ausdruck für den Abstand zweier Puncte von einander, der im Allgemeinen, wie die vorige Nummer zeigt, irrational ist, hat, wenn nicht eine nähere Bestimmung hinzutritt, kein bestimmtes Zeichen, oder was dasselbe heifst, das Zeichen hat keine geometrische Bedeutung, wenn wir nicht etwa eine solche hineinlegen wollen, welche sich alsdann auf das Entgegengesetzte der Richtung bezöge, wie wir jenen Abstand bestimmen, ob von dem ersten zum zweiten Puncte oder umgekehrt: die einzige Zweideutigkeit, die die Bestimmung des Abstandes zweier Puncte von einander zuläfst. Diese Beziehung stellt sich in gewisser Hinsicht augenfällig für den besondern Fall dar, dafs beide Puncte auf einer der Axen, etwa auf der ersten Axe liegen. Alsdann ist nemlich $y'' = y' = 0$, und wir finden für D folgende beiden Ausdrücke:

$$x'' - x' \quad \text{und} \quad -(x'' - x') \quad \text{oder} \quad x' - x''.$$

Wenn die Abstände mehrerer Puncte unter einander in gegenseitiger Verbindung vorkommen, so entscheidet die Natur der jedesmaligen Aufgabe darüber, mit welchem Zeichen wir die einzelnen Abstände einführen müssen, wo Alles dann wieder darauf hinauskommt, verschiedene Fälle in einen einzigen algebraischen Ausdruck zusammenzufassen. Die Behauptung, dafs der Abstand zweier Puncte von einander durchaus als positive Gröfse betrachtet werden müsse, ist ganz unhaltbar. Diefs zeigt sich deutlich an den Beispielen der 31. und der folgenden Nummern.

Fig. 6. 17. Die Gleichungen zweier geraden Linien, auf ein beliebiges System bezogen, seyen:

$$y = ax + h,$$
$$y = a'x + h';$$

wir wollen die Winkel, welche dieselben mit der ersten Axe bilden, durch α und α', den Coordinaten-Winkel, wie gewöhnlich, durch β bezeichnen. Alsdann ist:

$$a = \frac{\sin\alpha}{\sin(\beta - \alpha)}, \qquad a' = \frac{\sin\alpha'}{\sin(\beta - \alpha')},$$

Digitized by Google

woraus wir durch eine leichte trigonometrische Umformung folgende Werthe für *tang* α und *tang* α' herleiten:

$$tang\ \alpha = \frac{a\ sin\ \beta}{1 + a\ cos\ \beta}, \quad tang\ \alpha' = \frac{a'\ sin\ \beta}{1 + a'\ cos\ \beta}.$$

Wir haben ferner:

$$tang\ \omega = \frac{tang\ \alpha' - tang\ \alpha}{1 + tang\ \alpha\ tang\ \alpha'},$$

wenn wir den Winkel, welchen die beiden geraden Linien mit einander bilden, durch ω bezeichnen, und diesen Winkel von der erstern geraden Linie zur zweiten nach derselben Richtung hin nehmen, als die Winkel α und α' genommen worden sind. Vermöge der vorhergehenden Gleichungen reducirt sich der letzte Ausdruck auf:

$$tang\ \omega = \frac{(a' - a)\ sin\ \beta}{1 + (a + a')\ cos\ \beta + aa'}. \qquad (1)$$

Stehen die beiden gegebenen geraden Linien auf einander senkrecht, so ist $tang\ \omega = 0$, mithin:

$$1 + (a + a')\ cos\ \beta + aa' = 0. \qquad (2)$$

18. Die letzte Gleichung gibt:

$$a = -\frac{1 + a'\ cos\ \beta}{a' + cos\ \beta}.$$

Ist also irgend eine gerade Linie durch die Gleichung

$$y = a'x + b'$$

gegeben, so erhalten wir folgende Gleichung für eine andere Linie, welche auf ihr senkrecht steht:

$$y = -\frac{1 + a'\ cos\ \beta}{a' + cos\ \beta}\ x + b, \qquad (3)$$

wenn wir durch b irgend eine Constante bezeichnen.

19. Nehmen wir für eine der beiden auf einander senkrechten geraden Linien, für diejenige z. B., welcher a' entspricht, eine der Coordinaten-Axen selbst, so ist

$$a' = 0, \quad \text{oder} \quad \frac{1}{a'} = 0,$$

je nachdem wir die erste oder zweite Axe nehmen. Im erstern Falle reducirt sich die Bedingungs-Gleichung (2) auf:

$$1 + a\ cos\ \beta = 0,$$

oder:

$$a = -\frac{1}{cos\ \beta};$$

im andern Falle reducirt sich dieselbe Gleichung, wenn wir sie zuvor auf folgende Form bringen:

$$\frac{1}{a'} + \left(\frac{a}{a'} + 1\right) cos\ \beta + a = 0;$$

unmittelbar auf:

$$a = -\ cos\ \beta.$$

20. Soll also eine gerade Linie, welche senkrecht auf der Abscissen-Axe steht, durch einen bestimmten Punct (y', x') gehen, so ist ihre Gleichung folgende:

$$(y - y')\ cos\ \beta + (x - x') = 0. \qquad (4)$$

Digitized by Google

Liegt der gegebene Punct auf der ersten Axe, so ist $y' = 0$, und

$$y \cos\beta + (x - x') = 0 \qquad (5)$$

die Gleichung einer geraden Linie, die senkrecht auf der ersten Axe steht, und dieselbe in einer Entfernung vom Scheitel, die gleich ist x', schneidet. Setzen wir $x' = 0$, so kommt:

$$(y - y') \cos\beta + x = 0 \qquad (6)$$

für die Gleichung derjenigen geraden Linie, die vom Puncte $(y', 0)$ der zweiten Axe senkrecht auf die erste Axe gefällt wird.

Auf ähnliche Weise ist

$$y - y' + (x - x') \cos\beta = 0 \qquad (7)$$

die Gleichung einer geraden Linie, welche senkrecht auf der zweiten Axe steht, und durch den Punct (y', x') geht;

$$y + (x - x') \cos\beta = 0 \qquad (8)$$

die Gleichung des vom Puncte $(0, x')$ der ersten Axe auf die zweite gefällten Perpendikels, und

$$y - y' + x \cos\beta = 0 \qquad (9)$$

die Gleichung des im Puncte $(y' 0)$ der zweiten Axe errichteten Perpendikels.

21. Für den Fall rechtwinkliger Coordinaten ist:

$$tang\ \omega = \frac{a' - a}{1 + aa'}, \qquad (10)$$

und die Bedingungs-Gleichung, dafs die in Rede stehenden geraden Linien sich rechtwinklig schneiden:

$$1 + aa' = 0. \qquad (11)$$

Fig. 7. 22. Wir wollen jetzt gleich schon die eben entwickelten Ausdrücke zum Beweise geometrischer Sätze anwenden, und brauchen dieselben zu diesem Behufe blofs für die Gleichungen zweier geraden Linien unter den folgenden Formen:

$$\begin{aligned} py + qx &= pq, \\ p'y + q'x &= p'q', \end{aligned} \qquad (1)$$

umzubilden. Sind die letzten Gleichungen mit denen der 17. Nummer identisch, so ist:

$$a = -\frac{q}{p}, \qquad a' = -\frac{q'}{p'}.$$

Nehmen wir nun zuvörderst an, der Coordinaten-Winkel sey ein rechter, so gibt (11):

$$\frac{q}{p} \cdot \frac{q}{p'} + 1 = 0,$$

als Bedingungs-Gleichung, dafs die bezüglichen geraden Linien QP und QP' auf einander senkrecht stehen. Hieraus folgt unmittelbar:

$$qq' = -pp'; \qquad (2)$$

d. h. geometrisch ausgedrückt mit Beziehung auf die 7. Figur: das unter den Segmenten OP und OP' enthaltene Rechteck ist dem unter den Segmenten OQ und OQ' enthaltenen gleich.

23. Wenn, umgekehrt, die letzte Gleichung (2) Statt findet, so stehen die beiden durch (1) bezeichneten geraden Linien auf einander senkrecht. p, p', q, q' bezeichnen die Segmente, wodurch diese geraden Linien bestimmt werden. Wir können aber auf zwiefache Art diese Segmente zur Bestimmung von zweien geraden Linien paarweise so kombiniren, dafs jedesmal die Gleichung (2) befriedigt wird, indem wir einmal p mit q und p' mit q', zur Bestimmung von jenen beiden geraden Linien PQ und P'Q', die wir eben

Digitized by Google

betrachtet haben, zusammenstellen, das andere Mal aber p mit q' und p' mit q. Die im letztern Fall bezeichneten geraden Linien sind PQ' nnd P'Q, und ihre Gleichungen:

$$\begin{aligned} p\,y + q'x &= p\,q', \\ p'y + q\,x &= p'q. \end{aligned} \qquad (3)$$

Und auch diese geraden Linien stehen auf einander senkrecht, weil die Gleichung (2) hier, wie für die vorigen beiden Geraden, die Bedingung der Perpendicularität enthält. Die durch den Durchschnitt Q' von OQ und P'R nnd durch den Punct P gehende gerade Linie, steht mithin auf der in dem Dreieck P'QP dem Punete P gegenüberliegenden Seite senkrecht. Wir erkennen also bei diesen Betrachtungen, die sich unmittelbar darbieten, in der Gleichung (2) sogleich folgenden Satz:

Wenn man in einem beliebigen Dreieck von den Winkel-Spitzen auf die gegenüberliegenden Seiten Perpendikel fällt, so schneiden sich diese Perpendikel in demselben Puncte.

24. Wir hätten mit gleicher Leichtigkeit geradezu beweisen können, dafs das von P auf P'Q gefällte Perpendikel durch den Punct Q' geht. Denn die Gleichung jeder geraden Linie, die durch P geht, hat folgende Form:

$$p\,y + g\,x = p\,g;$$

wo wir OP gleich p setzen, g aber irgend ein Segment der Ordinaten-Axe bezeichnet, das von einer Geraden zur andern wächst oder abnimmt. Soll diese gerade Linie senkrecht stehen auf P'Q, deren Gleichung folgende ist:

$$p'y + q\,x = p'q,$$

so haben wir die Bedingungs-Gleichung:

$$p\,p' + q\,g = o.$$

Da aber auch der Voraussetzung gemäfs:

$$p\,p' + q\,q' = o,$$

so ergiebt sich $g = q'$, das Perpendikel PR' geht also durch den Punct Q', den Durchschnitt der beiden andern Perpendikel OQ und P'R.

25. Ich füge hier zum Vergleich der Methoden noch einen andern Beweis hinzu. Das gegebene Dreieck sey PP'Q. Als erste Axe nehmen wir die Basis des Dreiecks, PP', als zweite Axe das vom gegenüberliegenden Winkel-Puncte auf dieselbe gefällte Perpendikel QO. (Auf diese Wahl der Coordinaten hat uns die 23. Nummer aufmerksam gemacht.) Wir bezeichnen ferner die mit gehörigen Zeichen genommenen Segmente OP, OP', OQ durch p, p', und q.

Bei diesen Voraussetzungen sind:

$$y = -\frac{q}{p}\,x + q,$$

$$y = -\frac{q}{p'}\,x + q,$$

die Gleichungen von PQ und P'Q, und die Gleichungen derjenigen beiden geraden Linien, welche senkrecht auf dieselben von den gegenüberliegenden Winkel-Puncten P' nnd P gefällt werden:

$$y = \frac{p}{q}\,(x - p'),$$

$$y = \frac{p'}{q}\,(x - p).$$

Digitized by Google

Ziehen wir diese beiden Gleichungen von einander ab, so kommt:

$$0 = \frac{p - p'}{q} x,$$

oder:

$$x = 0;$$

und dieſs ist die Abscisse des Durchschnitts-Punctes der beiden letztgefällten Perpendikel, oder, analytischer gesprochen, die Gleichung der zweiten Axe, für welche wir das erste Perpendikel genommen haben. Dieses Perpendikel geht also durch den Durchschnitt der beiden andern.

26. Wenn wir diesen Beweis mit demjenigen der 23. Nummer zusammenstellen, so begegnet uns die Bemerkung, daſs wir zuletzt einen zum Beweise vorgelegten Satz (mit möglichster Kürze vielleicht) bewiesen, früher hingegen den Satz gefunden haben, so daſs die Construction desselben erst aus einer rein algebraischen Betrachtung entstanden ist. Dieser Unterschied, den ich einstweilen nur andeute, scheint mir ein wesentlicher zu seyn.

27. Der Beweis des in Rede stehenden Satzes erfordert einige leichte Entwickelungen mehr, wenn wir zwei Seiten des Dreiecks als Coordinaten-Axen nehmen und uns alsdann der Formeln der 18. — 20. Nummer bedienen.

28. Wir gehen weiter. Es sey bei einer beliebigen Annahme der Coordinaten:

$$y = ax + b \qquad (1)$$

die Gleichung irgend einer geraden Linie und (y', x') irgend ein gegebener Punct: wir suchen den kürzesten Abstand des Punctes von der geraden Linie.

Für das vom Puncte (y', x') auf die gerade Linie gefällte Perpendikel, auf welchem jener Abstand zu nehmen ist, erhalten wir zunächst folgende Gleichung:

$$y - y' = a' (x - x'),$$

wo die constante Gröſse a' nach der 18. Nummer durch folgende Gleichung:

$$a a' + (a + a') \cos. \beta + 1 = 0,$$

wenn wir hier, wir dorten, den Coordinaten-Winkel durch β bezeichnen, gegeben ist. Hiernach kommt:

$$a' = - \frac{1 + a \cos \beta}{a + \cos \beta};$$

mithin ist die Gleichung des Perpendikels:

$$y - y' = - \frac{1 + a \cos \beta}{a + \cos \beta} (x - x'). \qquad (2)$$

Bezeichnen wir ferner die Coordinaten des Fuſs-Punctes dieses Perpendikels durch y'' und x'', und die Länge desselben durch P, so ist nach (15):

$$P^2 = (y'' - y')^2 + 2 (y'' - y') (x'' - x') \cos \beta + (x'' - x')^2.$$

Da der Punct (y'', x'') zugleich auf den beiden Geraden (1) und (2) liegt, so haben wir die beiden Gleichungen:

$$y'' - y' = - \frac{1 + a \cos \beta}{a + \cos \beta} (x'' - x')$$

$$y'' = a x'' + b$$

zur Bestimmung der Coordinaten desselben. Zum Behuf der Elimination können wir der letztern Gleichung folgende Form geben:

$$y'' - y' = a (x'' - x') - y' + a x' + b,$$

Digitized by Google

und erhalten alsdann sogleich folgende Ausdrücke:

$$x''-x' = (y'-ax'-b)\,\frac{a+\cos\beta}{a^2+2a\cos\beta+1},$$

$$y''-y' = -(y'-ax'-b)\,\frac{1+a\cos\beta}{a^2+2a\cos\beta+1}.$$

Substituiren wir ferner diese Werthe von $x''-x'$ und $y''-y'$ in obigem Ausdruck für P^2, so kommen wir nach einigen leichten trigonometrischen Umformungen und nach Ausziehung der Quadrat-Wurzel zu folgender Gleichung:

$$P = \pm\frac{y'-ax'-b}{\sqrt{(a^2+2a\cos\beta+1)}}\cdot\sin\beta. \qquad (3)$$

Wenn wir statt des Perpendikels eine andere gerade Linie nehmen, die mit der gegebenen irgend einen Winkel γ bildet, und das Stück derselben zwischen dem gegebenen Puncte und der gegebenen geraden Linie durch p bezeichnen, so ist offenbar

$$p\sin\gamma = P;$$

folglich erhalten wir:

$$p = \pm\frac{y'-ax'-b}{\sqrt{(a^2+2a\cos\beta+1)}}\cdot\frac{\sin\beta}{\sin\gamma}. \qquad (4)$$

29. Für den Fall rechtwinkliger Coordinaten reduciren sich die Ausdrücke für P und p auf folgende:

$$P = \pm\frac{y'-ax'-b}{\sqrt{(a^2+1)}} = \pm(y'-ax'-b)\cos\alpha, \qquad (5)$$

$$p = \pm\frac{y'-ax'-b}{\sqrt{(a^2+1)}}\cdot\frac{1}{\sin\gamma} = \pm(y'-ax'-b)\frac{\cos\alpha}{\sin\gamma}, \qquad (6)$$

wenn wir den Winkel, welchen die gegebene Gerade mit der Axe der x bildet, wie gewöhnlich durch α bezeichnen.

30. Es ist in der analytischen Geometrie niemals zu vernachläfsigen, sich von der Form der Ausdrücke, zu welchen längere Entwicklungen uns geführt haben, Rechenschaft zu geben. Zuvörderst, was das doppelte Zeichen der in den letzten beiden Nummern entwickelten Ausdrücke betrifft, so finden wir den Grund desselben darin, dafs wir P und p als den Abstand zweier Puncte von einander bestimmt haben (16). Ueber das Zeichen, welches wir in besondern, durch die Natur der jedesmaligen Aufgabe bestimmten, Fällen gebrauchen müssen, wird uns die folgende Nummer belehren.

Es mufs uns ferner noch die Form der Zähler in den verschiedenen Ausdrücken für P und p, verglichen mit der Gleichung (1) der gegebenen geraden Linie, auffallen. Wir können diese Form leicht von vorne hinein rechtfertigen, wenn wir erwägen, dafs offenbar P und p gleich Null werden, wenn der gegebene Punct (y', x') auf der gegebenen geraden Linie liegt. In diesem Falle aber ist:

$$y'-ax'-b = 0;$$

deshalb mufs der erste Theil dieser Gleichung als Factor jener Ausdrücke erscheinen.

31. Wenn die gerade Linie (1) und der Punct (y', x') gegeben sind, so bleibt nichts mehr als das Zeichen, mit dem die in Rede stehenden Ausdrücke für fernere Rechnungen behaftet werden müssen, noch zu bestimmen übrig. Wenn aber, (immer bei der Annahme, dafs die gerade Linie gegeben ist,) irgend eine Bestimmung über die Gröfse jener Abstände gemacht wird, so ist der Punct (y', x') nicht mehr durchaus beliebig; wir erhalten

zwischen den Coordinaten desselben eine Bedingungs-Gleichung, d. h. einen geometrischen Ort für den Punct selbst.

Der Einfachheit wegen bedienen wir uns in dem Folgenden rechtwinkliger Coordinaten und sprechen zunächst nur von dem kürzesten Abstande, den wir durch P bezeichnet haben. Bei diesen Voraussetzungen wollen wir vorerst annehmen, P sey eine gegebene Grösse, alsdann finden wir für den Ort aller Puncte, die um dieses Stück von der, durch die Gleichung:

$$y = ax + b$$

gegebenen, geraden Linie, abstehen, mit Hinweglassung der Accente, folgende Gleichung:

$$P = \pm \frac{y - ax - b}{\sqrt{1 + a^2}},$$

und hieraus ergibt sich unmittelbar

$$y = ax + (b \pm P\sqrt{1 + a^2});$$

mithin, wenn wir das doppelte Zeichen berücksichtigen, erhalten wir für den gesuchten Ort zwei, der gegebenen parallele und zu beiden Seiten derselben liegende gerade Linien.

Das Zeichen + in der letzten Gleichung entspricht der Einführung des Werthes für P mit positivem Zeichen, woraus wir dann rückwärts schliefsen, dafs der Ausdruck für den Abstand jedes Punctes der bezüglichen geraden Linie:

$$y = ax + (b + P\sqrt{1 + a^2})$$

von der gegebenen positiv genommen werden mufs. Jeder Punct aber, der auf dieser Geraden sich befindet, liegt, rücksichtlich der gegebenen geraden Linie, nach der positiven Seite der y hin. Für Puncte, welche auf der Geraden:

$$y = ax + (b - P\sqrt{1 + a^2})$$

liegen, findet gerade die umgekehrte Beziehung Statt.

Wir können nicht, was die Zeichen betrifft, die Gleichung:

$$P = \pm (y - ax - b)\cos\alpha,$$

woraus folgende sich ergibt:

$$y = ax + (b \pm \frac{P}{\cos\alpha}),$$

ganz auf dieselbe Weise behandeln. Der Grund davon liegt offenbar darin, dafs das Vorzeichen von $\frac{P}{\cos\alpha}$, in welchem Ausdruck wir $\cos\alpha$ für $\sqrt{1 + a^2}$ gesetzt haben, in eine neue Beziehung zu der Richtung der gegebenen geraden Linie tritt. Machen wir indefs die Beschränkung, dafs der Winkel α nur bis π genommen werde, so entspricht der vorherigen Zeichen-Bestimmung nun für unsere neuen Gleichungen folgende Annahme, dafs nemlich für solche Puncte, die in Beziehung auf die gegebene Gerade nach der positiven Seite der y hin liegen, je nachdem α kleiner oder gröfser ist als $\frac{\pi}{2}$, einmal der algebraische Ausdruck für P mit positivem, das andere Mal mit negativem Zeichen genommen werden mufs.

Wir können hier noch eine Bemerkung machen über das Zeichen, mit welchem der Zahlen-Werth des in Rede stehenden Abstandes behaftet werden mufs. Wir haben gesehen, dafs wir in obigem algebraischen Ausdrucke für diesen Abstand P das positive

Zeichen nehmen müssen, wenn der gegebene Punct (y', x'), in Beziehung auf die gegebene Linie, nach der positiven Seite der y hin fällt; in diesem Falle ist aber (29)

$$y' > a x' + h,$$

und mithin auch der Zähler in dem Werthe von P, mithin P selbst positiv. Im andern Falle ist der Zahlen-Werth von P mit entgegengesetztem Zeichen zu nehmen.

32. Seyen ferner die Gleichungen zweier geraden Linien gegeben:

$$\begin{aligned} y &= a x + h, \\ y &= a' x + h', \end{aligned} \qquad (1)$$

alsdann finden wir für den Abstand eines beliebigen Punctes (y', x') von jeder der beiden geraden Linien:

$$\begin{aligned} P &= \pm (y' - a x' - b) \cos \alpha, \\ P' &= \pm (y' - a' x' - h) \cos \alpha'; \end{aligned} \qquad (2)$$

wenn wir jene Abstände durch P und P' bezeichnen. Soll der Punct (y', x') von beiden Geraden gleich weit abstehen, so erhalten wir eine Bedingungs-Gleichung zwischen den Coordinaten desselben, und, indem wir diese als veränderliche Gröfsen betrachten, die Gleichung für den geometrischen Ort aller Puncte, die jene Bedingung erfüllen. Berücksichtigen wir die verschiedenen Zeichen von P und P', so bekommen wir bei Hinweglassung der Accente folgende doppelte Gleichung:

$$(y - a x - b) \cos \alpha = \pm (y - a' x - b') \cos \alpha', \qquad (3)$$

wodurch also eine zwiefache gerade Linie angezeigt wird. Da $a = tang\ \alpha$ und $a' = tang\ \alpha'$, so reducirt sich die letzte Gleichung auf folgende:

$$y (\cos \alpha \mp \cos \alpha') = x (\sin \alpha \mp \sin \alpha') + b \cos \alpha \mp b' \cos \alpha',$$

und diese wiederum, da

$$\frac{\sin \alpha - \sin \alpha'}{\cos \alpha - \cos \alpha'} = - cotg.\ \tfrac{1}{2} (\alpha + \alpha'), \quad \frac{\sin \alpha + \sin \alpha'}{\cos \alpha + \cos \alpha'} = tang\ \tfrac{1}{2} (\alpha + \alpha'),$$

zerfällt in folgende beide Gleichungen:

$$\begin{aligned} y &= - x\ cotg.\ \tfrac{1}{2} (\alpha + \alpha') + \frac{b \cos \alpha - b' \cos \alpha'}{\cos \alpha - \cos \alpha'}, \\ y &= x\ tang\ \tfrac{1}{2} (\alpha + \alpha') + \frac{b \cos \alpha + b' \cos \alpha'}{\cos \alpha + \cos \alpha'}. \end{aligned} \qquad (4)$$

Aus der Form der Coefficienten von x ist ersichtlich, dafs beide gerade Linien auf einander senkrecht stehen, und die Winkel, welche am Durchschnitte der beiden gegebenen geraden Linien entstehen, halbiren.

33. Die erste der letztern Gleichungen (4) scheint sich auf den ersten Blick nach der Anlage der Rechnung auf die Einführung der Werthe von P und P' mit gleichem Zeichen zu beziehen, während die letzte dieser Gleichungen einem entgegengesetzten Zeichen entspricht. Jedoch ist leicht ersichtlich, dafs, wenn wir keine Beschränkung machen, diese Beziehung nur illusorisch ist. Den Winkel nämlich, den die erste der gegebenen geraden Linien (1) mit der Axe der x bildet, haben wir durch α bezeichnet, statt dieses Winkels können wir aber mit gleichem Rechte auch $(\alpha + \pi)$ nehmen. Alsdann aber, weil:

$$\begin{aligned} \cos (\alpha + \pi) &= - \cos \alpha, \\ tang\ \tfrac{1}{2} (\alpha + \alpha' + \pi) &= - cotg.\ \tfrac{1}{2} (\alpha + \alpha'), \end{aligned}$$

geht die eine der Gleichungen (4) in die andere über, und früher schon in der Gleichung (3) verwechseln sich die Zeichen. Wir sind also zu dem Schlusse berechtigt,

Digitized by Google

dafs wir nicht ohne Weiteres bestimmen können, für welche der beiden Winkel-halbirenden Linien wir P und P' mit gleichem oder entgegengesetztem Zeichen nehmen müssen, so lange wir nicht für die Winkel, welche die gegebenen geraden Linien mit der ersten Axe bilden, also für α, α' u. s. w. stets solche Winkel nur nehmen, die kleiner sind als π. In dieser Voraussetzung aber bildet die gerade Linie, welche durch die erste der Gleichungen (4) dargestellt wird, und welche sich auf gleichnamige Zeichen der Ausdrücke für P und P' bezieht, mit der Axe der x einen Winkel, der nicht zwischen α und α' fällt, wobei sich von selbst versteht, dafs wir diese Winkel von der positiven Seite der x an rechnen. Die durch die zweite der Gleichungen (4) bezeichnete Gerade halbirt denjenigen Winkel am Durchschnitte der gegebenen geraden Linien, der durch den Unterschied der Winkel α und α' gegeben ist.

Diese Bestimmungen sind mit denjenigen der vorigen Nummer in Uebereinstimmung und erscheinen als eine Folge derselben. Die Construction der folgenden Sätze wird hier keine Ungewifsheit mehr übrig lassen.

34. Nachdem wir über diesen Punct in ein ausführlicheres Detail eingegangen sind, können wir nun ohne alle Rechnung eine Reihe von Sätzen fast unmittelbar aus der Form der oben entwickelten Ausdrücke lesen. Wir wollen zu diesem Behufe mit den beiden geraden Linien (t), die wir in der 32. Nummer betrachtet haben, noch eine dritte gerade Linie zusammenstellen, und als deren Gleichung folgende nehmen:

$$y = a''x + b''.$$

Den Winkel, welchen dieselbe mit der ersten Axe bildet, wollen wir durch α'' bezeichnen; alsdann ist der Abstand eines Punctes (y', x') von dieser Linie, den wir entsprechend P'' nennen, durch folgende Gleichung gegeben:

$$P'' = \pm(y' - a''x' - b'')\cos\alpha''.$$

Bezeichnen wir ferner, der Kürze halber

$$\pm(y' - ax - b)\cos\alpha \text{ durch } \pm A,$$
$$\pm(y - a'x - b')\cos\alpha' \text{ „ } \pm A',$$
$$\pm(y - a''x - b'')\cos\alpha \text{ „ } \pm A'',$$

so erhalten wir nach der 32. Nummer:

$$A = \pm A', \quad A' = \pm A'' \quad A = \pm A'', \qquad (5)$$

für die Gleichungen derjenigen sechs geraden Linien, die die Winkel halbiren, welche an den Durchschnitten der ersten und zweiten, zweiten und dritten, ersten und dritten der gegebenen geraden Linien entstehen. Es ist aber ersichtlich, dafs, welches Zeichen wir in den ersten Gleichungen auch wählen mögen, wir durch Abziehen dieser beiden Gleichungen von einander, immer zu einer Gleichung kommen, die in der dritten begriffen ist. Dieſs führt zu folgendem Schema:

$$\begin{array}{lll} A = A', & A' = A'', & A = A''; \\ A = -A', & A' = -A'', & A = A''; \\ A = A', & A' = -A'', & A = -A''; \\ A = -A', & A' = A'', & A = -A''; \end{array} \qquad (6)$$

wo wir in jeder Reihe die dritte Gleichung durch Subtraction der beiden ersten erhalten. Da aus diesem Grunde nun die Elimination von y und x zwischen den beiden ersten Gleichungen, dasselbe Resultat geben mufs, als die Elimination von y und x zwischen

einer derselben und der dritten Gleichung, so schneiden sich alle drei geraden Linien, deren Gleichungen wir in dieselbe Reihe zusammengestellt haben, in einem und demselben Puncte. Solcher Puncte giht es mithin, wenn drei gerade Linien gegeben sind; vier; unter welchen sich auch derjenige Punct hefindet, in welchem die drei geraden Linien, welche die Winkel des durch die gegebenen Geraden gebildeten Dreiecks halbiren, sich kreuzen. Den am Ende der vorigen Nummer wegen der Zeichen gemachten Bemerkungen gemäfs, sind, für den Fall der 8. Figur, diese vier Puncte nach der Ordnung unseres Schema's folgende: O, O', O'', und O'''. Fig. 8.

35. Aus dem Schema der letzten Gleichungen (6) ist sogleich ersichtlich, dafs auf jeder der halhirenden geraden Linien zwei der obigen vier Durchschnitts-Puncte liegen. So liegt z. B. der erste und letzte Punct auf der durch:

$$A' = A''$$

dargestellten geraden Linie, weil diese Gleichung sowol in der ersten als in der vierten Reihe jenes Schema's vorkommt, der zweite und dritte Punct aber liegen beide auf der Geraden:

$$A' = -A''.$$

Diese beiden geraden Linien aber, von denen die erste die Puncte O und O''', die zweite die Puncte O' und O'' enthält, sind in der 8. Figur diejenigen, welche die am Durchschnitte C der beiden Geraden A'B' und A''B'' entstehenden Winkel halhiren und also auch durch C gehen. Den hierin enthaltenen Satz können wir in folgende Aussage einkleiden:

Wenn wir die Basis-Winkel eines beliebigen Dreiecks und die Neben-Winkel derselben durch gerade Linien halbiren, so schneiden sich diese vier Linien noch in vier Puncten, von denen zwei und zwei mit der Spitze des Dreiecks in gerader Linie liegen.

36. Die letzten Entwicklungen sind noch einer Erweiterung fähig. Aehnlich wie wir oben den geometrischen Ort aller Puncte bestimmt haben, die von zweien gegebenen geraden Linien gleichweit abstehen, erhalten wir auch mit Beihehaltung der bisherigen Bezeichnung, die Gleichung:

$$(y - ax - b)\cos\alpha = \pm\mu\,(y - a'x - b')\cos\alpha' \qquad (7)$$

für den Ort aller Puncte, deren Abstand von der ersten zum Abstand von der zweiten geraden Linie sich wie $1 : \frac{1}{\mu}$ verhält.

Die durch die letzte Gleichung (7) dargestellte gerade Linie ist leicht zu construiren; denn da sie durch den Durchschnitts-Punct der beiden gegebenen geraden Linien geht, so bedürfen wir aufserdem nur noch eines Punctes zur Construction derselben. Einen solchen Punct hestimmt aber der Durchschnitt irgend zweier der gegebenen parallelen, geraden Linien, deren Abstände von diesen das verlangte Verhältnifs hahen; oder was hiermit übereinkommt, die auf den gegebenen Geraden Segmente hestimmen, die in jenem Verhältnisse $1 : \frac{1}{\mu}$ stehen. Diese Construction gibt die beiden Linien, welche dem doppelten Zeichen der letzten Gleichung entsprechen. Ist eine dieser Linien gegeben, so bestimmt sich die andere sogleich. Seyen AB und AB' die heiden gegehenen Geraden, und AC, welche ebenfalls gegeben ist, entspreche der Gleichung: Fig. 9.

$$(y - ax - b)\cos\alpha = \mu\,(y - a'x - b')\cos\alpha'; \qquad (8)$$

alsdann braucht man nur irgend eine gerade Linie einer der gegebenen, etwa der AB,

Digitized by Google

parallel zu ziehen, auf dieser Linie δ so zu bestimmen, dafs $Q\delta = QD$, und endlich durch δ die gerade Linie Ay zu legen. Diese Linie ist die gesuchte, deren Gleichung ist:

$$(y - ax - b)\cos\alpha = -\mu(y - a'x - b')\cos\alpha'. \quad (9)$$

Es waltet hier dieselbe Zweideutigkeit darüber ob, welche von den beiden Gleichungen (8) und (9) wir für die eine oder andere der fraglichen Linien nehmen sollen. Ohne hier in Entwicklungen, die denen der 32. Nummer ähnlich sind, einzugehen, ist klar, dafs wir überhaupt dieselbe Annahme machen können, als in dem Falle wo μ gleich Eins ist; dafs wir also die Winkel α, α' u. s. w. nur bis π wachsen lassen und alsdann für die Gleichung (9) diejenige Linie nehmen, welche mit der ersten Axe einen Winkel bildet, der zwischen α und α' fällt; für die Gleichung (8) hingegen die andere Linie.

Wenn wir die beiden gegebenen geraden Linien AB und AB' zu Coordinaten-Axen nehmen, so ergeben sich aus der Construction für die beiden Gleichungen (8) und (9) Ausdrücke von folgender Form:

$$y = Xx, \quad y = X'x = -Xx,$$

so dafs

$$A \mp A' = 0.$$

Eine leichte analytische Betrachtung hätte zu demselben Resultate geführt.

37. Wir wollen nun wieder drei gerade Linien zusammenstellen, und uns dabei der Abkürzungen der 34. Nummer bedienen. Die beiden Gleichungen:

$$A = \mp\mu A' \qquad A = \mp\nu A''$$

bedingen folgende dritte Gleichung:

$$\mu A' = \mp\nu A''.$$

Die, durch diese Gleichungen dargestellten, leicht zu constituirenden geraden Linien schneiden sich also in *demselben Puncte*. Wir bekommen durch Verbindung zweier beliebiger jener Gleichungen die Coordinaten solcher Puncte, deren Abstände von den gegebenen Geraden sich verhalten, wie

$$1 : \frac{1}{\mu} : \frac{1}{\nu}.$$

Dieser Puncte erhalten wir vier, nach einem Schema, das dem der 34. Nummer durchaus ähnlich ist, indem wir blofs A' mit $\mu A'$ und A'' mit $\nu A''$ vertauschen.

Fig 10. Wir wollen diese vier Puncte, in derselben Ordnung als früher genommen, wiederum durch O, O', O'' und O''' bezeichnen; alsdann gibt die 10. Figur, die der 8. ganz analog ist, die bezügliche Construction. Wir können bemerken, dafs durch die Annahme irgend eines der vier Puncte die Coefficienten μ und ν bestimmt sind, und mithin die drei übrigen Puncte sich durch eine leichte Construction ergeben. Auf ähnliche Weise wie in der 35. Nummer ergibt sich, dafs diese vier Puncte, paarweise genommen (was auf dreifache Art geschehen kann) jedesmal mit einem der Winkel-Puncte des durch den Durchschnitt der gegebenen geraden Linien gebildeten Dreiecks CC'C'' in gerader Linie liegen. Nehmen wir nun einen der Puncte, etwa den innerhalb liegenden beliebig an, bestimmen also zwei Gerade, deren Gleichungen von der Form der Gleichung (7) sind, so gibt die Construction der vorigen Nummer folgenden Satz:

Wenn man auf einer von zweien Parallelen zwei Puncte (C'', C') beliebig annimmt, und durch jeden derselben drei gerade Linien so zieht, dafs die mittlere derselben das beidesmalige Segment, welches die beiden äufsern auf der andern Parallelen bestimmen, halbirt ($sp = sp'$, $rq = rq'$), so schneiden sich die vier äufsern Linien in vier Punc-

ten (O' und O'', O und O''') die, paarweise genommen, mit dem Durchschnitte (C) der beiden innern in einer geraden Linie liegen.

Durch Umkehrung erhalten wir einen Satz, dem wir folgende Aussage gehen können:

Wenn man in einem vollständigen Vierecke durch den Durchschnitt zweier Diagonalen (OO''', $O'O''$) nach den Puncten (C', C''), welche die dritte Diagonale verbindet, gerade Linien zieht, so halbiren diese die beiden Segmente (pp', qq') jeder beliebigen der letztgenannten Diagonale parallelen geraden Linie, welche zwischen den Seiten des Vierecks liegen, die in jenen Puncten (C' C'') sich vereinigen. *)

38. Wir haben bis jetzt nur den geometrischen Ort für solche Puncte bestimmt, zwischen deren Abständen von zweien gegebenen geraden Linien ein gegebenes Verhältnifs Statt findet. Wir können aber auch statt zweier gegebenen geraden Linien mehrere betrachten, und nach dem Orte für solche Puncte fragen, zwischen deren Abständen von diesen Linien irgend eine Beziehung Statt findet. Wir wollen zunächst drei gerade Linien betrachten, und wiederum für dieselben folgende Gleichungen nehmen:

$$y = a\,x + b,$$
$$y = a'x + b',$$
$$y = a''x + h''.$$

Bezeichnen wir die hezüglichen Perpendikel durch P, P' und P'', so giht es unzählige Puncte, für welche:

$$P + P' = P''$$

d. h. für welche die Summe der Abstände von den beiden ersten geraden Linien dem Abstande von der dritten gleich ist. Bei den früher gehrauchten Ahkürzungen erhalten wir für den Ort aller jener Puncte:

$$\pm A \pm A' = \pm A'',$$

welche Gleichung in folgende vier verschiedene sich auflöset:

$$\left.\begin{aligned} A + A' + A'' &= 0,\\ A + A' - A'' &= 0,\\ A - A' + A'' &= 0,\\ -A + A' + A'' &= 0; \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

und jede dieser Gleichungen drückt eine hesondere gerade Linie ans.

Wir wären gerade zu demselben Schema der letzten Gleichungen gekommen, wenn wir die Bestimmung gemacht hätten, dafs nicht der Ahstand der Puncte von der dritten gegebenen geraden Linie, sondern von der ersten oder zweiten gleich seyn sollte der Summe der Abstände von den jedesmal übrig hleihenden beiden Geraden. Die Folge davon ist, dafs keine jener Gleichungen sich ausschliefslich auf einen der drei besondern Fälle bezieht, sondern dafs diese vielmehr sich in den analytischen Formen nicht trennen lassen. Diefs geometrisch gedeutet heifst: wenn man für verschiedene Puncte des geometrischen Ortes die drei Perpendikel construirt, so ist, nach der Bestimmung des Punctes bald das eine, hald das andere Perpendikel gleich der Summe der beiden übrigen.

*) Französische Mathematiker nennen *quadrilatère complet* (nicht ganz schicklich durch „vollständiges Viereck" übersetzt) diejenige Figur, welche entsteht, wenn man die gegenüberliegenden Seiten eines gewöhnlichen Vierecks (*quadrilatère simple*) bis zu ihrem Durchschnitte verlängert. Die gerade Linie, welche die beiden so entstehenden Winkel-Puncte verbindet, ist eine neue Diagonale.

Wir können die verschiedenen Gleichungen (1) auf eine elegante Weise construiren und diese Constructions-Art läfst uns sogleich in jenen Gleichungen selbst geometrische Sätze erkennen. Wir kommen hierauf zurück nach einigen allgemeinen Erörterungen.

39. Wenn die Gleichungen zweier geraden Linien:

$$y = a'x + b,$$
$$y = a'x + b',$$

zugleich Statt finden sollen, so bezeichnen sie einen Punct, der beiden Linien gemeinschaftlich ist, mithin den Durchschnitt derselben. Wir finden also die Coordinaten dieses Punctes, wenn wir zwischen den beiden Gleichungen die Werthe von y und x eliminiren. Soll eine dritte gerade Linie durch denselben Punct gehen, so mufs offenbar ihre Gleichung zusammengestellt mit jeder der beiden erstern Gleichungen dieselben Werthe für y und x geben, oder mit andern Worten, die dritte Gleichung mufs eine Folge der beiden erstern seyn: wir müssen dieselbe erhalten können, wenn wir auf irgend eine Weise die obigen Gleichungen durch algebraische Operationen verbinden, und die Art der Verbindung ist genauer dadurch bezeichnet, dafs wir wieder zu der Gleichung einer geraden Linie, zu einer Gleichung vom ersten Grade kommen müssen. Wir erhalten die allgemeine Form der Gleichungen vom ersten Grade, die durch Verbindung der beiden gegebenen Gleichungen entstehen, wenn wir jede derselben mit einem unbestimmten Coefficienten multipliciren, und dann die Summe derselben nehmen. Diese Coefficienten, für welche sowol negative als positive Gröfsen zu nehmen sind, seyen m und m'; alsdann kommt:

$$(m + m')y = (ma + m'a')x + (mb + m'b')$$

für die allgemeine Gleichung aller geraden Linien, welche durch den Durchschnitt der beiden gegebenen gehen, so dafs sich für eine besondere Annahme von m und m' die Gleichung einer bestimmten dieser geraden Linien ergibt. Die letzte Gleichung büfst nichts von ihrer Allgemeinheit ein, wenn wir alle Glieder durch m dividiren, alsdann kommt, wenn wir μ statt $\frac{m'}{m}$ schreiben:

$$(1 + \mu)y = (a + \mu a')x + (b + \mu b'),$$

woraus dann ersichtlich ist, dafs wir für unsre Absicht, unbeschadet der Allgemeinheit, die beiden gegebenen Gleichungen (1) addiren können, nachdem wir blofs eine derselben (etwa die zweite) mit einem unbestimmten Coefficienten μ multiplicirt haben. Wir können der letzten Gleichung endlich noch folgende Form geben:

$$y = \frac{a + \mu a'}{1 + \mu}x + \frac{b + \mu b'}{1 + \mu}.$$

40. Wenn also drei gerade Linien durch einen und denselben Punct gehen, so ist aus den letzten Entwickelungen offenbar, dafs es nur von einem schicklichen Factor μ abhängt, mit dem man die Gleichung einer jener Linien multipliciren mufs, damit dieselbe unmittelbar aus den beiden übrigen Gleichungen durch Addition oder Subtraction sich ergebe. Dieſs führt uns zu folgendem Schema. Wir wollen

$$Ay + Bx + C = 0 \qquad (1)$$

für die Gleichung irgend einer geraden Linie nehmen. Wir können dieser Gleichung eine andere Form geben, ohne sie selbst im mindesten zu verändern, wenn wir jedes Glied derselben, beliebig wie, in zwei Theile theilen, z. B. Ax in ax und αx und einen

Digitized by Google

dieser Theile auf die andere Seite hinüberbringen. Auf diese Weise erhalten wir statt der gegebenen Gleichung die ihr identische:

$$\alpha y + \beta x + \gamma = -(ay + bx + c), \qquad (2)$$

wo denn nach der Voraussetzung folgende Bedingungs-Gleichungen Statt finden:

$$A = a + \alpha, \quad B = b + \beta, \quad C = c + \gamma.$$

Jeder Theil der Gleichung (2), für sich allein gleich Null gesetzt, stellt aber eine neue gerade Linie dar:

$$\alpha y + \beta x + \gamma = 0,$$
$$ay + bx + c = 0. \qquad (3)$$

Addiren wir diese beiden Gleichungen, so werden wir zurückgeführt auf die Gleichungen (2) oder (1). Es schneiden sich also die beiden geraden Linien (3) auf der durch die Gleichung (1) gegebenen.

Wir erhalten alle möglichen Paare gerader Linien, welche sich auf einer gegebenen schneiden, wenn wir verschiedentlich die Gleichung derselben auf die oben angezeigte Weise in zwei Gleichungen zerlegen.

Wir werden fernerhin sehen, wie dasselbe Schema, das sich so natürlich und einfach darbietet, auf die allgemeine Gleichung des zweiten Grades übertragen, unmittelbar zu einer Reihe von Resultaten führt. Deshalb machen wir hier schon, wo es sich am leichtesten darstellt, darauf aufmerksam.

Aus dem Vorigen folgt ferner unmittelbar, dafs wir einen Punct der durch die Gleichung (1) dargestellten geraden Linie finden, wenn wir diese Gleichung irgendwie auf die Form der Gleichung (2) bringen, jeden Theil derselben gleich Null setzen, und den Durchschnitt der durch diese neuen Gleichungen dargestellten geraden Linien construiren. Suchen wir auf dieselbe Weise einen zweiten solchen Punct, so ist die Gerade (1) bestimmt. In gewissen Fällen wird diese Construction sehr elegant.

41. Hiermit kommt die Construction der linearen Gleichungen, die H. Gergonne mehrere Male anwendet, überein. Oft führt nehmlich die Elimination zu Gleichungen unter der Form (2); setzt man alsdann jeden Theil derselben für sich einer und derselben beliebigen Constanten gleich

$$\alpha y + \beta x + \gamma = M,$$
$$-(ay + bx + c) = M, \qquad (4)$$

und construirt die beiden durch diese Gleichungen dargestellten Geraden, so gibt der Durchschnitt derselben einen Punct der zu construirenden geraden Linie. Ein zweiter Punct ergibt sich, wenn statt M irgend eine andere Constante gewählt wird. Man sieht leicht ein, dafs die verschiedene Bestimmung der Constanten einer verschiedenen Zerlegung der Gleichung (1) entspricht, dafs aber die Verschiedenheit der Zerlegung sich blofs auf die Zerlegung von C erstreckt, und dafs mithin die bezüglichen Geraden der verschiedenen Linien-Paare alle unter sich parallel sind.

Wir können nemlich die Gleichungen (4) folgendermafsen schreiben

$$\alpha y + \beta x + (\gamma - M) = 0,$$
$$ay + bx + (c + M) = 0,$$

und so fällt in die Augen, dafs, wie wir auch M bestimmen mögen, die Summe der Constanten in diesen beiden Gleichungen der Constanten C gleich ist, dafs

$$(\gamma - M) + (c + M) = \gamma + c = C.$$

42. Wir können aber auch geradezu, wie H. Gergonne es thut, die angezeigte Constructions-Art der linearen Gleichung (2) rechtfertigen. Denn um die Coordinaten irgend

Digitized by Google

eines Punctes, der, durch dieselbe dargestellten, geraden Linie zu finden, genügt es, y und x so zu bestimmen, dafs durch diese Werthe jene Gleichung befriedigt wird. Setzen wir nun jeden ihrer Theile derselben Constanten gleich, so geschieht dieser Gleichung Genüge, und wir erhalten zugleich die beiden Gleichungen (4) zur vollständigen Bestimmung von y und x. Statt aber die Werthe der so bezeichneten Coordinaten durch Elimination zu bestimmen, und dann zu construiren, können wir die beiden durch (4) dargestellten Geraden construiren; der Durchschnitt dieser beiden Geraden gibt alsdann den gesuchten Punct. Wir werden im folgenden Abschnitte Gelegenheit haben, hierauf zurück zu kommen.

43. Um zuerst an einem ganz einfachen Beispiele die Anwendung des Vorigen zu zeigen, eine Anwendung, auf welche wir sehr häufig zurückkommen werden, nehmen wir die in dem Frühern vorgekommene Gleichung:

$$(y - ax - b)\cos\alpha = \pm (y - a'x - b')\cos\alpha'. \qquad (1)$$

Setzen wir beide Theile dieser Gleichung für sich gleich Null, so kommt, wenn wir in dem ersten den constanten Coefficienten $\cos\alpha$, in dem zweiten $\cos\alpha'$ fortlassen:

$$\begin{aligned} y - ax - b &= 0, \\ y - a'x - b' &= 0. \end{aligned} \qquad (2)$$

Die durch (1) dargestellte gerade Linie geht also durch den Durchschnitt der beiden durch (2) dargestellten, wie dieſs sich auch a priori aus der Art, wie die erste Gleichung gebildet worden, ergibt.

44. Nun kehren wir zur Construction der Gleichungen (t) der 38. Nummer zurück und wollen zunächst die erste derselben betrachten:

$$A + A' + A'' = 0. \qquad (1)$$

Hat man zugleich die beiden Gleichungen:

$$A = 0, \quad A' + A'' = 0, \qquad (2)$$

so wird offenbar die Gleichung (1) befriedigt; jede der letztern Gleichungen aber bezeichnet eine gerade Linie, die erste derselben, oder

$$y - ax - b = 0$$

Fig. 11. ist die Gleichung der ersten der drei gegebenen geraden Linien (C"C); die zweite der Gleichungen (2) oder

$$(y - a'x - b')\cos\alpha' + (y - a''x - b'')\cos\alpha'' = 0$$

ist die Gleichung derjenigen geraden Linie CS, welche den gegenüberliegenden Winkel in dem, durch die drei gegebenen Geraden gebildeten, Dreieck CC'C" halbirt. Der Durchschnitt (S) der ersten gegebenen Geraden mit dieser Linie ist mithin ein Punct, welcher der Gleichung (t) entspricht.

Auf ähnliche Weise finden wir noch zwei solcher Puncte S' und S", wenn wir den Durchschnitt der geraden Linien:

$$\begin{aligned} A' &= 0 \text{ und } A + A'' = 0, \\ A'' &= 0 \text{ „ } A + A' = 0, \end{aligned}$$

suchen. Zwei dieser Puncte reichen zur Construction der Gleichung (1) hin.*)

Behandeln wir die Gleichung

$$A + A' - A'' = 0$$

*) Zur besondern Bestimmung jeder der beiden geraden Linien, welche die, am Durchschnitte von zwei der gegebenen Geraden entstehenden, Winkel halbiren, nehmen wir hier und in dem Folgenden an, die erste Axe sey der ersten der gegebenen geraden Linien

Digitized by Google

auf dieselbe Weise als die Gleichung (1), so finden wir drei Puncte der bezüglichen Linie $\sigma\sigma' S''$, wenn wir die Durchschnitte der durch die drei Paare von Gleichungen:

$$A = 0 \quad A' - A'' = 0,$$
$$A' = 0 \quad A - A'' = 0,$$
$$A'' = 0 \quad A + A' = 0,$$

dargestellten geraden Linien construiren.

Der dritten Gleichung:

$$A - A' + A'' = 0$$

entsprechen die Puncte σ, S', σ''; und der vierten Gleichung:

$$-A + A' + A'' = 0$$

die Puncte S, σ', σ''.

Wenn wir diese einzelnen Fälle zusammenfassen, so haben wir also folgenden Satz:

Wenn man in einem beliebigen Dreiecke irgend zwei Winkel und den gegenüberliegenden Aussen-Winkel, oder wenn man alle Aussen-Winkel desselben durch gerade Linien halbirt, so liegen die Durchschnitts-Puncte dieser Halbirungs-Linien mit den, den bezüglichen halbirten Winkeln gegenüberliegenden, Seiten des Dreiecks jedesmal in gerader Linie. Auf diese Weise erhält man vier gerade Linien. Fällt man von irgend einem Punete derselben Perpendikel auf die drei Seiten des Dreiecks, oder ihre Verlängerungen, so ist jedesmal die Summe zweier solcher Perpendikel dem dritten gleich.

Bei unserer Annahme der Coordinaten beziehen sich die Gleichungen:

$$A + A' + A'' = 0,$$
$$A + A' - A'' = 0,$$
$$-A + A' + A'' = 0,$$

auf den ersten Fall des ersten Theiles dieses Satzes, und die Gleichung:

$$A - A' + A'' = 0$$

auf den zweiten Fall. Dieser letztere Fall ist in den Annalen von Gergonne*) synthetisch bewiesen; nur werden die, die Aussen-Winkel halbirenden, geraden Linien in der Aussage als solche bezeichnet, die auf den andern geraden Linien, welche die Innen-Winkel des Dreiecks halbiren, senkrecht stehen.

45. Wir gehen zur Verallgemeinerung des, in der vorigen Nummer bewiesenen, Satzes über, und behandeln, wie wir dort die Gleichung

$$\pm A \pm A' \pm A'' = 0$$

behandelt haben, nun gerade auf dieselbe Weise folgende Gleichung:

$$\pm A \pm \mu A' \pm \nu A'' = 0, \qquad (1)$$

wo wir durch μ und ν beliebige constante Coefficienten bezeichnen. Diese Gleichung stellt, wenn wir, wie früher, die Vorzeichen berücksichtigen, vier verschiedene gerade Linien

---

parallel, behalten aber, der Symmetrie wegen, die allgemeine Form der Gleichung dieser Linie bei. Uebrigens unterscheiden wir die beiden Halbirungs-Linien nach der 33. Nummer. In der Figur haben wir die Puncte, welche auf Halbirungs-Linien liegen, deren Gleichung von der Form $A + A' = 0$ ist, durch lateinische Buchstaben S, S', S'' bezeichnet, die Puncte aber, welche auf denjenigen Halbirungs-Linien liegen, deren Gleichung die Form $A - A' = 0$ hat, durch griechische Buchstaben $\sigma, \sigma', \sigma''$.

*) Annales de mathématiques pures et appliquées par Gergonne. Tome X. p. 202.

Digitized by Google

dar. Wenn wir von irgend einem Puncte, der auf einer derselben liegt, Perpendikel auf die drei gegebenen geraden Linien fällen, und aus jedem derselben und den durch m, μm und νm (wo wir für m, wie in obiger Gleichung, die Linien-Einheit nehmen können) dargestellten Linien Rechtecke bilden, so ist die Summe zweier derselben immer dem dritten gleich; wo auch der Punct angenommen werden mag.

Nehmen wir $m = \frac{1}{\sin \gamma}$, $\mu m = -\frac{1}{\sin \gamma'}$ und $\nu m = \frac{1}{\sin \gamma''}$, so geht die Gleichung (1) über in folgende:

$$\pm \frac{A}{\sin \gamma} \mp \frac{A'}{\sin \gamma'} \pm \frac{A''}{\sin \gamma''} = 0,$$

in eine Gleichung, die wir nach der 28. Nummer zu deuten wissen.

Alle Puncte also, von denen man an jede von drei gegebenen geraden Linien unter einem beliebigen aber constanten Winkel (γ, γ' und γ'') gerade Linien ziehen kann, so dafs die Summen irgend zweier derselben der dritten gleich sind, liegen auf vier neuen geraden Linien vertheilt.

46. Wir können die Gleichung

$$A + \mu A' + \nu A'' = 0, \qquad (2)$$

die wir, um ein bestimmtes Beispiel zu haben, von der Gleichung (1) absondern, ähnlich wie früher construiren. Wir finden sogleich drei Puncte derselben durch den Durchschnitt folgender, paarweise zusammengestellter, gerader Linien:

$$A = 0, \quad \mu A' + \nu A'' = 0;$$
$$A' = 0, \quad A + \nu A'' = 0;$$
$$A'' = 0, \quad A + \mu A' = 0;$$

Fig. 12. Die ersten Linien jedes Paares sind wieder keine andere als die gegebenen geraden Linien selbst, die andern drei Linien aber sind, wenn μ und ν gegeben sind, leicht zu construiren, und überdiefs bestimmen zwei derselben die dritte. Für die erste und dritte derselben z. B., durch deren beliebige Annahme μ und ν als gegeben zu betrachten sind, wollen wir, den frühern Bemerkungen rücksichtlich der Zeichen gemäfs, in unserer Figur CO' und C''O' nehmen; alsdann ist C'O' durch die Gleichung:

$$A - \nu A'' = 0$$

gegeben, mithin (36) die, durch die obige Gleichung des zweiten Paares:

$$A + \nu A'' = 0$$

gegebene, gerade Linie leicht zu bestimmen. Hiermit ist also die Construction dreier Puncte S, S'' und S' der in Rede stehenden geraden Linien (2) gegeben.

Fig. 13. Aehnlich ergeben sich für jede der drei andern in der Gleichung (1) begriffenen Gleichungen, drei Puncte. Die Zahl der verschiedenen Puncte, die wir im Ganzen erhalten, beläuft sich auf sechs, und diese sechs Puncte S, S', S'', σ, σ', σ'' bilden ein vollständiges Viereck.

47. Um dem eben bewiesenen Satze eine bequemere Aussage zu geben, wollen wir dieselbe, wie wir es am Ende der 37. Nummer gethan haben, auf das vollständige Viereck C''OO''O'''C'O' beziehen. Wir können alsdann die beiden Diagonalen des einfachen Vierecks OO''' und O'O'', welche sich in C schneiden, und die beiden Paare gegenüberliegender Seiten desselben, als die durch obige Gleichungen:

$$\mu A' \mp \nu A'' = 0, \quad A \mp \mu A' = 0, \quad A \mp \nu A' = 0,$$

dargestellte sechs gerade Linien nehmen, wobei wir C''C, C'C und C'C als die drei gegebenen Geraden betrachten. Hieraus ergibt sich denn folgender Satz:

Digitized by Google

Wenn man in einer vollständigen vierseitigen Figur durch den Durchschnitt zweier Diagonalen und die beiden Puncte, welche die dritte Diagonale verbindet, zwei gerade Linien zieht, so bestimmt jede von diesen Linien noch zwei Durchschnitts-Puncte auf den Seiten des Viereeks, welche vier Puncte nebst den Durchschnitts-Puncten der beiden ersten Diagonalen mit der dritten, die sechs Winkel-Puncte einer neuen vollständigen vierseitigen Figur sind: so dafs man also viermal drei derselben zusammenstellen kann, die in gerader Linie liegen.

Der Anblick der Figur zeigt, dafs die Beziehung der beiden vollständigen Vierecke zu einander eine durchaus gegenseitige ist.

48. Wenn wir die drei, das Dreieck CC'C'' bildenden, geraden Linien wieder als ursprünglich gegeben betrachten, so gehören zur Construction unseres Satzes (zur Bestimmung von μ und ν) nur zwei obiger sechs Puncte $S, S', S'', \sigma, \sigma'$ und σ'', die nicht auf derselben Dreiecksseite liegen. Wenn wir von jenen Puncten drei nehmen ($\sigma, \sigma', \sigma''$; S, σ', S''; S, S', σ'' oder σ, S', S'';), von denen einer auf jeder Seite des gegebenen Dreiecks oder deren Verlängerung liegt, so folgt unmittelbar aus der Construction, dafs, wenn man von diesen Puncten nach den gegenüberliegenden Spitzen des Dreiecks (C, C', C'') gerade Linien zieht, diese drei Linien sich in demselben Puncte (O, O', O'', O''',) durchsetzen. Hiernach haben wir denn folgenden Satz:

Wenn die Winkel-Puncte eines Dreiecks in die Seiten (oder deren Verlängerungen) eines andern Dreiecks fallen, und überdiefs diejenigen drei geraden Linien, welche die gegenüberliegenden Spitzen der beiden Dreiecke verbinden, sich in demselben Puncte kreuzen, so schneiden sich die, diesen Spitzen in beiden Dreiecken gegenüberliegenden, Seiten in dreien Puncten, welche in gerader Linie liegen.

49. Die nächstfolgenden Bemerkungen gestatten, die in Rede stehenden Constructionen noch auf eine andere Weise zu bezeichnen. Seyen $C'C$ und $C''C$ die beiden ersten der gegebenen geraden Linien, und $C''S''$ und $C''\sigma''$ zwei andere, welche durch die beiden Gleichungen:

$$A = \mu A', \quad A = -\mu A',$$

wo wir für μ irgend eine beliebige Zahl nehmen, gegeben sind. Aus der Natur der beiden letzten Linien ergibt sich, wo wir auch S'' und σ'' nehmen mögen, zwischen den von Fig. 14.
S'' und σ'' auf die beiden ersten Geraden gefällten Perpendikeln folgende Beziehung:

$$\frac{S''K}{S''L} = \frac{\sigma''\varkappa}{\sigma''\lambda},$$

also haben wir folgende Proportion:

$$\sigma''\lambda : S''L = \sigma''\varkappa : S''K,$$

woraus sich denn ferner ergibt, wenn wir die Figur ansehen:

$$\sigma''C : CS'' = \sigma''C' : S''C'.$$

Die als beliebig zu betrachtende gerade Linie $\sigma''C'$ ist also durch die vier geraden Linien, welche von C'' ausgehen, harmonisch getheilt; d. h. der eine äufsere Abschnitt verhält sich zum mittlern Stücke, wie die ganze Linie zum andern äufsern Abschnitte.

In Fig. 13 ist hiernach jede der drei gegebenen geraden Linien harmonisch getheilt, Fig. 13.
nemlich $C'C$ in S und σ; $C''C$ in S' und σ', endlich CC' in S'' und σ''.

50. An die 47. Nummer schliefst sich also folgender bekannte Satz: Fig. 15.

Zwei Diagonalen eines vollständigen Vierecks ($OO''', O'O''$) theilen die dritte Diagonale ($C''C$) harmonisch.

Digitized by Google

51. In der Construction der 13. Figur schneiden sich sowol die beiden geraden Linien $\sigma''S'$ und $\sigma'S''$, als die beiden andern $\sigma''\sigma'$ und $S''S'$ auf der geraden Linie $C''C'$. Dieſs wird dadurch bedingt, daſs $C''C$ und $C'C$ harmonisch getheilt sind, und in einem entsprechenden Theilungs-Puncte sich schneiden.

Wir verweilen nicht länger bei diesem Satze, noch bei andern Sätzen, die mit denselben verwandt sind; es genügt uns daranf aufmerksam gemacht zu haben, wie die Theorie der harmonischen Theilung, die in der neuern Behandlung der Geometrie von so groſser Bedeutung ist, sich an die analytischen Formen, mit denen wir uns in den letzten Nummern beschäftigt haben, unmittelbar anschlieſst. Wir können dieselbe als eine synthetische Umschreibung jener Formen betrachten und wir durchblicken hierin einigermaſsen den Grund, warum sie so leichte Beweise liefert.

52. Wir wollen um diese Gruppe von Sätzen — die ganz unmittelbare Folgerungen aus der Form des Ausdruckes für den Abstand eines gegebenen Punctes von einer gegebenen geraden Linie sind — zu schlieſsen, noch ein letztes Beispiel nehmen; wir wollen nemlich zu den drei gegebenen geraden Linien, die wir bisher genommen haben, noch eine vierte hinzufügen. Es sey

$$y = a'''x + b'''$$

die Gleichung derselben, und der Kürze wegen setzen wir wiederum

$$(y - a'''x - b''')\cos\alpha''' = A''',$$

wo α''' den Winkel hezeichnet, den die Gerade mit der ersten Axe hildet. Alsdann erhalten wir für den Ort solcher Puncte, für welche die Summe der Abstände von den beiden ersten gegebenen Geraden gleich ist der Summe der Abstände von den beiden übrigen, folgende Gleichung:

$$\pm A \pm A' = \pm A'' \pm A''',$$

welche in acht einzelne von einander verschiedene Gleichungen zerfällt:

$$\begin{aligned}
A + A' + A'' + A''' &= 0,\\
A + A' + A'' - A''' &= 0,\\
A + A' - A'' + A''' &= 0,\\
A - A' + A'' + A''' &= 0,\\
-A + A' + A'' + A''' &= 0,\\
A + A' - A'' - A''' &= 0,\\
A - A' - A'' + A''' &= 0,\\
A - A' + A'' - A''' &= 0.
\end{aligned}$$

Zu denselben acht Gleichungen wären wir gekommen, wenn wir von der Bedingung ausgegangen wären, daſs z. B. die Summen des zweiten und dritten Abstandes der Summe des ersten und vierten Abstandes, oder auch, daſs die Summe dreier beliebiger Abstände dem übrigen Abstande gleich seyn solle. Auf jeder der durch die letzten Gleichungen dargestellten acht geraden Linien liegen also diejenigen Puncte vertheilt, die zu den vier gegebenen Geraden die Beziehung haben, daſs entweder die Summe zweier Abstände gleich ist der Summe der beiden übrigen, wo wir auf drei verschiedene Weisen combiniren können, oder daſs die Summe von dreien Abständen dem vierten gleich ist, wo wir wiederum vier verschiedene Fälle erhalten, so daſs im Ganzen siebenerlei Bestimmungen Statt finden können.

Wir können diese Gleichungen nach der nun schon öfter angewandten Methode construiren, indem wir die Glieder jeder Gleichung in zwei Theile absondern, jeden dersel-

Digitized by Google

ben für sich gleich Null setzen, und die neuen so erhaltenen beiden Gleichungen construiren. Auf diese Weise gibt der Durchschnitt zweier Linien einen Punct derjenigen Linie, die wir bestimmen wollen. Es kommt hierbei Alles darauf an, dafs die Zerlegung uns zu Formen führe, in welchen wir bekannte Constructionen wiedererkennen. Wir erreichen dieses Ziel, indem wir immer zwei und zwei Glieder der zu construirenden Gleichung zusammennehmen. Als Beispiel mag die zweite obiger Gleichungen dienen:

$$A + A' + A'' - A''' = 0.$$

Wir erhalten drei Puncte der bezüglichen geraden Linie durch den Durchschnitt der einzelnen Linien, der durch die folgenden Gleichungen dargestellten drei Linien-Paare:

$$A + A' = 0, \quad A'' - A''' = 0;$$
$$A + A'' = 0, \quad A' - A''' = 0;$$
$$A - A''' = 0, \quad A' + A'' = 0.$$

Auf diese Weise sind also drei Puncte O, O', und O'' gegeben, welche in gerader Linie liegen. Jede der letztern Linien halbirt einen der durch den Durchschnitt der gegebenen Geraden gebildeten Winkel. Fig. 16.

Die ähnliche Construction der übrigen sieben Gleichungen gibt uns noch siebenmal drei Puncte, die in gerader Linie liegen.

Es ist jedoch hierbei zu bemerken, dafs die Zahl der verschiedenen Puncte, die wir auf diese Weise erhalten, nur zwölf beträgt, was sich leicht aus der Art, wie wir zur Bestimmung jener Puncte durch Combination der verschieden accentuirten A gekommen sind, ergibt.

Die geraden Linien, deren Construction wir eben angezeigt haben, sind also die gesuchten geometrischen Oerter für Puncte, zwischen deren Abständen von den vier gegebenen geraden Linien eine der angezeigten sieben Bestimmungen Statt findet. Wir sehen leicht *a priori* ein, dafs sich diese sieben einzelnen Fälle auf die Puncte der acht Segmente beziehen, die auf jedem jener Oerter durch die drei Constructions-Puncte, und die Durchschnitts-Puncte mit den gegebenen vier geraden Linien bestimmt werden. Es würde uns von unserm Zwecke zu weit abführen, wenn wir hier in eine detaillirte Discussion eingehen wollten. Die in Rede stehenden acht Segmente sind für den Fall des in der 16. Figur construirten Ortes: AB, BC, CO'', O''D, DE, EO, OO' und O'F. Die beiden äufsersten Segmente beziehen sich auf denselben Fall.

53. Diese Erörterungen sind noch einer gröfsern Ausdehnung fähig, besonders wenn man, wie wir es an frühern Beispielen gezeigt haben, die Construction aus verschiedenen Gesichts-Puncten betrachtet. Wir ziehen aber blofs aus den bisherigen Entwickelungen die nachstehenden allgemeinen Folgerungen:

Wenn n gerade Linien gegeben sind, so erhalten wir für den geometrischen Ort solcher Puncte, für welche die Summe der Abstände von (n—m) geraden Linien, welche wir beliebig unter den gegebenen nehmen, gleich ist der Summe der Abstände von den übrigen m Geraden, immer gerade Linien, oder bestimmter ausgedrückt, Segmente derselben. (Wir bezeichnen hierbei durch m eine beliebige ganze Zahl unter n.) Die Zahl dieser geraden Linien ist leicht zu bestimmen; man erhält dieselbe, indem man die Zahl der verschiedenen Gleichungen sucht, die in derjenigen enthalten sind, die man bekommt, wenn man das Aggregat aller Ausdrücke für die Abstände von den einzelnen geraden Linien, Ausdrücke, die wir oben durch die verschieden accentuirten A bezeichnet haben, nimmt und dabei jeden derselben mit dem doppelten Vorzeichen verbindet.

Digitized by Google

Bezeichnet n eine ungerade Zahl, so ist die Zahl der verschiedenen Gleichungen:

$$1 + \frac{n}{1} + \frac{n(n-1)}{1.\,2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.\,2.\quad 3} + \ldots + \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-(r-1))}{1.\,2.\quad 3\quad\ldots\quad r}$$

wo r gleich zu nehmen ist $\frac{n-1}{2}$; bezeichnet aber n eine gerade Zahl, so ist r gleich $\frac{n}{2}$, alsdann müssen wir aber nur die Hälfte des letzten Gliedes der vorstehenden Reihe nehmen. Für die Summe dieser Reihe erhalten wir, n mag eine gerade oder ungerade Zahl seyn, immer 2^{n-1}. Es steigt also die Zahl der in Rede stehenden einzelnen geometrischen Oerter in geometrischer Progression.

54. Auch wenn n eine gröfsere Zahl bedeutet, können wir jeden der einzelnen linearen Oerter nach der frühern Methode construiren. Wir theilen nemlich die Gleichung desselben beliebig in zwei Theile und construiren die durch die beiden einzelnen Theile dargestellten Linien; der Durchschnitt derselben ist ein Punct der gesuchten. Um die beiden Theile zu construiren, theilen wir jeden derselben von Neuem in zwei Theile, und fahren so lange damit fort, bis wir zu zweitheiligen oder eintheiligen Gleichungen kommen, von welchen wir die erstern durch Winkel-Halbirung construiren können, und von welcher die letztern den gegebenen geraden Linien entsprechen.

Es ist offenbar, dafs wir jede beliebige der oben bestimmten Gleichungen, deren Gesammt-Zahl 2^{n-1} beträgt, z. B. diejenige, in welcher alle Glieder mit dem Zeichen + erscheinen, auf $2^{n-1} - 1$ verschiedene Arten in zwei Theile zerlegen können. Wir erhalten also eben so viele Constructions-Puncte, unter denen sich auch die Durchschnitts-Puncte der zu construirenden Oerter mit der gegebenen geraden Linie befinden. Diese Puncte bestimmen auf der bezüglichen geraden Linie 2^{n-1} Segmente, von denen die beiden äufsern nach einer Seite hin unbegränzt sind.

Den einzelnen Segmenten entsprechen die $2^{n-1} - 1$ einzelnen Bestimmungen, welche die oben gemachte Bestimmung, dafs nemlich die Summe der Abstände von $(n-m)$ geraden Linien der Summe der Abstände von den übrigen m Geraden gleich ist, in sich begreift, wenn wir einmal jene $(n-m)$ geraden Linien auf verschiedene Weise unter den n gegebenen auswählen, und dann für m nach einander alle Werthe von 1 bis $(n-1)$ nehmen. Den beiden äufsern und unbegränzten Segmenten wird immer dieselbe Bestimmung entsprechen.

Wir verweilen nicht bei den Modificationen, welche die letzten allgemeinen Erörterungen erleiden, wenn wir zuvor jeden der verschiedenen Abstände mit einem beliebigen Coefficienten multipliciren und dann Bestimmungen treffen, die den vorigen ähnlich sind.

55. In den folgenden Nummern, die noch für die Theorie der geraden Linie bestimmt sind, wollen wir die analytische Geometrie besonders zum Beweise solcher Sätze anwenden, die sich auf den gemeinsamen Durchschnitt dreier oder mehrerer gerader Linien in demselben Puncte und auf das Liegen dreier Puncte auf derselben geraden Linie, beziehen. In diesen Beweisen ist die Coordinaten-Methode einer grofsen Biegsamkeit fähig und namentlich ist die Wahl der Axen hier von Bedeutung. So sind wir bereits schon auf Beispiele gestofsen, wie darin, dafs eine Gleichung durch Abziehen zweier andern von einander erhalten wird, der Beweis davon liegt, dafs die bezüglichen Geraden sich in demselben Puncte schneiden; andere Beispiele zeigten, wie aus der Construction einer linearen Gleichung, die unmittelbar durch die Form derselben angedeutet wurde, der Beweis sich führt, dafs drei, geometrisch bestimmte, Puncte in gerader Linie

Digitized by Google

liegen. Wir wollen nun zunächst allgemeine Schemata dieser Beweise entwickeln und dann Beispiele folgen lassen, bei deren Auswahl unser Haupt-Augenmerk auf den Vergleich der Methode gerichtet ist.

56. Seyen:

$$\begin{aligned} y &= \alpha x + \beta, \\ y &= a x + b, \\ y &= A x + B, \end{aligned} \qquad (1)$$

die Gleichungen dreier gerader Linien, die durch denselben Punct gehen. Wir haben (39) gesehen, dafs die allgemeine Form aller Gleichungen für solche gerade Linien, die durch den Durchschnitt der beiden ersten jener Linien gehen, folgende ist:

$$y = \frac{a+\mu\alpha}{1+\mu} x + \frac{b+\mu\beta}{1+\mu}. \qquad (2)$$

Da nun die dritte gegebene Gerade, der Voraussetzung gemäfs, durch den Durchschnitt der beiden erstern geht, so mufs μ in der letzten Gleichung so gewählt werden können, dafs

$$\frac{a+\mu\alpha}{1+\mu} = A,$$
$$\frac{b+\mu\beta}{1+\mu} = B.$$

Durch jede dieser Gleichungen können wir den ursprünglich als beliebig angenommenen Coefficienten μ bestimmen; sollen beide Gleichungen zugleich Statt finden, so gibt uns die Elimination von μ:

$$Ba - Ab + \beta A - B\alpha - \beta a + b\alpha = 0, \qquad (3)$$

oder wenn wir in Beziehung auf die Constanten der dritten gegebenen Geraden ordnen:

$$A(\beta - b) - B(\alpha - a) + b\alpha - \beta a = 0. \qquad (4)$$

Diefs ist mithin die gesuchte Bedingungs-Gleichung zwischen den Constanten der drei Gleichungen (1), damit die bezüglichen Geraden sich in demselben Puncte schneiden. Diese Gleichung ist, wie zu erwarten stand, in Beziehung auf die entsprechenden Constanten der drei Gleichungen symmetrisch.

57. Wenn die Gleichungen der gegebenen Geraden unter folgenden Formen erscheinen:

$$\begin{aligned} p\,y + q\,x &= p\,q, \\ p'y + q'x &= p'q', \\ p''y + q''x &= p''q'', \end{aligned}$$

so formen wir durch die gehörigen Substitutionen die Bedingungs-Gleichung (3) leicht in folgende um:

$$q'q''p\,(p'-p'') + qq''p'(p''-p) + qq'p''(p-p') = 0. \qquad (5)$$

58. Es seyen ferner:

$$\begin{aligned} y &= \alpha x + \beta, \\ y &= a x + b; \\ y &= \gamma x + \delta, \\ y &= c x + d; \\ y &= \varkappa x + \lambda, \\ y &= k x + l; \end{aligned}$$

die Gleichungen von sechs geraden Linien: wir wollen die Bedingung bestimmen, dafs die Durchschnitte der ersten und zweiten, der dritten und vierten, der fünften und sechs-

ten in gerader Linie liegen. Wir können die Sache auf folgende Weise angreifen. Bezeichnen wir durch μ wieder einen unbestimmten Coefficienten, so ist die allgemeine Form der Gleichung, die eine gerade Linie bedeutet, welche durch den Durchschnitt der beiden ersten Linien geht:

$$(1+\mu)y = (a+\mu\alpha)x + b+\mu\beta.$$

Ebenso ergibt sich, wenn μ' und μ'' zwei neue unbestimmte Factoren bedeuten:

$$(1+\mu')y = (c+\mu'\gamma)x + d+\mu'\delta,$$
$$(1+\mu'')y = (k+\mu''\varkappa)x + l+\mu''\lambda,$$

für die allgemeine Form der Gleichungen solcher gerader Linien, die durch den Durchschnitt der dritten und vierten und der fünften und sechsten obiger Linien gehen. Durch gehörig genommene Werthe für μ, μ' und μ'', positive sowol als negative, erhalten wir jede einzelne gerade Linie, welche obigen Bedingungen Genüge thut. Sollen die drei Durchschnitts-Puncte in gerader Linie liegen, so müssen sich jene Coefficienten so bestimmen lassen, dafs die drei letzten Gleichungen identisch werden und dieselbe gerade Linie bezeichnen. Diefs erfordert aber:

$$\frac{a+\mu\alpha}{1+\mu} = \frac{c+\mu'\gamma}{1+\mu'} = \frac{k+\mu''\varkappa}{1+\mu''},$$
$$\frac{b+\mu\beta}{1+\mu} = \frac{d+\mu'\delta}{1+\mu'} = \frac{l+\mu''\lambda}{1+\mu''}; \qquad (6)$$

und somit haben wir vier von einander unabhängige Gleichungen zwischen μ, μ', μ'' und den Constanten der sechs Geraden. Wenn wir μ, μ' und μ'' eliminiren, so erhalten wir die gesuchte Bedingungs-Gleichung. Die Elimination hat keine Schwierigkeit. In einzelnen Fällen lassen jene Gleichungen sich geradezu verificiren, alsdann ist jene zur Beweisführung nicht mehr nöthig.

59. Wir kommen aber noch schneller und zugleich auf eine noch elegantere Weise zum Ziele, wenn wir die Gleichung der geraden Linie, welche die drei Durchschnitte enthält, in die Rechnung einführen. Für diese Gleichung wollen wir folgende nehmen:

$$y = Ax + B. \qquad (7)$$

Da nun die beiden geraden Linien jedes der drei Paare sich auf dieser letzten Linie, den Voraussetzungen gemäfs, schneiden, so gibt uns die 56. Nummer sogleich folgende drei Gleichungen:

$$A(\beta-b) - B(\alpha-a) + b\alpha - \beta a = 0,$$
$$A(\delta-d) - B(\gamma-c) + d\gamma - \delta c = 0, \qquad (8)$$
$$A(\lambda-l) - B(\varkappa-k) + l\varkappa - \lambda k = 0.$$

Auf diese drei Bedingungs-Gleichungen werden wir geführt, wenn wir die gerade Linie, welche die Durchschnitts-Puncte enthält, als gegeben betrachten, mithin A und B als bekannt. Eliminiren wir eine dieser Gröfsen, so reducirt sich die Zahl der Bedingungs-Gleichungen auf zwei. Durch Elimination von B z. B. ergibt sich:

$$A\{(\beta-b)(\gamma-c) - (\delta-d)(\alpha-a)\} + (b\alpha-\beta a)(\gamma-c) - (d\gamma-\delta c)(\alpha-a) = 0,$$
$$A\{(\beta-b)(\varkappa-k) - (\lambda-l)(\alpha-a)\} + (b\alpha-\beta a)(\varkappa-k) - (l\varkappa-\lambda k)(\alpha-a) = 0. \qquad (9)$$

Diesen beiden Gleichungen mufs Genüge geschehen, wenn die Durchschnitts-Puncte auf einer geraden Linie liegen sollen, deren Richtung durch A bestimmt ist. Eliminiren wir auch A, so kommt:

$$\frac{(b\alpha-\beta a)(\gamma-c) - (d\gamma-\delta c)(\alpha-a)}{(\beta-b)(\gamma-c) - (\delta-d)(\alpha-a)} = \frac{(b\alpha-\beta a)(\varkappa-k) - (l\varkappa-\lambda k)(\alpha-a)}{(\beta-b)(\varkappa-k) - (\lambda-l)(\alpha-a)}, \qquad (10)$$

Digitized by Google

und diese Bedingungs-Gleichung, welche weder A noch B enthält, ist die gesuchte. Wir sehen also, dafs es bei den letzten Entwickelungen nur auf die Form der eingeführten Hülfs-Gleichung (7) ankommt, und hierin zeigt sich die Methode in ihrer ganzen Reinheit.

60. Die Gleichung (10) erleidet durch Fortschaffung der Nenner noch eine kleine Reduction. Unser Zweck war aber mehr zu zeigen, wie man leicht zu dieser Gleichung gelangen kann, als dieselbe zu entwickeln. Denn für besondere Fälle würde es mühsam seyn zu untersuchen, ob die Coefficienten von sechs verschiedenen Gleichungen der eben entwickelten Genüge thun, um zu beweisen, dafs die geraden Linien, welche sie darstellen, paarweise genommen sich in drei Puncten schneiden, die in gerader Linie liegen. Für jeden einzelnen Fall giht es eine leichteste Art, die Sache anzugreifen und selten nur brauchen wir die End-Gleichung selbst zu entwickeln. Besonders einfach wird der Beweis, wenn der Anfangs-Punct der Coordinaten sich füglich in einen der Durchschnitts-Puncte legen läfst. Ueberhaupt müssen wir jedesmal eh wir zum Beweise selbst übergehen, uns ein Schema desselben entwerfen. Wir wollen einige Beispiele geben.

61. Sey YOX irgend ein beliebiger Winkel, dessen Schenkel wir zu Coordinaten-Axen nehmen; alsdann sind Fig. 17.

$$\begin{aligned} py + qx &= pq, \\ p'y + q'x &= p'q', \end{aligned} \qquad (1)$$

die Gleichungen zweier gerader Linien PQ und P'Q', welche von der ersten Axe die Segmente p und p', von der zweiten die Segmente q und q', abschneiden. Wir wollen die Gleichung derjenigen geraden Linie bestimmen, welche durch den Durchschnitt der beiden gegebenen und den Anfangs-Punct der Coordinaten geht. Um diese zu erhalten, müssen wir die beiden Gleichungen (1) so mit einander verbinden, dafs wir zu einer Gleichung von der Form:

$$y = Ax$$

kommen. Multipliciren wir zu diesem Ende die erste Gleichung mit p'q', die zweite mit pq, und ziehen ab, so kommt:

$$pp'(q'-q)y + qq'(p'-p)x = o, \qquad (2)$$

mithin:

$$A = -\frac{qq'(p'-p)}{pp'(q'-q)}.$$

62. Wir schalten hier einige Entwicklungen ein, worauf uns die Form des Ausdrucks von A führt. Nehmen wir nemlich für einen Augenblick an, der Coordinaten-Winkel sey ein rechter, und machen überdies die Voraussetzung, dafs die beiden durch (1) bezeichneten Geraden auf einander senkrecht stehen, dafs mithin: Fig. 18.

$$\frac{qq'}{pp'} = -1,$$

so reducirt sich die letzte Gleichung auf:

$$A = \frac{p'-p}{q'-q}.$$

Das Verhältnifs der auf den beiden Axen bestimmten Segmente (p'—p) und (q'—q) ist also gleich der trigonometrischen Tangente desjenigen Winkels, welchen die Gerade (2) mit der ersten Axe bildet. So lange sich also die beiden auf einander senkrechten Geraden (1) in demselben Puncte, oder allgemeiner in einem beliebigen Puncte einer festen durch O gehenden geraden Linie (2) schneiden, ist jenes Verhältnifs constant. Es ist

$$\frac{PP'}{QQ'} = \frac{\pi\pi'}{\varpi\varpi'} = tang$$

Digitized by Google

Wir haben also folgenden Satz bewiesen:

Wenn die Schenkel zweier rechter Winkel, von denen wir einen als fest und unveränderlich betrachten, bis zum gegenseitigen Durchschnitt verlängert werden, so bleibt das Verhältnifs der Segmente, die auf den Schenkeln des ersten Winkels bestimmt werden, immer dasselbe, wie man auch den zweiten rechten Winkel um seinen Scheitel drehen, und wie man auch diesen Scheitel auf derjenigen geraden Linie, welche die Scheitel der beiden ursprünglich angenommenen Winkel verbindet, fortrücken läfst.

Wenn die oben durch (2) bezeichnete Gerade den ersten rechten Winkel halbirt, so ist:

$$A = 1,$$

mithin sind die Segmente $(p'-p)$ und $(q'-q)$ einander gleich. Es ist also:

$$QQ' = PP'.$$

Fig. 19. *Wenn man in irgend einem rechtwinkligen Dreiecke den rechten Winkel durch eine gerade Linie halbirt, und im Durchschnitts-Puncte dieser Linie mit der Hypotenuse des Dreiecks ein Perpendikel errichtet, so bestimmt dasselbe auf den Katheden, (die eine derselben verlängert), gleiche Segmente.*

Fig. 17. 63. Nach diesen Abschweifungen nehmen wir den abgebrochenen Faden wieder auf und wollen nun die Gleichung einer geraden Linie suchen, welche durch den Anfangs-Punct der Coordinaten und den Durchschnitt der beiden geraden Linien PQ' und P'Q geht. Die Gleichungen der letztgenannten Linien sind, den Bezeichnungen der 61. Nummer gemäfs, folgende:

$$\begin{aligned} py + q'x &= pq', \\ p'y + qx &= p'q. \end{aligned} \qquad (3)$$

Wenn wir diese beiden Gleichungen zu einer Gleichung von der Form:

$$y = A'x,$$

verbinden, so erhalten wir die verlangte. Multipliciren wir zu diesem Ende die erste der Gleichungen (3) mit $p'q$, die zweite mit pq', und ziehen ab, so kommt:

$$pp'(q'-q)y - qq'(p'-p)x = o, \qquad (4)$$

mithin

$$A' = \frac{qq'(p'-q)}{pp'(q'-q)},$$

und da wir in der 61. Nummer für A folgenden Werth gefunden haben:

$$A = -\frac{qq'(p'-p)}{pp'(q'-q)},$$

so folgt:

$$A + A' = o.$$

64. Aus diesen Entwicklungen können wir mehrere Resultate ziehen. Wird nemlich eine der geraden Linien

$$y = Ax, \qquad y = A'x,$$

willkürlich angenommen, so bestimmt sich die andere vermittelst der Gleichung (5). Rückt also der Punct S auf der ersten dieser Geraden fort, so bleibt der Constructions-Punct σ immer auf der zweiten, die Richtung der durch S gezogenen beiden Linien SP und SP' ist hierbei durchaus beliebig. Die Beziehung der Linien OS und $O\sigma$ zu einander ist reciprok. *)

*) Man sieht leicht ein, dafs dieser und der folgende Satz sich gleich schon an die Constructionen und das einfache Schema der 37. Nummer hätten anknüpfen lassen. Diefs zeigt die

Nehmen wir irgend zwei der vier Durchschnitts-Puncte, die nicht auf derselben Axe Fig. 20.
liegen, z. B. P und Q als fest, so können wir noch auf unendlich viele Art P' und Q' so bestimmen, dafs PQ' und P'Q sich auf ein und derselben geraden Linie Oσ schneiden, die durch den Anfangs-Punct der Coordinaten geht; alsdann aber laufen alle gerade Linien P'Q' in demselben Puncte S zusammen.

65. Die letzten Sätze bestehen auch dann noch, wenn S unendlich weit liegt, wenn PQ und P'Q' parallel sind. In diesem Falle ist:

$$\frac{q}{p} = \frac{q'}{p} = \frac{q'-q}{p'-p},$$

wodurch die Werthe von A und A' sich folgendermafsen bestimmen:

$$A = -\frac{q}{p} = -\frac{q'}{p'}, \quad A' = \frac{q}{p} = \frac{q'}{p'};$$

die Gleichungen von OS und Oσ werden hiernach folgende:

$$py + qx = 0 \text{ oder } p'x + q'x = 0,$$
$$py - qx = 0 \quad „ \quad p'y - q'x = 0.$$

Die erstere der bezüglichen Geraden ist also parallel mit PQ und P'Q'; die letztere halbirt diese beiden Linien, weil die Coordinaten der Mitten derselben, nemlich $\frac{q}{2}$, $\frac{p}{2}$ und $\frac{q'}{2}$, $\frac{p'}{2}$ für y und x substituirt, die letzten Gleichungen verificiren.

Setzen wir

$$q' = 2q, \quad p' = 2p,$$

so ist der bekannte Satz bewiesen, dafs *die drei geraden Linien, welche in einem Dreieck von den Winkel-Puncten nach den Mitten der gegenüberliegenden Seiten gezogen werden können, sich in demselben Punete schneiden.*

66. *Die drei in den Mitten der Seiten eines Dreiecks errichteten Perpendikel schneiden sich in ein und demselben Puncte.* Um Abwechselung in die Beweise zu bringen, wollen wir hier zwei Seiten des Dreiecks zu Coordinaten-Axen nehmen; die dritte Seite ist alsdann durch die Gleichung:

$$py + qx = 2pq$$

gegeben, wenn wir die Stücke, welche dieselbe auf den Axen bestimmt, durch 2q und 2p bezeichnen. Die Coordinaten der Mitte dieser dritten Seite sind alsdann q und p, und die Gleichung des in diesem Puncte errichteten Perpendikels ist:

$$y - q = \frac{q\cos\beta - p}{p\cos\beta - q}(x - p),^{*})$$

wo wir, wie gewöhnlich, den Coordinaten-Winkel durch β bezeichnen. Wenn wir entwickeln, so kommt:

$$q(y - q + x\cos\beta) - p(x - p + y\cos\beta) = 0. \qquad (1)$$

Uebereinstimmung der Gleichung (5) mit der letzten Gleichung der 30. Nummer. Hiernach ergibt sich dann auch ferner, nach Nummer 51, dafs jede gerade Linie von OX, Oσ, OY und OS harmonisch geschnitten wird.

*) Setzt man nemlich in die Gleichung (2) der 17. Nummer $a' = -\frac{q}{p}$, so kommt:

$$a = \frac{q\cos\beta - p}{p\cos\beta - q}.$$

Wir haben ferner für die beiden in den Mitten der beiden ersten Seiten errichteten Perpendikel:

$$y - q + x\cos\beta = 0, \qquad 20\ (9)$$
$$x - q + y\cos\beta = 0. \qquad 20\ (5)$$

Nehmen wir den Unterschied dieser beiden letzten Gleichungen, nachdem wir die erste derselben mit q, die zweite mit p multiplicirt haben, so erhalten wir eine Gleichung, die identisch ist mit (1). Es schneiden sich also die bezüglichen Geraden in demselben Puncte.

Einen bemerkenswerthen Beweis desselben Satzes werden wir in dem folgenden Abschnitte, welcher der Theorie des Kreises bestimmt ist, finden.

Fig. 21. 67. Seyen OY und OX zwei sich unter einem beliebigen Winkel schneidende gerade Linien, die wir als Coordinaten-Axen nehmen, und PQ und $P_n Q_n$ irgend zwei Parallele, alsdann ist, wenn wir $OQ = q$, $OP = p$ setzen:

$$OQ_n = nq, \quad OP_n = np,$$

wo n irgend einen beliebigen Coefficienten bezeichnet, für den wir eine negative Gröfse nehmen müssen, wenn, wie in dem Falle der Figur, die zwei Parallelen zu beiden Seiten des Anfangs-Punctes liegen. Ferner sind die Gleichungen zweier beliebiger Geraden, von denen die eine durch Q_n, die andere durch P_n geht, folgende:

$$\begin{aligned} y - nq + ax &= 0, \\ y + a'(x - np) &= 0. \end{aligned} \qquad (1)$$

Multipliciren wir die erste dieser Gleichungen mit a'p, die zweite mit q, und ziehen ab, so kommt

$$(a'p - q)y + a'(ap - q)x = 0: \qquad (2)$$

die Gleichung derjenigen geraden Linie, die durch den Durchschnitt der beiden ersten und durch den Anfangs-Punct der Coordinaten geht. Diese Gleichung ist unabhängig von n, und wir kommen also immer zu derselben Gleichung, wie wir auch die Gerade $P_n Q_n$ parallel mit sich selbst verrücken mögen, wenn wir nur a und a' auf dieselbe Weise bestimmen, d. h. die bezüglichen Geraden parallel nehmen. Wir können also auch durch Q und P zwei gerade Linien ziehen, die erste parallel mit $Q_n S_n$, die zweite mit $P_n S_n$; alsdann wird der Durchschnitt S dieser Linien in die gerade Linie (2) fallen. Es liegen also S und S_n in gerader Linie mit dem Anfangs-Puncte der Coordinaten. Hierin ist folgender Satz enthalten:

Wenn man um ein Parallel-Trapez irgend ein Parallelogramm beschreibt, so gehen die beiden Diagonalen des erstern und eine leicht zu bezeichnende Diagonale des letztern durch ein und denselben Punct.

Es ist zu bemerken, dafs wir den Begriff des Umschreibens ganz allgemein nehmen, und von einem Parallelogramm sagen, es sey um ein Trapez beschrieben, wenn die Win-
Fig. 21. Fig. 22. kel-Puncte des letztern auf den Seiten des erstern (Fig. 21.) oder auf den Verlängerungen derselben liegen (Fig. 22).

Es folgt unmittelbar aus dem Nächst-Vorhergehenden, dafs die vier Diagonalen zweier Parallelogramme, von denen das eine dem andern umschrieben ist, sich in einem und demselben Puncte kreuzen.

68. Eliminiren wir die Werthe der Coordinaten zwischen den beiden Gleichungen (1), so kommt:

$$x = \frac{n(a'p - q)}{a' - a}, \qquad y = -\frac{na'(ap - q)}{a' - a}.$$

Digitized by Google

Der Quotient dieser Ausdrücke ist unabhängig von n, worin ein anderer Beweis für die letzten Sätze liegt. Jeder dieser Ausdrücke ferner ändert sich in demselben Verhältnisse als n sich ändert, die Entfernungen verschiedener Durchschnitts-Puncte S_n vom Anfangs-Puncte der Coordinaten verhalten sich also wie die bezüglichen n.

Die Segmente der beiden Diagonalen obigen Parallel-Trapezes und der Diagonale des umschriebenen Parallelogrammes, welche durch den Durchschnitt derselben geht, stehen in demselben Verhältniss.

69. Um die Coordinaten des Punctes C zu bekommen, müssen wir die beiden Gleichungen von PQ_n und P_nQ: Fig. 21.

$$py + nqx = npq,$$
$$npy + qx = npq,$$

mit einander verbinden und erhalten auf diese Weise:

$$y = \frac{nq}{n+1}, \quad x = \frac{np}{n+1}.$$

Aus diesen Ausdrücken folgt:

$$y : nq = x : np = 1 : n+1,$$

woraus ferner sich ergibt:

$$y : nq - y = x : np - x = 1 : n,$$

und endlich mit Beziehung auf die Figur (wo die Werthe von y und x negativ sind):

$$CP : CQ_n = CQ : CP_n = 1 : n.$$

Wir können nun das eben Bewiesene auch in Beziehung auf das Dreieck CQ_nP_n aussagen. Setzen wir $n = -2$, und nehmen überdiefs an, Q_nS_n und mithin auch QS stehen senkrecht auf QQ_n, so wie P_nS_n und PS auf PP_n, so haben wir folgenden zuerst von Euler in den Petersburger Commentarien*) synthetisch bewiesenen Satz:

Die Durchschnitts-Puncte erstens der von den Winkel-Puncten irgend eines Dreiecks auf die gegenüberliegenden Seiten gefällten Perpendikel, zweitens der von jenen nach den Mitten von diesen gezogenen geraden Linien, und drittens der in diesen Mitten errichteten Perpendikel liegen in gerader Linie, und zwar liegt der zweite Punct zwischen den beiden andern, so dafs er vom ersten doppelt so weit absteht als vom dritten.

70. Um eine andere Art der Beweis-Führung noch anzuwenden, wollen wir folgenden Satz nehmen:

Wenn zwei Puncte Q und P gegeben sind, und wir legen durch jeden dieser Puncte drei beliebige, unbestimmt verlängerte, gerade Linien, die wir durch I, II, III und 1, 2, 3 bezeichnen wollen, so schneiden sich I und 2, II und 1 in zweien Puncten M' und $M_{''}$; ferner schneiden sich I und 3, III und 1 in M' und $M_{,}$, und endlich II und 3, III und 2 in M° und $M_{\circ}^{\circ}$. Ziehen wir nun die geraden Linien $M'M_{''}$, $M'M_{,}$, und $M_{\circ}M^{\circ}$: so vereinigen alle drei sich in demselben Puncte, in R. Fig. 23.

Um diesen Satz zu beweisen, legen wir die beiden Axen durch die beiden gegebenen Puncte Q und P, machen aber noch keine Bestimmung über den Anfangs-Punct, den wir also einstweilen beliebig annehmen. Legen wir nun die zweite Axe durch Q, so haben wir

*) Novi Comm. Petrop. T. XI.

Digitized by Google

für die Gleichungen der drei geraden Linien, die durch diesen Punct gehen, Gleichungen von folgender Form:

$$y - y' + ax = o \quad \text{für I},$$
$$y - y' + a'x = o \quad \text{„ II},$$
$$y - y' + a''x = o \quad \text{„ III};$$

und ebenso haben wir für die drei übrigen geraden Linien, welche durch den, auf der ersten Axe liegenden, Punct P gehen, Gleichungen, die unter folgender Gestalt erscheinen:

$$y + a(x - x') = o \quad \text{für 1},$$
$$y + a'(x - x') = o \quad \text{„ 2},$$
$$y + a''(x - x') = o \quad \text{„ 3}.$$

Wenn wir die Gleichungen für I und 2 verbinden, so gibt uns die Elimination von y und x die Coordinaten des Durchschnitts-Punctes M''. Für diese Coordinaten, die wir durch Y'' und X'' bezeichnen wollen, ergibt sich sogleich:

$$X'' = \frac{a'x' - y'}{a' - a}, \qquad Y'' = -\frac{a'(ax' - y')}{a' - a}.$$

Auf dieselbe Weise erhalten wir die Coordinaten des Punctes $M_{,,}$, die wir durch $Y_{,,}$ und $X_{,,}$ unterscheiden wollen, durch Verbindung der beiden Gleichungen für II und 1. Wir kommen aber auf der Stelle zum gewünschten Resultate, wenn wir in den Werthen für X'' und Y'' blofs a' mit a und a mit a' vertauschen, und finden auf diese Weise:

$$X_{,,} = \frac{ax' - y'}{a - a'}, \qquad Y_{,,} = -\frac{a(a'x' - y')}{a - a'}.$$

Wir haben ferner für die gerade Linie, welche durch M'' und $M_{,,}$ geht, folgende Gleichung:

$$(X'' - X_{,,})y - (Y'' - Y_{,,})x + Y''X_{,,} - Y_{,,}X'' = o.$$

und wenn wir die oben für X'', Y'', $X_{,,}$ und $Y_{,,}$ gefundenen Werthe in das von y und x unabhängige Glied der letzten Gleichung substituiren, und dieses Glied durch C'' bezeichnen, so finden wir nach einer einfachen Reduction:

$$C'' = -\frac{(a' - a)y'^2 - (a'a - aa')y'x' + aa'(a - a')x'^2}{(a' - a)(a - a')}.$$

Setzen wir endlich, ohne weiter zu entwickeln:

$$X'' - X_{,,} = A'', \qquad -(Y'' - Y_{,,}) = B'',$$

so erhalten wir für die Gleichung der geraden Linie $M''M_{,,}$:

$$A''y + B''x + C'' = o$$

Bilden wir auf dieselbe Weise die Gleichungen der beiden andern Linien, von denen die eine durch M' und $M_{,}$, die andere durch M° und M_{o} geht, so bekommen wir Gleichungen von derselben Form:

$$A'y + B'x + C' = o,$$
$$Ay + Bx + C = o,$$

deren Constante wir durch blofse Accent-Vertauschung erhalten. Für unsern Zweck brauchen wir blofs die Ausdrücke für C' und C zu kennen. Wir erhalten den erstern derselben C, wenn wir in dem Ausdrucke für C'' die einmal accentuirten Buchstaben zweimal accentuiren; wir erhalten C, wenn wir in dem Ausdrucke für C' die nicht accentuirten Buchstaben einmal accentuiren. Wir bekommen auf diese Weise:

$$C' = -\frac{(a'' - a)y'^2 - (a''a - aa'')y'x' + aa''(a - a'')x'^2}{(a'' - a)(a - a'')},$$

$$C = -\frac{(a'' - a')y'^2 - (a''a' - a'a'')y'x' + a'a''(a' - a'')x'^2}{(a'' - a)(a' - a'')}.$$

Da wir über den Anfangs-Punct der Coordinaten durchaus keine Bestimmung gemacht haben, so können wir nun annehmen, wir hätten ursprünglich unsere Rechnung in der Voraussetzung angelegt, dafs jener Punct sich im Durchschnitte der beiden geraden Linien $M''M_{,,}$ und $M'M_{,}$ befinde, dafs mithin $C'' = C' = 0$. Diefs gibt uns aber zwischen den Constanten der gegebenen sechs Geraden folgende beiden Bedingungs-Gleichungen:

$$(a' - a)y'^2 - (a'a - aa')y'x' + aa'(a - a')x'^2 = 0,$$
$$(a'' - a)y'^2 - (a''a - aa'')y'x' + aa''(a - a'')x'^2 = 0.$$

Multipliciren wir die erste dieser Gleichungen mit a'', die zweite mit a', und ziehen alsdann jene von dieser ab, so kommt:

$$a\{(a'' - a')y'^2 - (a''a' - a'a'')y'x' + a'a''(a' - a'')x'^2\} = 0.$$

Diese Gleichung zeigt, dafs auch C gleich Null ist; dafs also auch die dritte gerade Linie M^0M_0 durch den Anfangs-Punct der Coordinaten, d. h. durch den Durchschnitt der beiden ersten Geraden $M''M_{,,}$ und $M'M_{,}$ geht; — und eben diefs wollten wir beweisen.

71. Da wir nun aber die drei geraden Linien, welche durch jeden der beiden Puncte Q und P gehen, in beliebiger Ordnung nehmen können, so finden wir durch entsprechende Constructionen sechs verschiedene solcher Puncte, in welchen drei gerade Linien sich schneiden, von denen jede durch zwei der neun Puncte geht, die durch den Durchschnitt der drei erstern Geraden mit den drei letztern entstehen. Zur bequemern Bezeichnung stellen wir, wie oben schon geschehen, die drei Geraden, welche durch Q gehen, durch I, II, III; diejenigen, welche durch P gehen, durch 1, 2, 3 dar; den Durchschnitt von I und 1 bezeichnen wir durch (I, 1) den Durchschnitt von II und 2 durch (II, 2), und so fort; endlich die gerade Linie, welche durch (I, 1) und (II, 2) sich legen läfst, durch (I, 1)(II, 2), und dem entsprechend die übrigen in Rede stehenden Linien. Diefs vorausgesetzt, haben wir folgendes Schema: Es schneiden sich

(I, 2)(II, 1),	(I, 3)(III, 1),	(II, 3)(III, 2)	in	R,
(I, 2)(II, 3),	(I, 1)(III, 3),	(II, 1)(III, 2)	„	S,
(I, 1)(II, 2),	(I, 3)(III, 2),	(II, 3)(III, 1)	„	T,
(I, 1)(II, 3),	(I, 2)(III, 3),	(II, 2)(III, 1)	„	U,
(I, 3)(II, 1),	(I, 2)(III, 1),	(II, 2)(III, 3)	„	V,
(I, 3)(II, 2),	(I, 1)(III, 2),	(II, 1)(III, 3)	„	W.

Es ist zugleich ersichtlich, dafs, anstatt die beiden Puncte Q und P und die durch jeden dieser Puncte gezogenen drei geraden Linien als ursprünglich gegeben anzunehmen, wir ebenfalls von zweien beliebigen der sechs Constructions-Puncte R, S, T, U, V und W, und den in jedem derselben zusammenlaufenden drei geraden Linien hätten ausgehen können, und dafs alsdann die bisher als gegeben betrachteten Puncte Q und P sich in die Reihe der Constructions-Puncte gestellt hätten.

72. Wir können als in dem Vorigen bewiesen ansehen, dafs, wenn irgend zwei Fig. 24.
der in dem letzten Schema zusammengestellten Linien parallel sind, auch die dritte zu ihnen gehörige, mit ihnen parallel ist. Wollen wir aber diesen besondern Fall geradezu beweisen, so müssen wir den oben gegebenen Beweis, der hier nicht Statt finden kann, einigermafsen modificiren. Wir müssen nemlich beweisen, dafs wenn zwei der

drei geraden Linien, $M''M_{,,}$, $M'M_{,}$ und $M^{o}M_{o}$, für welche wir oben folgende Gleichungen gefunden haben:

$$A''x + B''y + C'' = 0,$$
$$A'x + B'y + C' = 0,$$
$$Ax + By + C = 0,$$

parallel sind, alle drei Linien parallel laufen; dafs also wenn die Gleichung:

$$\frac{A''}{B''} = \frac{A'}{B'}$$

Statt findet, daraus folgt:

$$\frac{A''}{B''} = \frac{A'}{B'} = \frac{A}{B}.$$

Da wir über die Coordinaten-Axen weiter keine Annahme gemacht haben, als dafs jede derselben durch einen gegebenen Punct gehe, so können wir hier wieder die Rechnung abkürzen, indem wir voraussetzen, eine der Axen sey mit $M''M_{,,}$ und $M'M_{,}$ parallel. Wenn wir die zweite Axe, unbekümmert um die Richtung der ersten, mit jenen Linien parallel nehmen, so ist:

$$A'' = 0, \quad A' = 0;$$

und diese Gleichungen müssen nach dem zu beweisenden Satze eine dritte Gleichung:

$$A = 0,$$

bedingen. Hiervon überzeugen wir uns leicht, denn wir haben,

$$A'' = X'' - X_{,,} = \frac{\alpha'x' - y'}{\alpha' - a} - \frac{\alpha x' - y'}{\alpha - a'},$$
$$= \frac{((\alpha' - \alpha) + (a' - a))\,y' - (\alpha' a' - \alpha a)x'}{(\alpha' - a)(\alpha - a')};$$

und da dieser Ausdruck verschwindet, ist:

$$((\alpha' - \alpha) + (a' - a))\,y' - (\alpha' a' - \alpha a)x' = 0.$$

Die Voraussetzung, dafs A' gleich Null ist, gibt folgende Bedingungs-Gleichung:

$$((\alpha'' - \alpha) + (a'' - a))\,y' - (\alpha'' a'' - \alpha a)x = 0,$$

die wir sogleich aus der letzten Gleichung erhalten, indem wir zweimal statt einmal accentuiren. Ziehen wir von der letzten Gleichung die vorhergehende ab, so kommt:

$$((\alpha'' - \alpha') + (a'' - a'))\,y' - (\alpha'' a'' - \alpha' a')x' = 0,$$

und diese Gleichung zeigt, dafs der Werth von A:

$$A = \frac{((\alpha'' - \alpha') + (a'' - a'))\,y' - (\alpha'' a'' - \alpha' a')x'}{(\alpha'' - a')(\alpha' - a'')},$$

den wir durch Accent-Vertauschung aus dem Werthe von A'' herleiten, bei obiger Voraussetzungen ebenfalls verschwindet.

73. Es ist leicht zu übersehen, dafs der allgemeine Satz auch dann noch Statt finden mufs, wenn anstatt dafs drei gegebene gerade Linien in P zusammenlaufen, diese Geraden parallel sind und von dreien andern geraden Linien geschnitten werden, die entweder von demselben Puncte, von Q ausgehen, oder auch wiederum parallel sind. Dieser letzte besondere Fall (und nur in Beziehung auf einen Durchschnitts-Punct) wurde in einem der ersten Bände der Annalen von Gergonne zum Beweise vorge-
Fig. 25. legt. Der erfolgte Beweis schliefst sich an die oben gebrauchte Beweis-Art an. Nehmen wir nemlich den Anfangs-Punct der Coordinaten beliebig, die Richtungen der Axen aber parallel mit den gegebenen parallelen Geraden, so erhalten wir für die

Digitized by Google

Linien, welche wir oben durch I, II, III und 1, 2, 3 bezeichnet haben, folgende Gleichungen:

$$x = c,\quad x = c',\quad x = c'';$$
$$y = b,\quad y = b',\quad y = b'';$$

mithin entspricht die Bezeichnung (b', c) und (b, c') den Puncten M'' und $M_{''}$. Die Gleichung der geraden Linie, welche durch diese beiden Puncte geht, ist:

$$(c - c')y + (b - b')x + (b'c' - bc) = 0.$$

Durch Accent-Vertauschung ergeben sich sogleich die Gleichungen für M'$M_{'}$ und M°$M_{°}$:

$$(c - c'')y + (b - b'')x + (b''c'' - bc) = 0,$$
$$(c' - c'')y + (b' - b'')x + (b''c'' - b'c') = 0.$$

Zwei der letzten drei Gleichungen bedingen die dritte, denn wir erhalten jede beliebige derselben, indem wir die beiden übrigen von einander abziehen. Es schneiden sich also die drei bezüglichen Geraden in demselben Puncte, in R.

Der Beweis ist so einfach, dafs wir nicht nöthig haben, wie am angeführten Orte geschieht, irgend eine Supposition über den Anfangs-Punct der Coordinaten zu machen.

Hier gibt es, wie im allgemeinen Satze, aufser R noch fünf Puncte, in denen drei gerade Linien sich vereinigen.

74. Wir können die in den letzten Nummern bewiesenen Sätze in folgender Aussage zusammenfassen:

Wenn drei gerade Linien, die entweder unter einander parallel sind, oder von demselben Puncte ausgehen, drei andern geraden Linien, die dieselbe Bedingung erfüllen, begegnen, so entstehen neun Durchschnitts-Puncte; verbinden wir je zwei derselben, die nicht auf einer der sechs gegebenen Geraden liegen, durch gerade Linien, so erhalten wir achtzehn soleher Linien, die sich zu drei in sechs verschiedenen Puncten vereinigen. Mehrere dieser Puncte können unendlich weit liegen, d. h. die bezüglichen Geraden können parallel seyn.

75. Wenn wir nur einen der sechs in Rede stehenden Puncte, in denen drei gerade Linien sich vereinigen, betrachten, so können wir den Satz in Beziehung auf ein Sechseck aussprechen, wo denn die Aussage desselben unter verschiedenen Modificationen erscheinen kann. So haben wir, um nur ein Beispiel zu geben, folgenden Satz:

Wenn, bei gehörigen Verlängerungen, eine Diagonale eines Scehsecks mit zweien Seiten desselben durch denselben Punct geht, oder mit ihnen parallel ist: und eine andere Diagonale mit zweien andern Seiten in gleicher Beziehung steht: so durchsetzen sich auch die dritte Diagonale und die beiden übrigen Seiten des Sechsecks in ein und demselben Puncte, oder sind alle drei parallel.

76. Der allgemeine Satz der 74. Nummer enthält noch die besondern Fälle, dafs die geraden Linien, welche durch Q gehen, denjenigen, welche durch P gehen, alle oder zum Theil parallel sind: Fälle auf die wir leicht in den frühern Entwicklungen hätten Rücksicht nehmen können. Wir kommen auf diese Weise zu einer Reihe von einzelnen Sätzen, bei denen zu verweilen unsere Absicht nicht ist. Nur ein Beispiel wollen wir anführen. Seyen QA, QB, QE die oben durch I, II, III bezeichneten geraden Linien, Fig. 26.
und PA, PB, PD die Linien 1, 2, 3, und sey QA mit PB und QB mit PA parallel; alsdann liegt von den drei in der ersten Reihe des Schemas der 71. Nummer zusammen-

Digitized by Google

gestellten geraden Linien, die erste unendlich weit entfernt und die beiden andern, (I, 3)(III, 1) und (II, 3)(III, 2), oder DC und TE, sind daher parallel. Also:

Wenn man durch jeden zweier gegenüberliegenden Winkel-Puncte eines Parallelogrammes eine gerade Linie in beliebiger Richtung zieht, so bestimmen die Durchschnitte dieser geraden Linien mit den Seiten des Parallelogrammes die Winkelpuncte eines Parallel-Trapezes.

77. Wir wollen als letztes Beispiel eine neue Gruppe von Sätzen betrachten. Wenn
Fig. 27. drei parallele gerade Linien AB, A'B' und A''B'' gegeben sind und auf jeder derselben zwei Puncte A und B, A' und B', A'' und B'' beliebig angenommen werden, so schneiden sich die geraden Linien AA' und BB', AA'' und BB'', A'A'' und B'B'' in dreien Puncten, welche in gerader Linie liegen. Dieser Satz ist in einem der ersten Bände der Annalen von Gergonne analytisch bewiesen. In der Anlage des Beweises wollen wir auf dieselbe Weise verfahren, wie dort geschehen ist. Wir legen nemlich die erste Axe parallel den gegebenen Linien, während wir über die zweite Axe keine Bestimmung machen. Dieser Annahme gemäfs ist die Coordinaten-Bezeichnung für die verschiedenen Puncte folgende:

$$A\begin{cases} x = a, \\ y = b; \end{cases} \qquad A'\begin{cases} x = a', \\ y = b'; \end{cases} \qquad A''\begin{cases} x = a'', \\ y = b''; \end{cases}$$

$$B\begin{cases} x = a + l, \\ y = b \quad ; \end{cases} \qquad B'\begin{cases} x = a' + l', \\ y = b \quad ; \end{cases} \qquad B''\begin{cases} x = a'' + l'', \\ y = b'' \quad . \end{cases}$$

Wir erhalten also für AA' und BB' folgende Gleichungen:

$$y - b = \frac{b-b'}{a-a'}(x-a),$$

$$y - b = \frac{b-b'}{(a-a')+(l-l')}(x-a-l).$$

Hieraus ergeben sich ferner folgende Werthe für die Coordinaten des Punctes S'', des Durchschnittes von AA' und BB', die wir durch y'' und x'' bezeichnen wollen:

$$x'' = \frac{al'-a'l}{l'-l}, \qquad y'' = \frac{bl'-b'l}{l'-l}.$$

Für die beiden andern in Rede stehenden Puncte S' und S gibt eine blofse Accent-Vertauschung sogleich:

$$x' = \frac{al''-a''l}{l''-l}, \qquad y'' = \frac{bl''-b''l}{l''-l};$$

$$x = \frac{a'l''-a''l'}{l''-l'}, \qquad y = \frac{b'l''-b''l'}{l''-l'}.$$

Wir können nun auf verschiedene Art beweisen, dafs die drei Puncte S'', S' und S in gerader Linie liegen. Entwickeln wir z. B. den Werth für $\frac{y''-y'}{x''-x}$, so finden wir für denselben:

$$\frac{b''l'-b'l''-b''l+bl''+b'l-bl'}{a''l'-a'l''-a''l+al''+a'l-al'},$$

und da dieser Ausdruck in Beziehung auf die gleichnamigen, verschieden accentuirten Buchstaben symmetrisch ist (d. h. derselbe bleibt, wenn wir z. B. alle einmal accentuirten Buchstaben mit den nicht accentuirten; und, umgekehrt, diese mit jenen vertauschen), so folgt unmittelbar:

$$\frac{y''-y'}{x''-x'} = \frac{y''-y}{x''-x} = \frac{y'-y}{x'-x};$$

mithin liegen die obigen drei Puncte in gerader Linie.

78. Dasselbe Resultat können wir aber auch unmittelbar in der Form der Ausdrücke für die Coordinaten dieser Puncte lesen. Wenn wir nemlich die zweite Axe, über welche durchaus keine Bestimmung getroffen ist, parallel nehmen derjenigen geraden Linie, welche durch die beiden Puncte (y'', x'') und (y', x') geht, so ist

$$x'' = x'. \qquad (1)$$

In dem besondern Falle, wo die zuletzt bezeichnete Gerade der gegebenen parallel ist, kann jene Bestimmung über die zweite Axe nicht Statt finden, alsdann ist aber, welche Richtung diese Axe auch haben mag, immer:

$$y'' = y'. \qquad (2)$$

Nun bedingt aber die Gleichung (1):

$$x'' = x' = x;$$

und die Gleichung (2) bringt mit sich:

$$y'' = y' = y,$$

so dafs also immer die drei Puncte S'', S', und S in gerader Linie liegen. Um das eben Ausgesprochene auf der Stelle einzusehen, dienen folgende Bemerkungen. Da die Form der Werthe für die Ordinaten und Abscissen durchaus dieselbe ist, so liegt in der Beweis-Führung des einen Theiles zugleich diejenige des andern. Wir wollen den letzten Fall nehmen. Betrachten wir nur für einen Augenblick (h, l), (h', l'), (h'', l'') als die Coordinaten dreier Puncte, so bemerken wir sogleich, dafs

$$y'' = \frac{hl' - h'l}{l' - l}$$

die Ordinate des Durchschnittes der zweiten Axe mit einer geraden Linie, die durch den ersten und zweiten obiger drei Puncte geht, bezeichnet. Ebenso bezeichnen y' und y die Ordinaten des Durchschnittes der zweiten Axe und zweier gerader Linien, von denen die eine durch den ersten und dritten, die andern durch den zweiten und dritten obiger Puncte geht. Setzen wir nur $y'' = y'$, so ergibt sich unmittelbar, dafs alle drei Puncte auf einer geraden Linie liegen, die von der zweiten Axe ein Segment:

$$y'' = y' = y$$

abschneidet. Auf diese Weise haben wir alle Elimination erspart.

79. Abstrahiren wir davon, (wie a. a. O. geschieht) dafs die gerade Linie, welche durch die Puncte S'' und S' geht, den gegebenen parallel seyn kann, so können wir die Elimination abkürzen, indem wir die zweite Axe selbst durch jene Puncte legen. Alsdann ist $x'' = x' = 0$ und es kommt:

$$\frac{a}{\Gamma} = \frac{a}{\Gamma'}, \quad \frac{a''}{\Gamma''} = \frac{a}{\Gamma'},$$

mithin ist auch:

$$\frac{a''}{\Gamma''} = \frac{a'}{\Gamma'},$$

woraus denn folgt, dafs auch x verschwindet.

80. Indem wir nach einander die beiden Puncte auf jeder der drei gegebenen geraden Linien, AB, A'B' und A''B'' unter einander vertauschen, gibt uns eine ähnliche Construction wie früher noch dreimal drei Puncte, die in gerader Linie liegen nemlich S'', σ und σ'; S', σ und σ''; S, σ' und σ''. Fig. 27.

81. Der in der 77. Nummer für y'' gefundene Werth ist unabhängig von a und a', so wie der Werth für x'' unabhängig ist von b und b'. Diese Resultate sind leicht geo-

metrisch zu denten. Das letzte derselben ist als besonderer Fall eines Satzes anzusehen, den wir nun zunächst entwickeln wollen.

82. Es seyen OAB und OA'B' zwei beliebige sich in O schneidende gerade Linien, deren Durchschnitt wir zum Anfangs-Puncte der Coordinaten nehmen; den Axen geben wir eine beliebige Richtung. Die Gleichungen der beiden Geraden sind bei diesen Voraussetzungen von folgender Form:

$$y = tx, \qquad y = t'x.$$

Nehmen wir daher auf jeder derselben zwei Puncte beliebig an, auf der einen A und B, auf der andern A' und B', so können wir die Coordinaten dieser vier Puncte auf folgende Weise bezeichnen:

$$A\begin{cases} x = a \\ y = ta, \end{cases} \qquad A'\begin{cases} x = a' \\ y = t'a', \end{cases}$$

$$B\begin{cases} x = \alpha \\ y = t\alpha, \end{cases} \qquad B'\begin{cases} x = \alpha' \\ y = t'\alpha' \end{cases}$$

Fig. 28. Die Gleichungen zweier gerader Linien, von welchen die eine durch A und A', die andern durch B und B', geht, sind hiernach folgende:

$$y - ta = \frac{t'a' - ta}{a' - a}(x - a),$$

$$y - t\alpha = \frac{t\alpha' - t\alpha}{\alpha' - \alpha}(x - \alpha).$$

Ziehen wir, um y zu eliminiren, diese beiden Gleichungen von einander ab, so kommt nach einigen Reductionen:

$$x = \frac{a\alpha'(\alpha' - \alpha) - \alpha\alpha'(a' - a)}{a\alpha' - a'\alpha}.$$

Dieser Ausdruck für die Abscisse des Durchschnittes der beiden geraden Linien AA' und BB' ist unabhängig von t und t'. Wenn wir daher jede der beiden gegeben Geraden um den gemeinsamen Durchschnitt beliebig drehen, und dabei die Puncte A, B, A' und B' auf den bezüglichen Linien sich so verrücken lassen, dafs ihre Abscissen sich nicht ändern, so bleibt auch der Werth von x derselbe. Wir bestimmen aber gleiche Abscissen durch gerade Linien, die der zweiten Axe parallel sind, die also für unsern Fall, da wir keine Bestimmung über die Richtung der Axen gemacht haben, eine durchaus beliebige Richtung haben. Also:

Wenn vier Parallel-Linien gegeben sind, und man zieht durch irgend einen festen Punct in beliebiger Richtung verschiedene Paare gerader Linien, und verbindet die Puncte, in welchen eine Linie jedes Paares zwei jener Parallelen schneidet, mit den Puncten, welche die andere auf den beiden übrigen bestimmt, durch zwei gerade Linien (was auf doppelte Weise geschehen kann): so ist der geometrische Ort für die Durchschnitte derselben eine fünfte und sechste Parallele.

In der 28 Figur ist blofs auf die Drehung der zweiten Geraden um den festen Punct O Rücksicht genommen, die beiden Lagen dieser Linie sind OT' und Ot'. SS und σσ sind die beiden Parallelen, welche alle die in Rede stehenden Durchschnitte enthalten.

83. Bei den eben gemachten Beschränkungen erhalten wir durch Umkehrung folgenden Satz:

Digitized by Google

Wenn irgend drei parallele gerade Linien gegeben sind (Aa', Bb' und SS) und man zieht von einem Puncte (S) der letztern zwei gerade Linien nach zweien festen Puncten (A und B), so schneidet eine dieser Linien die erste, die andere die zweite Parallele so, dafs die gerade Linie, welche die beiden Durchschnitte (A und B', oder a' und b') verbindet, immer, wie wir auch S auf der Parallelen SS fortrücken lassen, durch einen constanten Punct O geht, der mit den beiden angenommenen, festen, Puncten (A, B) in gerader Linie liegt.

84. Wir wollen zu den beiden geraden Linien OAB und OA'B', die wir in der 82. Nummer betrachtet haben, noch eine dritte OA''B'' hinzufügen, die durch den Durchschnitt der beiden ersten geht. Ihre Gleichung sey: Fig. 29.

$$y = t''x.$$

Auf dieser Linie bestimmen wir irgendwo zwei Puncte A'' und B'', die wir, dem Frühern analog, folgendermaafsen bezeichnen:

$$A''\begin{cases} x = a'' \\ y = t''a'', \end{cases} \qquad B''\begin{cases} x = \alpha'' \\ y = t''\alpha''. \end{cases}$$

Ziehen wir nun, ähnlich wie wir es in der 77. Nummer gethan haben, AA' und BB', AA'' und BB'', A'A'' und B'B'', welche sich in S'', S' und S schneiden, so liegen diese drei Durchschnitte in gerader Linie.

Den Beweis dieses Satzes können wir folgendermaafsen angreifen. Wir haben oben für die Abscisse des Punctes S'', die wir nun durch x'' unterscheiden wollen, folgenden Ausdruck gefunden:

$$x'' = \frac{aa'(\alpha'-\alpha) - \alpha\alpha'(a'-a)}{aa' - \alpha\alpha'},$$

und durch Accent-Vertauschung erhalten wir:

$$x' = \frac{aa''(\alpha''-\alpha) - \alpha\alpha''(a''-a)}{aa'' - \alpha\alpha''},$$

$$x = \frac{a'a''(\alpha''-\alpha') - \alpha'\alpha''(a''-a')}{a'a'' - \alpha'\alpha''},$$

für die Abscissen der Puncte S' und S. Wenn wir nun die Richtung der zweiten Axe mit derjenigen geraden Linie, die durch die beiden Puncte S'' und S' geht, parallel nehmen, so ist

$$x'' = x',$$

und wir brauchen blofs zu zeigen, dafs bei dieser Voraussetzung:

$$x'' = x' = x.$$

Zu diesem Ende wollen wir die Bedingungs-Gleichung suchen, dafs x'' gleich werde x'. Bringen wir den Werth von x''—x' auf gemeinschaftlichen Nenner, setzen den Zähler des so erhaltenen Ausdrucks gleich Null, reduciren und dividiren alsdann durch (a—α), so kommt:

$$aa'(a''\alpha - \alpha''\alpha') - aa''(a'\alpha - \alpha'\alpha'') + a'a''(a\alpha' - a\alpha'') = 0 \qquad (1)$$

Da diese Gleichung in Beziehung auf die verschieden accentuirten Buchstaben symmetrisch ist: so folgt unmittelbar:

$$x'' = x' = x,$$

d. h. die entsprechenden Puncte: S'', S' und S liegen in gerader Linie.

85. An die Stelle des eben gegebenen Beweises, können wir eine leichte Construction setzen, worauf uns die vorhergehenden Nummern hinführen. Wir nehmen die zweite

Digitized by Google

Axe, wie vorher, der geraden Linie, die durch S'' und S' geht, parallel, bestimmen ferner auf AA' einen Punct α'', der mit A'', und auf BB'' einen Punct β'', der mit B'' dieselbe Abscisse hat. Alsdann geht (83) $\alpha''\beta''$ durch O. Ferner schneiden sich (82) die Linien A'A'' und B'B'' in einem Puncte S, der mit dem Durchschnitte von Aα'' und Bβ'', der kein anderer ist als der Punct S'', dieselbe Abscisse hat. Es liegen also S'' S' und S in gerader Linie.

86. Für dieselben sechs Puncte können wir, indem wir nach einander die beiden Puncte auf jeder der in O sich schneidenden geraden Linien in umgekehrter Ordnung nehmen, noch dreimal drei Puncte construiren, die in gerader Linie liegen (80). Der allgemeine Satz ist demnach folgender:

Wenn sechs Puncte gegeben sind, die, paarweise genommen, auf drei geraden Linien liegen, welche entweder in demselben Puncte sich durchsetzen oder parallel sind, und wir verbinden die Puncte, welche auf je zwei dieser Geraden liegen, durch zwei neue gerade Linien mit einander (was auf doppelte Weise geschehen kann): so erhalten wir sechs Durchschnitte, von denen wir viermal drei zusammennehmen können, die in gerader Linie liegen.

87. Denselben Satz können wir auch in folgende Aussage einkleiden:

Fig. 30. *Wenn sich die drei Diagonalen eines Sechsecks in demselben Puncte schneiden, so liegen die beiden Durchschnitte zweier an einander stofsender Seiten mit den bezüglich gegenüberliegenden Seiten und der Durchschnitt derjenigen Geraden, welche die äufsersten Puncte jedes der beiden Paare an einander stofsender Seiten verbindet, in ein und derselben geraden Linie. (Fig. 30.) Wenn wir ferner je zwei Winkel-Puncte des Sechsecks, zwischen welchen jedesmal noch ein Winkel-Punct liegt, durch gerade Linien verbinden, so schneiden sich die gegenüberstehenden dieser sechs Linien in drei Puncten, die ebenfalls in gerader Linie liegen.*

Es ist offenbar, dafs dieser Satz auch in der Umkehrung wahr bleibt.

88. Wir hätten aus den letzten Entwicklungen noch andere Resultate ziehen können. Wenn wir z. B. die Gleichung (1) der 84. Nummer nehmen und in derselben die Buchstaben α, α', α'' mit p, p', p'' und a, a', a'' mit q, q', q'' vertauschen, so erhalten wir die Gleichung (5) der 57. Nummer, welche anzeigt, dafs diejenigen drei geraden Linien, die auf einer der Coordinaten-Axen die Segmente p, p', p'', auf der andern die Segmente q, q', q'' abschneiden, durch ein und denselben Punct gehen. Hierdurch sind also Constructionen von drei, in demselben Puncte sich schneidenden, geraden Linien gegeben: Constructionen, die sich durch eine bequeme Axen-Annahme und durch sonstige Bestimmungen noch vereinfachen lassen.

Fast jede symmetrisch angelegte analytische Rechnung wird uns, wenn wir auf die Form der verschiedenen Gleichungen, durch welche wir schrittweise vorwärts gehen, aufmerksam sind, zu neuen Folgerungen führen. Was diejenigen Sätze insbesondere betrifft, die sich auf den Durchschnitt dreier gerader Linien in demselben Puncte beziehen, so erscheinen dieselben meistens erst in ihrer natürlichen Verbindung, wenn wir sie auf solche zurückführen, welche darauf sich beziehen, dafs beliebig viele gewissen geometrischen Bedingungen Genüge leistende, gerade Linien durch ein und denselben Punct gehen. Eben so lassen sich Sätze über drei, in gerader Linie liegen-

Digitized by Google

de Puncte auf Sätze über lineare Oerter zurückführen, und nur indem wir diese discutiren, scheinen wir eine gewisse Vollständigkeit, mit der immer die gröfste Leichtigkeit verbunden ist, erreichen zu können. Hier mag die Construction der Gleichung:

$$A + A' + A'' = 0$$

in einer der frühern Nummer als Beleg dienen.

89. Die vorstehenden Entwicklungen knüpfen sich alle an Gleichungen an, die rücksichtlich der veränderlichen Gröfsen nur vom ersten Grade sind. Wenn wir Verbindungen von geraden Linien zu betrachten haben, so ist es jedoch öfters von Vortheil, ein System mehrerer gerader Linien durch eine einzige Gleichung von höherm Grade darzustellen, statt jede besondere gerade Linie durch eine besondere Gleichung vom ersten Grade zu bezeichnen.

Um zwei gerade Linien durch eine einzige Gleichung auszudrücken, brauchen wir blofs die lineare Gleichung jeder derselben auf Null zu bringen und dann die beiden Gleichungen mit einander zu multipliciren. Die Gleichung:

$$(y + ax + b)(y + \alpha x + \beta) = 0 \qquad (1)$$

bezeichnet das System zweier gerader Linien, die, einzeln genommen, durch die beiden Gleichungen:

$$\begin{aligned} y + ax + b &= 0, \\ y + \alpha x + \beta &= 0, \end{aligned} \qquad (2)$$

gegeben sind, denn jede dieser letztern Gleichungen gibt eine Beziehung zwischen y und x, welche auch der Gleichung (1) Genüge thut, und dieser Gleichung geschieht auch nur in dem Falle Genüge, wenn einer der beiden Factoren ihres ersten Theiles verschwindet d. h. wenn eine der beiden Gleichungen (2) besteht. Die Gleichung (1) bestimmt also, wenn wir y und x alle möglichen Werthe beilegen, solche Puncte und nur solche Puncte, die auf einer der beiden durch (2) dargestellten geraden Linien liegen, sie ist die Gleichung des Systems dieser Linien. Die Gleichung (1) dürfen wir also durchaus nicht mit einer der beiden Gleichungen (2) als identisch nehmen. Dieselbe Bemerkung gilt auch dann noch, wenn die Gleichung einer dieser Linien sich auf

$$y = 0 \quad \text{oder} \quad x = 0$$

reducirt. Es bezeichnet folgende Gleichung z. B.:

$$y(y + \alpha x + \beta) = 0,$$

ein System zweier gerader Linien, von denen die eine mit der ersten Axe zusammenfällt, und wenn wir den Factor y fortlassen wollten, würden wir keine Rücksicht nehmen auf alle Puncte dieser letzten Linie. Auf entsprechende Weise ist:

$$xy = 0 \qquad (3)$$

die Gleichung des Systems der beiden Coordinaten-Axen. Dafs hierin mehr als eine blofse Bezeichnung liegt, werden wir an manigfachen Beispielen des dritten Abschnittes sehen, denn so wie wir die Gleichung (1) mit andern Gleichungen verbinden können, eben so gut können wir auch die letzte Gleichung (3) in die Rechnung einführen.

Die Gleichungen zweier gerader Linien, die beide durch einen festen Punct (y', x') gehen, haben folgende Formen:

$$\begin{aligned} (y - y') + a(x - x') &= 0, \\ (y - y') + \alpha(x - x') &= 0; \end{aligned}$$

und hiernach stellt folgende Gleichung:

$$(y - y')^2 + (a + \alpha)(y' - y')(x - x') + a\alpha(x - x')^2 = 0, \qquad (4)$$

ein System zweier, sich im Puncte (y', x') schneidender, gerader Linien dar.

Aus den letzten Erörterungen ist klar, dafs wir im Allgemeinen ein System von n geraden Linien durch eine einzige Gleichung vom n. Grade darstellen können.

90. *Verwandlung der Coordinaten.*

Wenn wir die Coordinaten irgend eines Punctes für ein beliebiges geradliniges Coordinaten-System kennen, so können wir die, auf ein anderes System sich beziehenden, Coordinaten desselben Punctes vermittelst der ursprünglichen Coordinaten und derjenigen constanten Gröfsen ausdrücken, durch welche die Lage des zweiten Systems, rücksichtlich des erstern, bestimmt wird. Wenn wir daher in der Gleichung eines geometrischen Ortes auf die veränderlichen Gröfsen die eben bezeichneten Verwandlungs-Formeln anwenden, so erhalten wir die Gleichung desselben Ortes für das andere System. Da nun die gerade Linie immer durch eine lineare Gleichung dargestellt wird, so ist offenbar, dafs auch die gegenseitige Beziehung der Coordinaten desselben Punctes in zwei verschiedenen Systemen nothwendig eine lineare ist. Bezeichnen wir daher durch y, x die Coordinaten des ersten, durch y, x die Coordinaten des zweiten Systems, so ist die allgemeine Form der Ausdrücke, durch welche y und x in y und x gegeben sind, folgende:

$$\begin{aligned} y &= y' + my + nx, \\ x &= x' + py + qx; \end{aligned} \qquad (1)$$

wo y', x' und m, n, p, q noch zu bestimmende Constanten sind, die sich auf die gegenseitige Lage der beiden Coordinaten-Systeme beziehen.

Zuerst ist leicht ersichtlich, dafs die beiden Gleichungen (1) in folgende übergehen:

$$\begin{aligned} y &= y' + y, \\ y &= x' + x, \end{aligned}$$

wenn wir die Axen parallel, mit sich selbst verrücken, und durch y' und x' die, auf das erste System sich beziehenden, Coordinaten des neuen Anfangs-Punctes bezeichnen. Denn da offenbar für das zweite System (— y') und (— x') die Coordinaten des ursprünglichen Anfangs-Punctes sind, so müssen die Gleichungen (1), indem wir y und x verschwinden lassen:

$$\begin{aligned} o &= y' + my + nx, \\ o &= x' + py + qx, \end{aligned}$$

identisch seyn mit den Gleichungen:

$$\begin{aligned} o &= y' + y, \\ o &= x' + x; \end{aligned}$$

und hiernach erhalten wir:

$$m = 1, \quad n = o, \quad p = o, \quad q = o.$$

Wenn wir den Anfangs-Punct der Coordinaten beibehalten, so reduciren sich die Gleichungen (1) auf folgende:

$$\begin{aligned} y &= my + nx, \\ x &= py + qx; \end{aligned} \qquad (2)$$

was auch schon sogleich daraus folgt, dafs y sowol als x verschwinden mufs, wenn wir zur Bestimmung des Anfangs-Punctes zugleich $y = o$ und $x = o$ setzen. Die Constanten m, n, p und q beziehen sich auf die Veränderung der Axen-Richtung. Um die Richtung der neuen Axen zu bezeichnen, wollen wir diejenigen Winkel, welche die erste und zweite neue Axe mit der ersten ursprünglichen Axe bilden φ und φ', diejenigen Winkel, welche dieselben Axen mit der zweiten ursprünglichen bilden, ψ und ψ' nennen,

wobei wir alle Winkel von den ursprünglichen Axen an nach der, ein für alle Mal angenommenen, Richtung bestimmen. Hiernach ist der Coordinaten-Winkel des ersten Systems, den wir durch ϑ bezeichnen:

$$\varphi - \psi = \varphi' - \psi' = \vartheta,$$

und der Coordinaten-Winkel des zweiten Systems, den wir durch ξ bezeichnen:

$$\varphi' - \varphi = \psi' - \psi = \xi.$$

Wenn wir in den Gleichungen (2) $x = 0$ setzen, so erhalten wir für Puncte, die auf der zweiten neuen Axe liegen:

$$y = my,$$
$$x = py;$$

und wenn wir $y = 0$ setzen für Puncte, die auf der ersten neuen Axe liegen:

$$y = nx,$$
$$x = qx.$$

Nehmen wir nun auf jeder dieser beiden Axen irgend einen beliebigen Punct, so gibt eine leichte Construction:

$$m = \frac{y}{y} = \frac{\sin\varphi'}{\sin\vartheta}, \qquad n = \frac{y}{x} = \frac{\sin\varphi}{\sin\vartheta},$$

$$p = \frac{x}{y} = -\frac{\sin\psi'}{\sin\vartheta}, \qquad q = \frac{x}{x} = -\frac{\sin\psi}{\sin\vartheta}.$$

und hiernach gehen die Gleichungen (2) in folgende über:

$$y = \frac{y\sin\varphi' + x\sin\varphi}{\sin\vartheta},$$
$$x = -\frac{y\sin\psi' + x\sin\psi}{\sin\vartheta}. \qquad (3)$$

Wenn das Coordinaten-System, zu dem wir übergehen, ein rechtwinkliges ist, so haben wir $\varphi' = (\varphi + \frac{\pi}{2})$ und $\psi' = (\psi + \frac{\pi}{2})$, mithin:

$$\sin\varphi = \cos\varphi, \qquad \sin\psi' = \cos\psi,$$

wonach die Gleichungen (3) folgende Formen annehmen:

$$y = \frac{y\cos\varphi + x\sin\varphi}{\sin\vartheta},$$
$$x = -\frac{y\cos\psi + x\sin\psi}{\sin\vartheta}. \qquad (4)$$

Wenn das ursprüngliche Coordinaten-System ein rechtwinkliges ist, so haben wir $\vartheta = \frac{\pi}{2}$, $\varphi = (\psi + \frac{\pi}{2})$ $\varphi' = (\psi' + \frac{\pi}{2})$, mithin:

$$\sin\vartheta = 1, \qquad \sin\psi = -\cos\varphi, \qquad \sin\psi' = -\cos\varphi',$$

wonach wir aus (3) folgende Gleichungen erhalten:

$$y = y\sin\varphi' + x\sin\varphi,$$
$$y = y\cos\varphi' + x\cos\varphi. \qquad (5)$$

Wenn wir endlich von einem rechtwinkligen System zu einem neuen rechtwinkligen System übergehen, so verwandeln sich die letzten Gleichungen (5), weil alsdann:

$$\sin\varphi' = \cos\varphi, \qquad \cos\varphi' = -\sin\varphi,$$

Digitized by Google

in folgende:

$$\begin{aligned} y &= \quad y\cos\varphi + x\sin\varphi, \\ x &= -y\sin\varphi + x\cos\varphi. \end{aligned} \tag{6}$$

Bei der vorstehenden, bekannten, Entwicklungs-Weise der Verwandlungs-Formeln, kommt alles auf die Form der beiden Gleichungen (1) an. Wollen wir diese Form nicht geradezu annehmen, so können wir auch auf folgende Art verfahren. Wir nehmen nemlich für das ursprüngliche System zunächst ein rechtwinkliges und gehen, mit Beibehaltung des Anfangs-Punctes, zu einem, aufserdem beliebigen, zweiten Systeme über. Alsdann erhalten wir, der obigen Winkel-Bezeichnung gemäfs, für die Gleichung einer geraden Linie, die mit der ersten ursprünglichen Axe irgend einen Winkel ε, also mit der ersten Axe des zweiten Systems, dessen Coordinaten-Winkel $(\varphi'-\varphi)$ ist, einen Winkel $(\varepsilon-\varphi)$ bildet, folgende beiden Gleichungen:

$$\frac{Y}{X} = tang\ \varepsilon$$

$$\frac{y}{x} = \frac{\sin(\varepsilon-\varphi)}{\sin(\varphi'-\varepsilon)},$$

von denen die erste sich auf das ursprüngliche, die zweite sich auf dasjenige System bezieht, zu dem wir übergehen wollen. Entwickeln wir aus der zweiten Gleichung den Werth von *tang* ε und substituiren ihn in die erste, so kommt:

$$\frac{Y}{X} = \frac{y\sin\varphi' + x\sin\varphi}{y\cos\varphi' + x\sin\varphi}.$$

Wir haben also:

$$\begin{aligned} y &= \mu(y\sin\varphi' + x\sin\varphi), \\ y &= \mu(y\cos\varphi' + x\cos\varphi), \end{aligned} \tag{7}$$

indem wir in beiden Gleichungen durch μ denselben, noch zu bestimmenden Factor, bezeichnen, welcher, der linearen Beziehung der Coordinaten beider Systeme zu einander wegen, unabhängig von diesen Coordinaten seyn mufs. Dieser Factor ist also leicht zu bestimmen, und wir sehen sogleich, dafs er gleich Eins ist, denn für Puncte der ersten neuen Axe haben wir $y = y\ sin\ \varphi$, und wir müssen offenbar zu derselben Gleichung kommen, wenn wir in der ersten der Gleichungen (7): $y = 0$ setzen. Hiernach werden die Gleichungen (7) identisch mit den Gleichungen (5), und aus diesen können wir leicht die übrigen Verwandlungs-Formeln herleiten:

Digitized by Google

Zweiter Abschnitt.

Zur Theorie des Kreises.

91. Wenn wir durch R den Abstand irgend zweier Puncte (y'', x'') und (y', x') von einander bezeichnen, so haben wir:

$$(y''-y')^2+2(y''-y')(x''-x')\cos\beta+(x''-x')^2=R^2,$$

wo β jedes beliebige seyn kann und den Coordinaten-Winkel bedeutet. Betrachten wir einen dieser beiden Puncte, etwa (y', x'), als fest und lassen um diesen festen Punct sich den andern Punct (y'', x'') so bewegen, dafs der Abstand beider Puncte von einander immer derselbe bleibt, so beschreibt der zweite Punct einen Kreis. Dieſs heifst, buchstäblich in die Sprache der analytischen Geometrie übertragen: wenn wir die Coordinaten y'' und x'' als veränderliche Gröfsen betrachten (und deshalb die Accente fortlassen) so ist obige Gleichung:

$$(y-y')^2+2(y-y')(x-x')\cos\beta+(x-x')^2=R^2, \qquad (1)$$

die allgemeinste Gleichung eines Kreises, dessen Radius gleich R ist, und dessen Mittelpunct durch die Coordinaten y' und x' bestimmt wird. Nehmen wir den Mittelpunct des Kreises zum Anfangs-Puncte der Coordinaten, so ist:

$$y'=0, \quad x'=0,$$

und die Gleichung des Kreises wird folgende:

$$y^2+2yx\cos\beta+x^2=R^2 \qquad (2)$$

Ist $\beta=\frac{\pi}{2}$ mithin $\cos\beta=0$, so gehen die beiden Gleichungen (1) und (2) in folgende über:

$$(y-y')^2+(x-x')^2=R^2,$$
$$y^2+x^2=R^2.$$

In diesem Abschnitte werden wir uns vorzugsweise rechtwinkliger Coordinaten, mithin der beiden letzten Gleichungen bedienen; in dem folgenden Abschnitte aber umfassen wir die allgemeinste Gleichung des Kreises in der allgemeinen Gleichung des zweiten Grades.

92. Seyen:

$$(y-\beta)^2+(x-\alpha)^2=\rho^2, \qquad (1)$$
$$(y-b)^2+(x-a)^2=r^2, \qquad (2)$$

die Gleichungen zweier sich schneidender Kreise. Verbinden wir diese Gleichungen auf irgend eine beliebige Weise, so kommen wir zu der Gleichung eines geometrischen Ortes, der durch die Durchschnitts-Puncte der beiden Kreise geht. Wenn wir z. B. abziehen, kommt:

$$2(b-\beta)y+2(a-\alpha)x = \varrho^2-(\alpha^2+\beta^2) - r^2+(a^2+b^2). \quad (3)$$

Weil diese Gleichung nun eine Folge der beiden erstern Gleichungen ist, so bekommen wir dieselben Werthe für y und x, gleichviel ob wir diese Werthe zwischen den beiden Gleichungen (1) und (2), oder zwischen einer beliebigen derselben und der dritten Gleichung eliminiren. Zwischen zweien Gleichungen die veränderlichen Gröfsen eliminiren heifst aber die Coordinaten der Durchschnitts-Puncte der beiden durch jene Gleichungen dargestellten Oerter suchen. Wir müssen indefs hierbei aufmerksam seyn auf den Grad der verschiedenen Gleichungen;*) hier haben wir den Fall, dafs dieser sich reducirt, wir kommen zu einer Gleichung vom ersten Grade, mithin zu der Gleichung einer geraden Linie. Diese gerade Linie geht also durch die Durchschnitte der beiden Kreise, sie ist die gemeinschaftliche Chorde derselben. Hierin liegt zugleich der Beweis, dafs zwei Kreise sich in nicht mehr als zwei Puncten schneiden können.

Wenn die beiden gegebenen Kreise (1) und (2) einander berühren, so bezeichnet die dritte Gleichung die gemeinschaftliche Tangente derselben. Die Durchschnitte der Kreise vereinigen sich nemlich in einem einzigen Punct: wir finden durch Verbindung ihrer Glei-

---

*) Wenn wir zwei Gleichungen so verbinden, dafs der Grad der resultirenden Gleichung den Grad der gegebenen Gleichungen übersteigt, so erhalten wir zwar noch immer die Durchschnitts-Puncte der beiden gegebenen Oerter durch den Durchschnitt des dritten Ortes mit einem derselben, aber im Allgemeinen gibt diese Construction zugleich noch fremde Puncte. Nehmen wir z. B. die Gleichungen zweier gerader Linien:

$$\begin{aligned} y &= ax + b, \\ y &= \alpha x + \beta, \end{aligned} \quad (a)$$

quadriren beide Theile ihrer Gleichungen, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} y^2 &= (ax + b)^2, \\ y^2 &= (\alpha x + \beta)^2, \end{aligned} \quad (b)$$

und wenn wir addiren, so kommt:

$$2y^2 = (ax+b)^2+(\alpha x+\beta)^2. \quad (c)$$

Die Curve, welche durch diese Gleichung dargestellt wird, geht durch den Durchschnitt der geraden Linien, denn die Gleichung (c) wird befriedigt, wenn die beiden Gleichungen (a) zugleich Statt finden; sie schneidet aber im Allgemeinen jede der beiden geraden Linien noch in einem zweiten Puncte. Hiervon können wir uns sogleich durch Elimination der veränderlichen Gröfsen zwischen den bezüglichen Gleichungen überzeugen. Um die zweiten Durchschnitts-Puncte auf der Stelle näher zu bezeichnen, bemerken wir, dafs die Gleichungen (b) unter folgende Formen:

$$\begin{aligned} (y-(ax+b))(y+(ax+b)) &= 0, \\ (y-(\alpha x+\beta))(y+(\alpha x+\beta)) &= 0, \end{aligned}$$

gebracht werden können, und also jede das System zweier geraden Linien bezeichnet. Da nun die Gleichung (c) eine unmittelbare Folge der beiden letzten Gleichungen ist, so ist offenbar, dafs der durch (c) dargestellte geometrische Ort durch die Durchschnitts-Puncte des ersten Systems gerader Linien mit dem zweiten Systeme, also durch vier schon bestimmte Puncte geht.

Digitized by Google

chungen im Allgemeinen zwei gleiche Werthe für jede der gleichnamigen Coordinaten; und also finden wir dieselben gleichen Werthe, wenn wir die Gleichung (3) mit einer der Kreis-Gleichungen zusammenstellen. Daher berührt die durch (3) dargestellte gerade Linie beide Kreise, und zwar in dem gemeinschaftlichen Berührungs-Puncte.

Wenn die beiden gegebenen Kreise keinen Punct gemeinschaftlich haben, so können ihre Gleichungen, analytisch-geometrisch genommen, nicht zugleich Statt finden; durch Elimination kommen wir zu imaginären Werthen für y und x. Jede der beiden Gleichungen (1) und (2) für sich bezeichnet aber einen bestimmten Kreis und wenn wir dieselben algebraisch verbinden, so kommen wir zu neuen Gleichungen, die im Allgemeinen wieder reelle Linien bezeichnen. Wenn die Gleichungen dieser Linien wiederum vom zweiten Grade seyn sollen, so können wir nur zu neuen Kreis-Gleichungen kommen. Keiner dieser Kreise schneidet einen der beiden gegebenen, und ihre Gleichung kann, analytisch genommen, nicht zugleich mit einer der beiden Kreis-Gleichungen bestehen, d. h. durch Verbindung derselben würden wir zu imaginären Werthen von y und x kommen. Verbinden wir die Gleichungen der beiden gegebenen Kreise, wie wir es oben gethan haben, indem wir ihre Gleichungen von einander abziehen, so finden wir die Gleichung (3) einer immer construirbaren geraden Linie, und diese Gleichung steht in derselben algebraischen Beziehung zu den Gleichungen der sich nicht schneidenden Kreise, wie die Gleichung der gemeinschaftlichen Chorde oder Tangente zu den Gleichungen zweier sich schneidenden oder sich berührenden Kreise. Die in Rede stehende gerade Linie schneidet keinen der beiden gegebenen Kreise.

93. Wir werden in dem Folgenden die durch die Gleichung (3) dargestellte gerade Linie, die beiden Kreise (1) und (2) mögen sich schneiden, berühren oder keinen Punct gemein haben, (was von der Bestimmung der Constanten abhängt), allgemein mit dem Namen: „Chordale der beiden Kreise“ bezeichnen. Der Durchschnitt dieser geraden Linie mit derjenigen, welche die Mittelpuncte der Kreise verbindet, wollen wir den „Chordal-Punct der beiden Kreise“ nennen. *)

94. Wir wollen nun gleich schon die Gleichungen dreier gegebenen Kreise zusammenstellen:

$$(y-\beta)^2+(x-\alpha)^2=\rho^2,$$
$$(y-b)^2+(x-a)^2=r^2,$$
$$(y-B)^2+(x-A)^2=R^2,$$

und diese der Kürze halber durch:

$$A=0, \quad B=0, \quad C=0, \qquad (4)$$

bezeichnen. Ziehen wir diese Gleichungen, paarweise genommen, von einander ab, so kommt:

$$A-B=0, \quad A-C=0, \quad B-C=0, \qquad (5)$$

für die Gleichungen der Chordalen je zweier dieser Kreise. Zwei dieser Gleichungen bedingen die dritte, was uns eine blofse Subtraction zeigt. Es schneiden sich also die drei Chordalen in demselben Puncte.

---

*) Herr *Poncelet* hat die Linie, welche wir Chordale nennen, im Falle, dafs die beziglichen Kreise sich nicht schneiden, „*corde idéale*“ genannt; gebräuchlicher ist der von H. *Gaultier* eingeführte Ausdruck: „*axe radical*“. Unser Chordal-Punct zweier Kreise heifst: „*point radical de deux cercles*“

Es gibt für je drei beliebige Kreise einen solchen Punct, wir nennen ihn kurz: „Chordal-Punct der drei Kreise.“ *). Wir werden im Laufe dieses Abschnittes diesem Puncte eine besondere Aufmerksamkeit schenken.

Je nachdem wir drei Kreise zusammenstellen, die sich schneiden, berühren (gleichviel ob innerhalb oder aufserhalb) oder keinen Punct gemein haben, erhalten wir $\frac{3.4.5}{1.2.3} = 10$ verchiedene Fälle, bei deren Aufzählung wir hier nicht verweilen. Wenn — um einige Beispiele anzuführen — die drei gegebenen Kreise sich alle drei schneiden, so gehen die gemeinschaftlichen Chorden je zweier derselben durch ein und denselben Punct
Fig. 1. (Fig. 1); berühren sich die Kreise zu je zwei, so laufen die gemeinschaftlichen Tan-
Fig. 2. genten in demselben Puncte zusammen (Fig. 2); wenn zwei sich nicht schneidende Kreise und ein dritter Kreis, der einen derselben berührt und den andern schneidet, gegeben sind, so vereinigen sich die Chordale der beiden ersten Kreise, (die keinen derselben schneidet) und die dem dritten Kreise mit diesen gemeinsame Tangente und Chorde in
Fig. 3. demselben Puncte. (Fig. 3)

95. In der Gleichung jeder der drei Chordalen kommen nur die Constanten aus den Gleichungen derjenigen beiden Kreise vor, zu denen sie gehört. Nehmen wir z. B. die dritte der Gleichungen (5), so kommen in derselben weder der Radius noch die Mittelpuncts-Coordinaten des ersten der durch (4) bezeichneten Kreise vor, und diese Gleichung bleibt daher dieselbe, mit welchem Radius wir diesen Kreis beschreiben, und wo wir auch den Mittelpunct desselben annehmen mögen. Die Gleichungen der beiden andern Chordalen aber verändern sich, jedoch so dafs sie immer die dritte:

$$B - C = 0 \qquad (6)$$

bedingen. Sind also zwei Kreise gegeben, für deren Gleichungen wir folgende nehmen:

$$B = 0, \quad C = 0,$$

und stellen wir mit diesen beiden Kreisen irgend einen dritten Kreis zusammen, dessen Gleichung

$$A = 0$$

ist, so schneiden sich die Chordalen des letztern und jedes der erstern Kreise in einem Puncte, der, wie wir auch den dritten Kreis bestimmen mögen, immer auf der Chordalen (6) der beiden festen und unveränderlichen Kreise liegt.

Fig. 4. 96. Dieser Satz dient dazu, um auf die leichteste Art die Chordale zweier gegebener, sich nicht schneidender, Kreise zu bestimmen. Denn, beschreibt man irgend einen Kreis, der die beiden gegebenen Kreise (c und C) schneidet, so bestimmt der Durchschnitt der beiden gemeinschaftliche Chorden (mn und MN) einen Punct (S) der gesuchten Linie. Durch Wiederholung derselben Construction bestimmen wir einen zweiten Punct dieser Linie.

Auf dieselbe Weise bestimmt sich der Chordal-Punct dreier gegebener Kreise im Falle, dafs sich dieselben nicht schneiden. Die Construction wird am einfachsten, wenn man den beliebigen schneidenden Kreis beidesmal so wählt, dafs er alle drei gegebene Kreise schneidet. In der 4. Figur haben wir den Chordal-Punct der drei Kreise γ, c und C, wie durchgehends geschehen soll, durch P bezeichnet.

---

*) Im Französischen: „*point radical des trois cercles*“ oder blofs „*point radical*“.

Digitized by Google

97. Wenn wir die allgemeine Gleichung der Chordalen:

$$2(b-\beta)y+2(a-\alpha)x=\varrho^2-(\alpha^2+\beta^2)-r^2+(a^2+b^2),$$

mit der Gleichung der Central-Linie der hezüglichen beiden Kreise, für welche wir auf der Stelle folgende Gleichung finden:

$$(a-\alpha)y-(b-\beta)x=m,$$

wo m eine Constante bezeichnet, vergleichen, so ergibt sich, dafs die beiden in Rede stehenden geraden Linien auf einander senkrecht sind. Auch diesen Umstand können wir bei der Construction der Chordalen zweier sich nicht schneidender Kreise benutzen.

98. Seyen wie vorher: Fig. 5.

$$\begin{aligned}(y-\beta)^2+(x-\alpha)^2&=\varrho^2,\\(y-b)^2+(x-a)^2&=r^2,\end{aligned}\qquad (1)$$

wo wir jeden beliebigen Punct zum Anfangs-Puncte der Coordinaten nehmen können, die Gleichungen irgend zweier Kreise (y und c); wie früher erhalten wir alsdann:

$$2(b-\beta)y+2(a-\alpha)x=\varrho^2-(\alpha^2+\beta^2)-r^2+(a^2+b^2), \qquad (2)$$

für die Gleichung der Chordalen. Wenn wir nun irgend einen Punct derselben, O, als Anfangs-Punct der Coordinaten betrachten, so mufs die Form der letzten Gleichung folgende seyn:

$$2(b-\beta)y+2(a-\alpha)x=0,$$

und dieſs führt zu folgender Bedingungs-Gleichung:

$$\varrho^2-(\alpha^2+\beta^2)=r^2-(a^2+b^2). \qquad (3)$$

Um diese Gleichung geometrisch zu deuten, müssen wir zwei Fälle unterscheiden; es kann erstens der Punct der Chordalen, den wir zum Anfangs-Puncte genommen haben, ausserhalb beider Kreise liegen, und zweitens, wenn nemlich die beiden Kreise sich schneiden, innerhalb. Zuvörderst wollen wir den ersten Fall betrachten. Da die Tangente auf dem Radius, der durch den Berührungs-Punct geht, senkrecht steht, und $(\alpha^2+\beta^2)$ und (a^2+b^2) die Quadrate der Abstände der Mittelpuncte der beiden gegebenen Kreise vom Anfangs-Puncte der Coordinaten bedeuten, so folgt aus der Gleichung (2) mit Beziehung auf die 5. Figur:

$$O\mu' = Om'.$$

Ziehen wir also von einem Puncte, den wir beliebig auf der Chordalen zweier Kreise annehmen, Tangenten an diese Kreise, so sind diese Tangenten, bis zum Berührungs-Puncte genommen, einander gleich.

Im zweiten Falle, der dadurch angezeigt wird, dafs ϱ^2 und r^2 gröfser sind als $(\alpha^2+\beta^2)$ und (a^2+b^2) gibt die Construction der beiden Theile der Gleichung (3) die Quadrate derjenigen halben Chorden der beiden Kreise, welche in dem Puncte O senkrecht stehen, auf den durch eben diesen Punct gehenden Radien; oder mit andern Worten die Quadrate derjenigen halben Chorden beider Kreise, die in O halbirt werden. Und hieraus folgt denn mit Beziehung auf die 6. Figur: Fig. 6.

$$\mu\mu' = mm'.$$

Wenn also zwei Chorden zweier Kreise sich gegenseitig in einem Puncte der gemeinschaftlichen Chorde der beiden Kreise halbiren, so sind dieselben einander gleich.

99. An den ersten Fall der vorigen Nummer schliefst sich unmittelbar folgender Satz an:

Die Chordale zweier Kreise halbirt die gemeinschaftlichen Tangenten derselben, wenn überhaupt gemeinschaftliche Tangenten möglich sind.

Digitized by Google

100. Wenn wir zu obigen beiden Kreise noch einen dritten Kreis hinzufügen, für dessen Gleichung wir folgende nehmen:

$$(y-B)^2+(x-A)^2 = R^2,$$

so kommt für die Chordale dieses und des ersten der Kreise (1):

$$2(B-\beta)y+2(A-\alpha)x = \rho^2-(\alpha^2+\beta^2)-r^2+(a^2+b^2). \qquad (4)$$

Nehmen wir nun den Anfangs-Punct der Coordinaten in dem Durchschnitte von (2) und (4), also im Chordal-Puncte der drei gegebenen Kreise, so erhalten wir, ähnlich wie oben:

$$\rho^2-(\alpha^2+\beta^2) = r^2-(a^2+b^2) = R^2-(A^2+B^2);$$

Fig. 5. d. h., wenn wir den Fall der 5. Figur nehmen:

$$P\mu = Pm = PM.$$

Ziehen wir also vom Chordal-Puncte, im Falle dafs derselbe aufserhalb liegt, Tangenten an die drei Kreise, so sind diese Tangenten einander gleich.

Was den andern Fall betrifft, so hat man folgenden Satz:

Wenn man durch den Durchschnitt der gemeinschaftlichen Chorden dreier sich schneidenden Kreise, in jeden dieser Kreise eine neue Chorde legt, die auf dem, durch denselben Punct gehenden Radius desselben senkrecht steht, so sind die so bestimmten drei Chorden einander gleich.

101. Aus den vorigen beiden Nummern ergeben sich noch folgende Sätze:

Beschreibt man aus einem beliebigen Puncte der Chordalen zweier Kreise mit einem Radius, der gleich den, von diesem Puncte an die gegebenen Kreise gezogenen Tangenten ist, einen neuen Kreis, so schneidet derselbe die gegebenen unter rechten Winkeln; oder, der Ort der Mittelpuncte aller Kreise, die zwei gegebene unter rechten Winkeln schneiden, ist die Chordale derselben.

Sind drei Kreise gegeben, so existirt ein einziger Kreis, der alle drei unter rechten Winkeln schneidet, derjenige Kreis nemlich, der aus dem Chordal-Puncte, mit einem Radius der den aus diesem Puncte an die gegebenen Kreise gezogenen Tangenten gleich ist, beschrieben wird. Diesen Kreis können wir den Orthogonal-Kreis nennen. Es existirt kein solcher Kreis, wenn der Chordal-Punct innerhalb der gegebenen drei Kreise fällt.

102. Wie wir in dem Vorigen den Begriff der Chordalen zweier beliebiger Kreise aufgestellt haben, so können wir auch in demselben Sinne von der Chordalen eines Kreises und eines Punctes sprechen. Hierzu berechtigt uns nemlich die Verbindung der beiden Gleichungen:

$$(y-\beta)^2+(x-\alpha)^2 = \rho^2, \qquad (1)$$
$$(y-b)^2+(x-a)^2 = 0, \qquad (2)$$

wo wir durch die zweite Gleichung einen Punct bezeichnen, dessen Coordinaten b und a sind, denn nur wenn wir zugleich:

$$y = b, \quad x = a,$$

setzen, geschieht dieser Gleichung Genüge. Ziehen wir die beiden Gleichungen (1) und (2) von einander ab, ohne dabei weiter an den Durchschnitt der durch dieselben dargestellten Oerter zu denken, so kommt, ähnlich wie früher:

$$2(b-\beta)y+2(a-\alpha)x = \rho^2-(\alpha^2+\beta^2)+(a^2+b^2), \qquad (3)$$

die Gleichung einer immer construirbaren geraden Linie, die sich uns in Beziehung auf die Art, wie wir dieselbe erhalten haben, gewissermaafsen als eine gemeinschaftliche (ideale)

Digitized by Google

Chorde von Punct und Kreis darstellt, und die wir eben aus diesem Grunde die Chordale von Punct und Kreis genannt haben.

103. Wenn wir den gegebenen Punct zum Anfangs-Puncte der Coordinaten wählen und die erste Axe durch den Mittelpunct des Kreises legen, so ist:

$$b = o, \quad a = o, \quad \beta = o;$$

und die letzte Gleichung geht in folgende, leicht zu construirende, über:

$$2\alpha x = \alpha^2 - \rho^2 = (\alpha - \rho)(\alpha + \rho). \qquad (4)$$

Die Chordale von Punct und Kreis fällt immer aufserhalb des Kreises; diefs ist sogleich ersichtlich aus der letzten Gleichung, wenn wir dieselbe unter folgende Form bringen:

$$x = (\alpha - \rho)\frac{\alpha+\rho}{2\alpha};$$

denn, liegt der gegebene Punct aufserhalb, so ist α gröfser als ρ, mithin $\frac{\alpha+\rho}{2\alpha}$ gröfser als Eins und folglich:

$$x < \alpha - \rho,$$

Fig. 7.

also mit Beziehung auf die 7. Figur:

$$OP < OK.$$

Liegt hingegen der gegebene Punct innerhalb, so ist α kleiner als ρ, mithin $\frac{\alpha+\rho}{2\alpha}$ kleiner als Eins und folglich

$$-x > \rho - \alpha;$$

und wenn wir diesen Ausdruck auf die 8. Figur übertragen:

Fig. 8.

$$OP > OK.$$

Nehmen wir endlich den gegebenen Punct auf dem Umfange des Kreises an, setzen wir also $\alpha = \rho$, so geht die Gleichung (4) in folgende über:

$$x = o$$

also, wie zu erwarten stand, in die Gleichung der Tangente in dem gegebenen Puncte.

104. Nehmen wir den Anfangs-Punct der Coordinaten in irgend einem Puncte der Chordalen von Kreis und Punct an, so ergibt sich aus der Form der allgemeinen Gleichung dieser Linie (3):

$$\rho^2 - (\alpha^2 + \beta^2) = a^2 + b^2,$$

als Bedingungs-Gleichung zwischen den Constanten der Gleichungen (1) und (2). Auf die 7. und 8. Figur, wo PS die Chordale ist, übertragen, heifst diefs:

Fig. 7, 8.

$$SO = S\mu.$$

Zieht man also von irgend einem Puncte der Chordalen von Punct und Kreis eine Tangente an letztern, so ist dieselbe gleich der Entfernung des auf der Chordalen beliebig angenommenen von dem gegebenen Puncte.

Hieraus folgt ferner, im Falle der gegebene Punct aufserhalb liegt, dafs die Chordale die beiden von dem Puncte an den Kreis gezogenen und bis zu den Berührungs-Puncten genommenen Tangenten halbirt. Für den angezeigten Fall können wir hierauf die Construction der in Rede stehenden Chordalen gründen. Es ist $S'O = S'\mu'$.

105. Wir können endlich auch noch, der Uebereinstimmung mit dem Vorigen wegen, von der Chordalen zweier Puncte sprechen. Denn, setzen wir in der Gleichung (4) $\rho = o$, so reducirt sich auch der Kreis (1) auf einen Punct und diese Gleichung gibt alsdann folgende:

Fig. 7.

$$x = \frac{\alpha}{2}.$$

Digitized by Google

Diese Gleichung zeigt, wenn wir auf die Bestimmung der Coordinaten-Axen Rücksicht nehmen, dafs die Chordale zweier Puncte diejenige gerade Linie ist, welche in der Mitte der Geraden, die die beiden Puncte verbindet, auf derselben senkrecht steht. Die allgemeinste Gleichung dieser Linie hätten wir bekommen, wenn wir die beiden Gleichungen:

$$(y-\beta)^2+(x-\alpha)^2 = 0,$$
$$(y-b)^2+(x-a)^2 = 0,$$

von einander abgezogen hätten. Jeder Punct dieser Chordalen steht gleichweit von den gegebenen Puncten ab.

106. Aus den letzten Erörterungen ist ersichtlich, dafs, wenn auch unter den Gleichungen, die wir früher (94) durch:

$$A = 0, \quad B = 0, \quad C = 0, \qquad (5)$$

bezeichnet haben, Gleichungen von folgender Form:

$$(y-\beta)^2+(x-\alpha)^2 = 0,$$

sich befinden, dennoch immer die Gleichungen

$$A-B = 0, \quad A-C = 0, \quad B-C = 0,$$

sich leicht construiren lassen, und drei gerade Linien bedeuten, die durch ein und denselben Punct gehen, nemlich durch den Chordal-Punct der drei gegebenen Oerter (5). Und ferner, wie wir auch die Constanten in einer der Gleichungen (5), etwa in der ersten, (A = 0), bestimmen mögen: der Durchschnitt der beiden Chordalen:

$$A-B = 0, \quad A-C = 0,$$

die mit jeder andern Constanten-Bestimmung ihre Lage ändern, erfolgt immer auf ein und derselben geraden Linie, auf der Chordalen der beiden festen und unveränderlichen Oerter (B = 0) und (C = 0).

Hiernach kommen wir zu einer Reihe von mannigfaltigen Sätzen, oder vielmehr zu besondern Fällen eines allgemeinen Satzes, wenn wir Puncte und Kreise auf verschiedene Weise zu drei combiniren. Wir haben in dem Obigen drei Kreise zusammengestellt; wir können nun auch zwei Kreise und einen Punct zusammenstellen, und einmal den Punct, das andere Mal einen der beiden Kreise sich verändern lassen, ferner zwei Puncte und einen Kreis zusammenstellen und auch hier wiederum einmal den Kreis, das andere Mal einen der beiden Puncte als veränderlich betrachten; endlich können wir auch drei Puncte nehmen. Je nachdem nun die drei zusammengestellten Oerter bestimmte Lagen in Beziehung auf einander haben, können wir die Aussage der besondern Fälle verschiedentlich einkleiden. Ich hebe die folgenden Beispiele hervor.

107. Wir wollen zuerst einen Kreis und zwei Puncte zusammenstellen und überdiefs annehmen, einer der Puncte befinde sich auf dem Umfange des Kreises. Für eine der Chordalen bekommen wir also die Tangente, welche in dem letztgenannten Puncte den Kreis berührt; für eine andere die gerade Linie, die auf derjenigen, welche die gegebenen Puncte verbindet, in der Mitte derselben senkrecht steht. Diese beiden Linien ändern ihre Lage, wenn wir denjenigen Punct, der auf dem Kreise sich befindet, auf demselben fortrücken lassen; sie schneiden sich aber immer in einem Puncte der Chordalen, die zu dem andern Puncte und dem Kreise gehört. Das allgemeine Schema der 106. Nummer enthält also folgenden speciellen Satz:

Fig. 9. *Wenn wir von irgend einem festen Puncte (R), innerhalb oder aufserhalb eines gegebenen Kreises, nach einem beliebigen Puncte desselben (r,(ϱ)) eine gerade Linie*

Digitized by Google

(Rr,(Rϱ)) ziehen, so schneiden sich das Perpendikel in der Mitte derselben (MS,(μσ)) und die Tangente in letzterm Puncte (r,(ϱ)) in irgend einem Puncte (S,(σ)) der, wie auch jeder auf dem Umfange des Kreises fortrücken mag, immer auf derselben geraden Linie bleibt.

108. Wenn wir, übrigens bei derselben Zusammenstellung als vorhin, annehmen, der feste Punct R liege auf dem Kreise, der andere aber r liege aufserhalb, übrigens aber durchaus beliebig, so erhalten wir folgenden Satz: Fig. 10.

Wenn wir von einem beliebigen Puncte (r) nach einem festen Puncte (R) auf dem Umfange eines gegebenen Kreises eine gerade Linie (Rr) ziehen, und in der Mitte derselben ein Perpendikel errichten, so schneidet dieses Perpendikel (MS) die gerade Linie (tt), welche die beiden von demselben Puncte (r) an den Kreis gezogenen Tangenten halbirt, in irgend einem Puncte (S), der, wo wir auch immer jenen beliebigen Punct annehmen mögen, stets auf der Tangente im festen Puncte (R) liegt.

109. Wir haben den allgemeinern Satz, der beiden vorigen in sich fast, wenn wir durchaus keine Bestimmung über die Lage der beiden Puncte R und r machen. Wir verweilen indefs hierbei nicht länger, und nehmen gleich, indem wir nach wie vor, zwei Puncte und einen Kreis betrachten, nun nicht mehr einen der Puncte, sondern den Kreis als veränderlich. So ergibt sich folgender Satz:

Wenn irgend zwei Puncte gegeben sind, und man beschreibt einen beliebigen Kreis, so schneiden sich die Chordalen für diesen Kreis und jeden der beiden Puncte, auf dem in der Mitte der geraden Linie, welche jene Puncte verbindet, errichteten Perpendikel. Nehmen wir also an, dafs der beliebige Kreis die beiden gegebenen Puncte R und r nicht umschliefst, so schneiden sich auf der eben bezeichneten geraden Linie SS die beiden geraden Linien TT und tt, welche die von R und r an den beliebigen Kreis gezogenen Tangenten-Paare halbiren, wie wir auch immer diesen Kreis bestimmen mögen. (Fig. 11.) *Geht der beliebige Kreis immer durch einen der beiden festen Puncte, durch r, so schneidet die Tangente in diesem Puncte die Gerade TT, welche die von dem andern Puncte R an den Kreis gezogenen Tangenten halbirt, immer in einem Puncte S der besagten geraden Linie.* (Fig. 12.) Fig. 11. 12

110. Wir wollen ferner zwei Kreise mit einem Puncte zusammenstellen und diesen Punct als beliebig betrachten. Der entsprechende Satz ist folgender: Fig. 13.

Wenn man von irgend einem Puncte (R) zwei Tangenten-Paare an zwei feste und unveränderliche Kreise zieht, so schneiden sich die beiden geraden Linien (TT, tt), von denen jede die Tangenten eines Paares halbirt, in einem Puncte (S), der immer, wo wir auch den beliebigen Punct (R) annehmen mögen, auf einer geraden Linie, der Chordalen beider Kreise, bleibt. Wenn insbesondere jener Punct (R) auf dem Umfange eines der beiden Kreise angenommen wird, so schneidet die Tangente in diesem Puncte (RS) die gerade Linie TT, welche die von demselben Puncte an den andern Kreis gezogenen Tangenten halbirt, immer auf der besagten geraden Linie.

111. Wir können endlich auch, bei gleicher Zusammenstellung, nicht den Punct, sondern einen der beiden Kreise sich ändern lassen. Wir heben hier nur folgenden speciellen Fall hervor:

Digitized by Google

Fig. 14. *Wenn ein Kreis (C) und ein Punct (R) gegeben ist, und wir beschreiben irgend einen neuen Kreis (γ), der durch den gegebenen Punct (R) geht und den gegebenen Kreis schneidet, so schneiden sich die Tangente des beliebigen Kreises im gegebenen Puncte und die gemeinschaftliche Chorde desselben mit dem gegebenen Kreise immer auf derselben geraden Linie (SS) der Chordalen der beiden gegebenen Oerter.*

112. Wenn wir zuletzt, um auch diesen Fall zu erwähnen, drei Puncte zusammenstellen, so gibt unser allgemeines Schema den bekannten und auch im vorigen Abschnitte bewiesenen Satz, dafs *die drei, in den Mitten der drei Seiten eines beliebigen Dreiecks errichteten, Perpendikel sich in demselben Puncte schneiden.* Wir haben also diesen Satz bewiesen, und der Beweis läfst an Strenge durchaus nichts zu wünschen übrig, indem wir die Gleichungen der Winkel-Puncte des Dreiecks, Gleichungen unter folgender Form:

$$(y-\beta)^2+(x-\alpha)^2 = 0,$$
$$(y-h)^2+(x-a)^2 = 0,$$
$$(y-B)^2+(x-A)^2 = 0,$$

mit einander verbunden haben. Und zugleich (105) ist erwiesen, dafs der Durchschnitts-Punct der drei Perpendikel von den Winkel-Puncten des Dreiecks gleichweit absteht, mithin der Mittelpunct des umschriebenen Kreises ist.

113. Die vorstehenden Entwicklungen sind für unsere Absicht mehr als genügend. Wir erwähnen nur noch folgende Sätze, deren Beweis in den frühern Nummern liegt:

Zieht man aus dem Chordal-Punct eines Kreises und zweier Puncte gerade Linien nach diesen und Tangenten an jenen, so sind diese Linien einander gleich. Beschreibt man nun ferner aus jenem Chordal-Puncte einen Kreis, dessen Radius jenen Linien gleich ist, so schneidet dieser den gegebenen Kreis unter rechten Winkeln. Ebenso schneidet ein Kreis, dessen Mittelpunct der Chordal-Punct zweier Kreise und eines Punctes ist, und durch diesen Punct geht, jene Kreise unter rechten Winkeln.

114. Wir kommen zu einer neuen Reihe von Sätzen, wenn wir denjenigen der bisher zusammengestellten Oerter, welchen wir durchaus als beliebig angenommen haben, nun zwar noch immer als veränderlich betrachten, ihn jedoch dadurch näher bestimmen dafs die Chordale dieses und eines der gegebenen unveränderlichen Oerter dieselbe bleibt. Alsdann ist der Chordal-Punct ein fester und unveränderlicher. Um dieſs an unser früheres Schema zu knüpfen, wollen wir die ersten beiden der drei durch:

$$A = 0, \quad B = 0, \quad C = 0,$$

dargestellten Oerter als gegeben betrachten; alsdann ist zunächst

$$A-B = 0$$

eine constante gerade Linie; ferner nehmen wir den dritten Ort veränderlich, jedoch so, dafs:

$$A-C = 0$$

ein und dieselbe gerade Linie bezeichnet. Bei diesen Voraussetzungen ist der Chordal-Punct, der im Durchschnitt der eben bestimmten Linien liegt, ein fester Punct. Durch diesen festen Punct geht immer, wie wir auch, unter den angezeigten Beschränkungen, den dritten Ort nehmen mögen, die durch

$$B-C = 0$$

gegebene Chordale.

Digitized by Google

115. Hierhin gehört nun zunächst folgender Satz:

Wenn zwei Kreise gegeben sind und wir construiren irgend einen dritten Kreis, der einen der beiden gegebenen entweder in demselben Puncte berührt, oder in denselben beiden Puncten schneidet, so bleibt der Chordal-Punct der drei Kreise derselbe, wie wir auch unter diesen Bedingungen den dritten Kreis bestimmen mögen.

116. Hierauf gründet sich eine leichte Construction der beiden Kreise, die einen gegebenen Kreis berühren und zugleich, entweder durch zwei gegebene Puncte gehen, oder einen zweiten gegebenem Kreis (oder gerade Linie) in einem gegebenem Puncte berühren. Für den ersten Fall blofs wollen wir die Construction anzeigen. Sey TKT'K' der gegebene, zu berührende Kreis, M und M' die beiden gegebenen Puncte. Durch diese Puncte lege man einen beliebigen Kreis, der den gegebenen schneidet, was nach der Figur in K und K' geschieht; ziehe MM' und KK', die sich genugsam verlängert in P schneiden, und lege endlich von P aus Tangenten an den gegebenen Kreis. Die Berührungs-Puncte T und T' *) sind alsdann diejenigen Puncte, in welchen die beiden möglichen Kreise, die den Forderungen der Aufgabe Genüge leisten, den gegebenen Kreis berühren. Hiernach sind diese Kreise selbst, die in der bezüglichen Figur stärker ausgedrückt sind, leicht zu construiren. Fällt der Punct P, der Chordal-Punct des gegebenen und jeder zwei beliebiger Kreise, die durch M und M' gehen, (unter die letzgenannten gehören die gesuchten Berührungs-Kreise) innerhalb des gegebenen Kreises, so ist die Aufgabe unmöglich. Dieser Umstand findet dann Statt, wenn einer der gegebenen Puncte innerhalb, der andere aufserhalb liegt. Fig. 15.

117. Da die Mittelpuncte aller Kreise, die durch dieselben beiden Puncte gehen, in gerader Linie liegen, so können wir den Satz der 116. Nummer auch in folgende Aussage einkleiden.

Die gemeinschaftlichen Chorden eines gegebenen Kreises mit allen Kreisen, deren Mittelpuncte in gerader Linie liegen, und die überdiefs durch einen festen Punct gehen, schneiden sich in ein und demselben Puncte, und umgekehrt, der Ort der Mittelpuncte aller Kreise, die sich in demselben Puncte schneiden, und deren gemeinschaftliche Chorden mit einem gegebenem Kreise durch einen festen Punct gehen, ist eine gerade Linie.

Der Beweis dieses Satzes ist durch das einfache Schema der 114. Nummer vollkommen strenge geführt, wir wollen indefs noch einen andern Beweis desselben Satzes hier anzeigen. Seyen:

$$(y-b)^2+(x-a)^2 = r^2,$$
$$(y-\beta)^2+(x-\alpha)^2 = \varrho^2,$$

die Gleichungen zweier Kreise, deren Chordale:

$$2(\beta-b)y+2(\alpha-a)x = r^2-(a^2+b^2)-\varrho^2+(a^2+\beta^2),$$

durch irgend einen festen Punct geht. Denken wir uns die Kreise auf diesen Punct als Anfangs-Punct der Coordinaten bezogen, so kommt:

$$r^2-(a^2+b^2) = \varrho^2+\alpha^2+\beta.$$

*) Nach einer allgemeinen Eigenschaft der Linien zweiter Ordnung können wir auf sehr leichte Weise die Berührungen bestimmen, ohne die Tangenten selbst zu ziehen. Hierüber umständliche Erörterungen in dem folgenden Abschnitte.

Digitized by Google

Diese Gleichung mufs immer zwischen den Constanten bestehen, wenn wir den zweiten Kreis so sich ändern lassen, dafs die gemeinschaftliche Chorde durch den Anfangs-Punct geht. Machen wir zugleich noch die Bestimmung, dafs der zweite Kreis durch irgend einen festen Punct (y', x') gehen soll, so ist:

$$(y'-\beta)+(x'-\alpha) = \varrho^2,$$

und wenn wir vermittelst dieser Gleichung aus der vorigen ϱ^2 fortschaffen, so kommt:

$$r^2-(a^2+b^2) = y'^2+x'^2-2\beta y'-2\alpha x'.$$

In dieser Gleichung sind β und α die einzigen nicht bestimmten Gröfsen, betrachten wir sie daher als veränderliche Gröfsen und setzen y und x an ihre Stelle, so erhalten wir, indem wir blofs ordnen:

$$2y'y+2x'x = y'^2+x'^2+a^2+b^2-r^2:$$

die Gleichung einer geraden Linie, des Ortes aller Mittelpuncte der veränderlichen Kreise.

118. Der Beziehung auf das folgende wegen, führen wir noch einschaltungsweise an, dafs wir vermittelst des Satzes der letzten Nummer auch die Aufgabe auflösen können: einen Kreis zu beschreiben, der zwei gegebene Kreise berührt, und dessen
Fig. 16. Mittelpunct auf einer gegebenen geraden Linie liegt. Verkürzen wir nemlich den Radius des gröfsern der gegebenen Kreise CM um den Radius des kleinern Kreises CM', so ist der Mittelpunct, γ, des Kreises $\gamma\mu'$, der durch den Mittelpunct C' des zweiten Kreises geht und den verkleinerten ersten Kreis berührt, zugleich auch der Mittelpunct des verlangten Kreises $\gamma\mu$, der die gegebenen beiden Kreise berührt, und zwar so berührt, dafs der kleinere nicht umhüllt wird. Dieser Kreise gibt es zwei. Wir finden auf ähnliche Weise diejenigen beiden Berührungs-Kreise, welche den kleinern Kreis umhüllen, so dafs wir im Ganzen vier Kreise bekommen, die den Forderungen der Aufgabe Genüge leisten. (Das in dieser Nummer gebrauchte Verfahren ist ein bekanntes.)

Fig. 17. 119. Mit dem Satze der 115. Nummer gehört der folgende zusammen:

Wenn zwei Kreise gegeben sind und wir nehmen irgend einen dritten Kreis, der, mit einem der beiden ersten, den er auch nicht schneidet, zusammengestellt, eine constante Chordale hat, so ist der Chordal-Punct der drei Kreise ein unveränderlicher Punct, wie wir auch immer den dritten Kreis bei den eben gemachten Beschränkungen verändern mögen.

Dieser Satz liefert uns eine Construction der Aufgabe einen Kreis zu beschreiben, der mit einem gegebenen Kreise eine gegebene Linie zur Chordalen hat und zugleich einen zweiten gegebenen Kreis berührt, eine Aufgabe, die derjenigen der 116. Nummer entspricht.

Sey C der erste Kreis, PQ die gegebene gerade Linie, C' der zweite Kreis, der berührt werden soll. Zieht man die Chordale der beiden gegebenen Kreise, welche der gegebenen Chordalen nach der Figur in P begegnet, so ist dieser Punct der Chordal-Punct der beiden gegebenen und jedes dritten Kreises, der, mit dem ersten zusammengestellt, PQ zur Chordalen hat. Durch diesen Punct geht also auch die gemeinschaftliche Tangente des zweiten und desjenigen Kreises, der den Forderungen der Aufgabe entspricht, woraus dann umgekehrt folgt, dafs, um den Berührungs-Punct dieser beiden Kreise zu bestimmen, wir blofs von P an den zweiten Kreis eine Tangente zu ziehen brauchen. Da es zwei Tangenten gibt, so gestattet die Aufgabe, ähnlich wie die der 116. Nummer,

Digitized by Google

eine doppelte Auflösung. Die beiden verlangten Kreise selbst (γ,γ') sind hiernach leicht zu construiren; denn einerseits liegt der Mittelpunct jedes derselben auf einer der zwei geraden Linien, welche den Mittelpunct des zweiten Kreises mit den beiden eben bestimmten Berührungs-Puncten verbindet, andrerseits liegen die Mittelpuncte beider Kreise auf derjenigen geraden Linie, welche durch den Mittelpunct des ersten Kreises geht, und senkrecht auf der gegebenen Chordalen steht.

120. Auf ganz analoge Weise können wir denjenigen Kreis construiren, der mit einem gegebenen Kreise eine gegebene gerade Linie zur Chordalen hat und aufserdem noch durch einen gegebenen Punct geht. Fig. 18.

Sey C der gegebene Kreis, PQ die gegebene gerade Linie, R der gegebene Punct. Construiren wir nun die Chordale von Punct und Kreis, und schneidet dieselbe die gegebene gerade Linie in P, so ist PR eine Tangente an den gesuchten Kreis im gegebenen Puncte R. Das Uebrige ergibt sich wie vorhin.

121. Die Constructionen der beiden vorigen Nummern erleiden endlich nur leichte Modificationen, wenn statt des Kreises C ein Punct gegeben ist, und der gesuchte Kreis einmal einen gegebenen Kreis berühren, das andere Mal durch einen zweiten gegebenen Punct gehen soll. Um nur den letzten Fall zu nehmen, sey C der erste Punct, PQ die gegebene gerade Linie und R der zweite Punct. Das Perpendikel in der Mitte der geraden Linie, welche die beiden gegebenen Puncte C und R verbindet, schneide PQ in P; ziehen wir alsdann PR, so ist diese Linie eine Tangente des gesuchten Kreises (γ) im gegebenen Puncte R. Fig. 19.

122. Wenn wir für den, in der 114. Nummer durch B = o bezeichneten Ort irgend einen festen Punct nehmen, so knüpft sich folgender Satz an das Schema jener Nummer:

Construirt man beliebig viele Kreise, welche eine gemeinschaftliche Chordale haben und zieht man von irgend einem beliebigen aber festen Puncte Tangenten-Paare an die verschiedenen Kreise, so gehen alle diejenigen geraden Linien, welche die beiden Tangenten jedes Paares halbiren, durch einen festen Punct der gemeinschaftlichen Chordalen. Durch denselben Punct geht auch die Tangente, welche im gegebenen Puncte an denjenigen Kreis gelegt werden kann, der zugleich durch letztern Punct geht.

In der 20. Figur gehen alle Kreise durch die beiden festen Puncte M und M', der angenommene Punct ist R, und im Puncte P laufen die im Satze bezeichneten geraden Linien TT, RP zusammen. Fig. 20.

123. Wir könnten noch für die andern besondern Fälle das Schema der 114. Nummer construiren, statt dessen wollen wir im Allgemeinen alle diejenigen Kreise analytisch bestimmen, welche mit zweien gegebenen dieselbe Chordale haben. Da die Mittelpuncte aller dieser Kreise in einer geraden Linie liegen, die auf der Chordalen senkrecht steht, so wollen wir diese Linie zur ersten Axe nehmen. Auf dieser Axe liegen auch die Mittelpuncte der beiden gegebenen Kreise, deren Gleichungen also von folgender Form sind:

$$\begin{aligned} y^2+(x-\alpha)^2 &= \varrho^2, \\ y^2+(x-a)^2 &= r^2. \end{aligned} \qquad (1)$$

Wir erhalten die allgemeine Gleichungen derjenigen Kreise, welche, mit jedem der gegebenen zusammengestellt, dieselbe Chordale geben als die beiden gegebenen Kreise unter sich, wenn wir die eine der letzten Gleichungen mit einem unbestimmten Coefficienten μ, dem wir sowol positive als negative Werthe beilegen, multipliciren und dann zur andern Gleichung addiren. Auf diese Weise kommt, wenn wir zugleich mit dem Coefficienten von y^2 dividiren:

$$y^2 + x^2 - 2\,\frac{\mu a + a}{\mu + 1}\,x = \frac{\mu(\varrho^2 - a^2) + (r^2 - a^2)}{\mu + 1}.$$

Wir können diese Gleichung durch eine schickliche Wahl der zweiten Axe noch vereinfachen; wir können z. B. die Chordale der beiden gegebenen Kreise zur zweiten Axe nehmen, alsdann ist:

$$\varrho^2 - a^2 = r^2 - a^2,$$

wodurch die letzte Gleichung folgende Gestalt annimmt:

$$y^2 + x^2 - 2\,\frac{\mu a + a}{\mu + 1}\,x = \varrho^2 - a^2 = r^2 - a^2.$$

Nun können wir endlich noch, der Kürze halber,

$$\frac{\mu a + a}{\mu + 1} = m$$

setzen, wenn wir durch m eine neue unbestimmte Gröfse bezeichnen, die, da μ alle mögliche Werthe erhalten kann, ebenfalls keiner Beschränkung unterworfen ist. Die obige Gleichung geht alsdann in folgende über:

$$y^2 + x^2 - 2mx = \varrho^2 - a^2. \qquad (2)$$

Wir kommen mit geringerm Aufwande von Rechnung zu demselben Resultate, wenn wir, statt die beiden Kreis-Gleichungen (1) mit einander zu verbinden, die eine dieser Gleichungen mit der Gleichung der Chordalen, die bei unserer Axen-Annahme folgende ist:

$$x = 0$$

durch Addition verbinden, nachdem wir die letztere mit irgend einem Coefficienten multiplicirt haben; d. h. mit andern Worten, wenn wir eine der Kreis-Gleichungen z. B. die erste, entwickeln:

$$y^2 + x^2 - 2ax = \varrho^2 - a^2,$$

und den Coefficienten der ersten Potenz von x als durchaus beliebig annehmen; schreiben wir für denselben 2m, so kommt wie oben:

$$y^2 + x^2 - 2mx = \varrho^2 - a^2.$$

124. Wir können der in der vorigen Nummer entwickelten Gleichung folgende Form geben:

$$y^2 + (x - m)^2 = \varrho^2 - a^2 + m^2. \qquad (3)$$

Die Realität dieser Gleichung fordert, dafs der zweite Theil derselben positiv sey. Dieſs findet immer Statt, wenn ϱ^2 gröfser ist als a^2, d. h. wenn die beiden gegebenen, und also auch alle gesuchten Kreise sich schneiden. In diesem Falle mögen wir m, oder die Mittelpuncts-Abscisse bestimmen wie wir wollen, die letzte Gleichung gibt immer einen reellen Kreis, der kleinste Kreis entspricht der Bedingung, dafs m verschwindet, sein Radius ist $(\varrho^2 - a^2)$. Berühren sich die beiden gegebenen Kreise, so können wir durch Verbindung ihrer Gleichungen einen neuen Kreis von jedem beliebigen Radius bekommen. Dieser Fall bildet den Uebergang dazu, dafs die beiden gegebenen Kreise und mithin auch irgend zwei der in Rede stehenden Kreise sich nicht schneiden. Als-

dann ist ρ^2 kleiner als a^2, und wir erhalten für die Realität von (3) folgende Bedingungs-Gleichung:

$$m^2 > a^2 - \rho^2.$$

Die Mittelpuncts-Abscisse ist also, abgesehen vom Zeichen, nothwendig gröfser als die vom gemeinschaftlichen Chordal-Puncte aller, (namentlich auch der beiden gegebenen) Kreise an dieselben gezogenen Tangenten. Nehmen wir

$$m^2 = a^2 - \rho^2, \quad \text{also} \quad m = \pm\sqrt{a^2 - \rho^2},$$

so bezeichnet die Gleichung (3) einen Punct. Diese Puncte, deren es zwei giht, sind leicht zu construiren. Ist

$$m^2 < a^2 - \rho^2,$$

so bedeutet die Gleichung (3) durchaus nichts, oder wenn wir lieber wollen, einen imaginären Kreis, einen Kreis, dessen Radius durch einen Ausdruck von der Form $R\sqrt{-1}$ gegeben ist; und wir sehen zugleich, dafs zwei imaginäre Kreise, oder auch ein reeller und ein imaginärer Kreis eine reelle Chordale haben.

125. Da das Wesentliche der von uns überall durchgeführten Methode in der geometrischen Deutung solcher Gleichungen, die wir aus der Verbindung anderer Gleichungen erhalten, besteht: so dürfen wir Bemerkungen von der Art der eben gemachten nicht aufser Acht lassen, besonders nicht in der Theorie der Linien höherer Ordnung. Wir müssen sie indefs für weiter nichts nehmen, als für das, was sie wirklich sind: für analytische Beziehungen; und wenn z. B. vorhin von imaginären Kreisen die Rede war, so ist diefs nur eine Sprache, die den analytischen Formen angepafst ist.

126. Aus dem Frühern ist ersichtlich, dafs, wenn ein Kreis und ein Punct auf diesem Kreise gegeben ist, wir die Gleichung der Tangente in diesem Puncte bekommen, wenn wir von der Gleichung des Kreises die Gleichung des Punctes unter der Form einer quadratischen Gleichung abziehn. Hierauf gründet sich eine hübsche Tangenten-Theorie für den Kreis, die aber, wie wir im Folgenden entwickeln werden, sich nicht allein auf den Kreis beschränkt, sondern, indem wir dieselbe auf andere Linien ausdehnen, zu sehr allgemeinen Resultaten führt.

Sey also:

$$(y-\beta)^2 + (x-a)^2 = \rho^2, \qquad (1)$$

die Gleichung des Kreises und:

$$(y-y'')+(x-x'')^2 = 0, \qquad (2)$$

die Gleichung des gegebenen Punctes (y'', x''), und da dieser Punct, unserer Voraussetzung gemäfs, auf dem Umfange des Kreises liegt, so haben wir zugleich folgende Bedingungs-Gleichung zwischen den Coordinaten desselben:

$$(y''-\beta)^2 + (x''-a)^2 = \rho^2.$$

Ziehen wir die beiden Gleichungen (1) und (2) von einander ab, so kommt:

$$2(y''-\beta)y + 2(x''-a)x = \rho^2 + (y''^2 + x''^2) - (a^2 + \beta^2),$$

und da wir die vorhergehende Bedingungs-Gleichung auch folgendergestalt schreiben können:

$$y''^2 + x''^2 - (a^2 + \beta^2) = \rho^2 + 2(y''-\beta)\beta + 2(x''-a)a,$$

so erhalten wir, indem wir zusammenziehen und alle Glieder durch 2 dividiren:

$$(y''-\beta)(y-\beta) + (x''-a)(x-a) = \rho^2:$$

die gesuchte Gleichung der Tangente im Puncte (y'', x''). Nehmen wir den Anfangs-Punct der Coordinaten in dem Mittelpuncte des Kreises an, so sind β und a gleich Null und die Gleichung der Tangente wird folgende

$$y''y + x''x = \rho^2.$$

Digitized by Google

127. Wir wollen wieder einen Schritt vorwärts thun und zu diesem Ende nochmals die Gleichungen zweier Kreise, so wie wir es bisher gethan haben, mit einander verbinden. Wir wollen den Anfangs-Punct der Coordinaten in den Mittelpunct des ersten Kreises legen und die erste Axe durch den Mittelpunct des zweiten führen. Alsdann haben wir folgende beiden Gleichungen:

$$y^2 + x^2 = r^2, \qquad (1)$$

$$y^2 + (x-a)^2 = \varrho^2, \qquad (2)$$

und wenn wir abziehen, so kommt:

$$2ax - a^2 = r^2 - \varrho^2 \qquad (3)$$

für die Gleichung der Chordalen. Diese Gleichung ist in Beziehung auf a vom zweiten Grade, es giht also im Allgemeinen zwei verschiedene Werthe von a, welche, suhstituirt in die letzte Gleichung, denselben Werth für x gehen, also dieselbe Chordale hestimmen. Es giht also zwei Kreise von gleichem Radius ϱ, die mit einem dritten dieselbe Chordale hahen. Wir wollen hier nur den Fall hetrachten, dafs ϱ gleich Null ist, die Gleichung (2) also einen Punct bezeichnet. Die Gleichung (3) geht aber, wenn wir ϱ gleich Null setzen, und in Beziehung auf a ordnen, in folgende über:

$$a^2 - 2ax + r^2 = 0. \qquad (4)$$

Wenn wir die beiden Wurzeln dieser Gleichung durch a' und a'' bezeichnen, so gibt die Theorie der quadratischen Gleichungen:

$$a' + a'' = 2x, \qquad (5)$$

$$a'a'' = r^2, \qquad (6)$$

und zugleich bedingt die Realität dieser Wurzeln dafs

$$x^2 > r^2,$$

d. h. wie wir auch früher schon hewiesen haben (103), dafs die Chordale von Punct und Kreis, der Punct mag aufserhalh oder innerhalb liegen, niemals den Kreis schneidet.

128. Die Gleichung der Tangente an den durch (1) dargestellten Kreis im Puncte (y'', x'') ist folgende:

$$y''y + x''x = r^2,$$

und wenn wir die Ahscisse des Durchschnittes dieser Tangente mit der ersten Axe durch x' hezeichnen, so kommt, indem wir $y = 0$ setzen:

$$x''x' = r^2.$$

Diese Gleichung stimmt mit (6) überein, woraus wir denn den Schlufs zu ziehen berechtigt sind, dafs zwischen den heiden Puncten $(0, a')$ und $(0, a'')$, welche mit einem gegebenen Kreise eine gemeinschaftliche Chordale haben, dieselbe Beziehung Statt findet, als zwischen demjenigen Puncte, in welchem zwei an jenen Kreis gezogene Tangenten sich schneiden und der Mitte der Berührungs-Chorde (*corde de contact*).

129. Aus der Gleichung (5) folgt, dafs die beiden in Rede stehenden Puncte, die auf der ersten Axe liegen und durch die Ahscissen a' und a'' hestimmt werden, zu beiden Seiten der Chordalen sich hefinden und gleichweit von derselben entfernt sind. Diefs stimmt mit der 104. Nummer, die uns in dem Vorhergehenden schon zur Construction der Chordalen von Punct und Kreis gedient hat.

Fig. 21. 130. Zwei Puncte R und ϱ, welche mit einem gegebenen Kreise dieselhe gerade Linie zur Chordalen haben, werden wir nach dem Vorgange französischer Mathematiker: zugeordnete Pole in Beziehung auf diesen Kreis nennen. Diese Definition

Digitized by Google

wird aber gewöhnlich mit Beziehung auf Tangenten gegeben und also an die 128. Nummer geknüpft.

131. Nach diesen Erörterungen kommen wir unmittelbar zu einer Reihe von Sätzen:

Wenn man aus irgend einem Puncte der gemeinschaftlichen Chordalen eines gegebenen Kreises und zweier zugeordneter Pole, einen zweiten Kreis beschreibt, der durch einen der Pole geht, so geht er auch durch den andern Pol; ein solcher Kreis aber schneidet den gegebenen unter rechten Winkeln, und umgekehrt:

Wenn ein Kreis durch irgend zwei Puncte geht, die in Beziehung auf einen andern Kreis zugeordnete Pole sind, so schneiden sich die beiden Kreise unter rechten Winkeln.

132. Die folgenden Erörterungen schliefsen sich an das Schema der 114. Nummer. Seyen:

$$A = 0, \quad B = 0, \quad C = 0, \quad C' = 0, \qquad (1)$$

die Gleichungen eines Kreises, zweier Puncte und des zugeordneten Poles des letztern Punctes in Beziehung auf jenen Kreis. Alsdann bezeichnen die Gleichungen:

$$A - C = 0, \quad A - C' = 0, \quad C - C' = 0,$$

ein und dieselbe Chordale, und gleichviel, ob wir die beiden ersten Oerter mit dem dritten oder vierten zusammenstellen, wir bekommen beidesmal denselben Chordal-Punct. Durch diesen Punct gehen also:

$$B - C = 0, \quad B - C' = 0,$$

und da der Durchschnitt dieser Linien, den Chordal-Punct der drei letzten Oerter bestimmt, so fällt auch dieser Punct mit den frühern zusammen. Es haben also je drei der vier Oerter (1), die nicht dieselbe Chordale haben, denselben Chordal-Punct.

Nehmen wir statt des zugeordneten Poles des zweiten Punctes den Pol des ersten, den wir durch die Gleichung $B' = 0$ darstellen, so ergibt sich gerade auf dieselbe Weise wie eben, derselbe Chordal-Punct für je drei der vier Oerter

$$A = 0, \quad B = 0, \quad C = 0, \quad C' = 0;$$

und weil die drei ersten dieser Oerter mit den drei ersten der vier Oerter bei (1) einerlei sind, so ist dieser Punct mit dem der ersten Zusammenstellung ein und derselbe. Die zwei Paare zugeordneter Pole liegen also auf dem Umfange eines einzigen Kreises, und dieser Kreis schneidet den gegebenen unter rechten Winkeln. Also:

Durch je zwei Paare, in Beziehung auf einen gegebenen Kreis, zugeordneter Pole läfst sich ein neuer Kreis beschreiben. Die beiden Kreise schneiden sich unter rechten Winkeln. Oder: *Wenn irgend ein Kreis gegeben ist und man legt von irgend zweien, beliebig angenommenen, Puncten Tangenten an den gegebenen Kreis, und verbindet die Berührungen, so liegen die beiden angenommenen Puncte und die beiden Mitten der Berührungs-Chorden auf dem Umfange eines und desselben Kreises, der den gegebenen rechtwinklig durchsetzt.*

In der 22. Figur sind die beiden Paare zugeordneter Pole durch R und ϱ, R' und ϱ' bezeichnet. Fig. 23.

133. Durch Umkehrung erhalten wir folgenden Satz:

Wenn irgend zwei Kreise sich rechtwinklig schneiden, und man zieht aus dem Mittelpuncte des ersten eine gerade Linie, welche dem zweiten begegnet, so sind die beiden Durchschnitts-Puncte zugeordnete Puncte in Beziehung auf den ersten Kreis. Oder,

Digitized by Google

mit andern Worten, *wenn man von irgend einem Puncte des zweiten Kreises Tangenten an den ersten Kreis zieht, so liegt die Mitte der Berührungs-Chorde wiederum auf dem zweiten Kreise.*

Diese Beziehung zwischen den beiden Kreisen ist offenbar reciprok.

Fig. 23. 134. Wenn wir zwei Kreise mit einem Puncte und dem zugeordneten Pole dieses Punctes in Beziehung auf den ersten Kreis zusammenstellen:

$$A = 0, \quad B = 0, \quad C = 0, \quad C' = 0;$$

so ist, wie in der 132. Nummer, der Chordal-Punct für je beliebige drei dieser vier Oerter, die nicht schon eine gemeinsame Chordale haben, immer derselbe Punct. Wenn wir weiter gehen, und den Pol für den Punct, dessen Gleichung ist: $C' = 0$, auf dem zweiten Kreise bestimmen, und diesen Pol darstellen durch die Gleichung $C'' = 0$ darstellen: so finden wir wieder denselben Punct als eben für den Chordal-Punct je dreier von folgenden vier Oertern:

$$A = 0, \quad B = 0, \quad C = 0, \quad C'' = 0.$$

Wir können nun wieder den Pol des zuletzt bestimmten Punctes auf dem ersten Kreise, construiren, und wenn wir auf diese Weise beliebig fortfahren, so erhalten wir eine Reihe von Puncten, die alle unter sich und mit den beiden gegebenen Kreisen ein und denselben Chordal-Punct haben, und also auf dem Umfange eines Kreises liegen, der die beiden gegebenen rechtwinklig schneidet.

Wir bekommen eine neue Reihe von Puncten, die auf demselben Kreise sich befinden, wenn wir zuerst auf dem zweiten Kreise, den zugeordneten Pol des gegebenen Punctes, dessen Gleichung ist $C = 0$ suchen, dann den Pol dieses Punctes auf dem ersten Kreise und so beliebig fortfahren.

In der bezüglichen Figur sind die in Rede stehenden Puncte durch: R, R', R'', R''', ϱ', ϱ'' ... bezeichnet.

Wenn also irgend zwei Kreise (diese Kreise mögen in einander liegen oder nicht, sie mögen sich schneiden oder berühren) und zugleich ein Punct gegeben sind, und wir bestimmen den Pol dieses Punctes auf dem ersten Kreise, für welchen ersten *Kreis wir nach einander* jeden *der beiden gegebenen Kreise nehmen können, dann weiter den Pol des so bestimmten Punctes auf dem zweiten Kreise, und wiederum den Pol des so erhaltenen Punctes auf dem ersten Kreise, und so beliebig fort: so liegen alle diese Constructions-Puncte auf dem Umfange eines neuen Kreises, der durch den gegebenen Punct geht und die beiden gegebenen Kreise unter rechten Winkeln schneidet.*

135. Zu denselben und andern Resultaten können wir auf eine allgemeinere Weise gelangen, wenn wir überhaupt die Bestimmung suchen, dafs ein vierter Ort mit drei gegebenen denselben Chordal-Punct habe.

Den Anfangs-Punct der Coordinaten wollen wir in den Chordal-Punct der drei gegebenen Oerter legen, und

$$(y - b)^2 + (x - a)^2 = r^2 \qquad (1)$$

für die Gleichung eines derselben nehmen; alsdann erhalten wir für $(a^2 + b^2) - r^2$ und die, für die beiden andern Oerter auf entsprechende Weise gebildeten, Ausdrücke ein und denselben Werth, den wir durch M bezeichnen wollen. Soll nun ein vierter Ort mit den drei gegebenen Oertern denselben Chordal-Punct haben, so mufs die Chordale

desselben und jedes der gegebenen Oerter durch den Anfangs-Punct der Coordinaten gehen. Ist also

$$(y-\beta)^2+(x-\alpha)^2=\rho^2 \qquad (2)$$

die Gleichung des vierten Ortes, und wir ziehen diese Gleichung von (1) ab, so mufs in der Gleichung, die wir auf diese Weise erhalten,

$$2(\beta-b)y+2(\alpha-a)x=r^2-(a^2+b^2)-\rho^2+(\alpha^2+\beta^2),$$

der zweite Theil verschwinden, mithin ist:

$$\alpha^2+\beta^2-\rho^2=a^2+b^2-r^2=M. \qquad (3)$$

136. Wir wollen erstens die Voraussetzung machen, dafs der vierte Ort ein Punct sey. Alsdann ist zuvörderst ersichtlich, dafs die Gleichung (3) durchaus nicht Statt finden kann, wenn M negativ ist, d. h. wenn der Chordal-Punct innerhalb der gegebenen Oerter fällt. Liegt der Chordal-Punct aber aufserhalb, so gibt die Gleichung (3),

$$\alpha^2+\beta^2=M, \qquad (4)$$

für den Ort der gesuchten Puncte einen Kreis, der aus dem Anfangs-Puncte der Coordinaten mit einem Radius, der den aus diesem Puncte an die gegebenen Oerter gezogenen Tangenten gleich ist, beschrieben wird. Dieser Kreis schneidet die gegebenen unter rechten Winkeln, weshalb wir ihn früher den Orthogonal-Kreis genannt haben.

137. Nehmen wir nun für die drei gegebenen Oerter drei Kreise, so gibt die vorige Nummer folgenden Satz: Fig. 24.

Wenn drei Kreise (C, C', C'') gegeben sind und man zieht aus irgend einem Punete (R) des Orthogonal-Kreises Tangenten-Paare an die drei gegebenen Kreise, so schneiden sieh, wo man auch jenen Punct (R) annehmen mag, die drei geraden Linien, welche die Tangenten jedes Paares halbiren (TT, $T'T'$, $T''T''$), immer im Mittelpuncte des Orthogonal-Kreises.

138. Aus der Construction der letzten Nummer ergibt sich auf eine zu leichte Weise folgender Satz, als dafs wir ihn nicht gleich anführen sollten:

Wenn man, bei denselben Voraussetzungen als eben, die drei Berührungs-Chorden ($\tau\tau$, $\tau'\tau'$, $\tau''\tau''$) construirt, so schneiden sieh dieselben in ein und demselben Puncte (S), der auf dem Orthogonal-Kreise, dem angenommenen Punete (R) diametral gegenüber, liegt. Die Beziehung der beiden Punete (R und S) zu einander ist reciprok.

139. Die Constructionen der 132 — 134 Nummer entsprechen den Fällen, dafs unter den drei gegebenen Oertern sich einmal zwei Puncte befinden, das andere Mal ein Punct. In beiden Fällen bekommen wir immer einen reellen Kreis für den eben bestimmten Ort (4), weil M immer positiv ist. Bezeichnet nemlich die Gleichung (1) der 135. Nummer einen Punct, so ist $r=0$ und es kommt:

$$M=a^2+b^2.$$

Nehmen wir endlich, um auch diesen Fall nicht zu übergehen, für die drei gegebenen Oerter drei Puncte, so entspricht der 137. Nummer der allbekannte Satz: dafs alle in den Mitten beliebiger Chorden eines Kreises errichteten Perpendikel, durch einen festen Punct, den Mittelpunct des Kreises gehen. Der folgenden Nummer entspricht die Umkehrung des Satzes, dafs alle Winkel im Halbkreise rechte Winkel sind.

Digitized by Google

140. Nehmen wir zweitens für den veränderlichen vierten Ort, der mit den drei gegebenen Oertern denselben Chordal-Punct hat, und durch die Gleichung (2) dargestellt wird, einen Kreis von gegebenem Radius, so gibt uns die Gleichung (3) für den Ort der Mittelpuncte solcher Kreise, einen neuen Kreis, dessen Mittelpunct in den Chordal-Punct der drei gegebenen Oerter fällt und dessen Radius leicht zu bestimmen ist. Der angenommene Radius ϱ kann jeder beliebige seyn, wenn M positiv ist; im andern Falle mufs das Quadrat desselben gröfser seyn als $(-M)$, d. h. gröfser als $(r^2-(a^2+b))$.

141. Sind drei Kreise gegeben, so können wir, umgekehrt, aus dem Chordal-Puncte, mit einem beliebigen Radius R einen Kreis beschreiben, dessen Gleichung folgende ist:

$$y^2+x^2 = R^2, \qquad (5)$$

und diesen Kreis für den durch (3) dargestellten geometrischen Ort nehmen; alsdann ist:

$$R^2 = (a^2+b^2)-r^2+\varrho^2,$$

und mithin ϱ durch folgende Gleichung gegeben:

$$\varrho^2 = R^2+r^2-(a^2+b^2). \qquad (6)$$

Zugleich ergibt sich, dafs unsere Annahme nur dann Statt finden kann, wenn:

$$R^2 > (a^2+b^2)-r^2. \qquad (7)$$

Diese Bedingung wird immer erfüllt, wenn der Chordal-Punct innerhalb der gegebenen Kreise liegt; im andern Falle mufs der beliebig angenommene Radius des Kreises (5) gröfser seyn, als die vom Chordal-Puncte an die gegebenen Kreise gezogenen Tangenten. Die in Rede stehenden gemeinschaftlichen Chorden gehen alsdann alle durch ein und denselben Punct, den Anfangs-Punct der Coordinaten.

Sind nur zwei Kreise gegeben, so können wir den Anfangs-Punct der Coordinaten oder den Mittelpunct des Kreises (5) in einem beliebigen Puncte der Chordalen der beiden gegebenen Kreise annehmen; ϱ bestimmt sich alsdann wie vorhin.

Ist endlich nur ein Kreis gegeben, so können wir den Mittelpunct des Kreises (5) annehmen, wo wir wollen. Nehmen wir ihn innerhalb des gegebenen Kreises an, so ist die Bestimmung des Radius, R, dieses Kreises durchaus keiner Beschränkung unterworfen. Im andern Falle müssen wir auf die Bedingungs-Gleichung (7) Rücksicht nehmen, die geometrisch gedeutet, anders nichts heifst, als dafs die beiden Kreise sich unter einem Winkel schneiden, der gröfser als $\frac{\pi}{2}$ ist, oder dafs einer derselben innerhalb des andern liegt.

Wenn wir die beiden Kreise mit einander vertauschen, mithin den Anfangs-Punct der Coordinaten in den Mittelpunct des gegebenen Kreises verlegen und die Mittelpuncts-Coordinaten des andern Kreises $(-\beta)$ und $(-\alpha)$ nehmen, so dafs wir statt der beiden Gleichungen (1) und (5) nun folgende beide Gleichungen zu betrachten haben:

$$y^2+x^2 = r^2,$$
$$(y+\beta)^2+(x+\alpha)^2 = R^2:$$

so erhalten wir zur Bestimmung von ϱ wiederum dieselbe Gleichung als früher:

$$\varrho^2 = R^2+r^2-(a^2+b^2).$$

Die obige Beziehung der beiden Kreise zu einander ist also reciprok.

Fig. 25. *Wenn irgend zwei Kreise gegeben sind, die sich unter stumpfen Winkeln schneiden, oder ganz in einander liegen* (wie in der 25. Figur), *so gibt jeder Kreis, den wir mit einem constanten, leicht zu bestimmenden Radius aus irgend einem Puncte auf dem Umfange des ersten der beiden gegebenen Kreise, als Mittelpuncte, beschreiben, mit dem zweiten gegebenen Kreise eine gemeinschaftliche Chorde, die immer durch den*

Digitized by Google

Mittelpunct des ersten gegebenen Kreises geht. Wir können die beiden gegebenen Kreise mit einander vertauschen, ohne daſs der constante Radius des veränderlichen Kreises sich anders bestimmt.

In der 25. Figur, wo der eine Kreis (O) ganz innerhalb des andern (C) liegt, schneiden sich in dem Mittelpunct des erstgenannten, innerhalb liegenden, Kreises die gemeinschaftlichen Chorden des zweiten Kreises und jedes einzelnen der Kreise (γ), deren Mittelpuncte sich auf dem Umfange des ersten Kreises befinden, und deren constanten Radius wir leicht bestimmen, indem wir einen beliebigen dieser Kreise construiren.

142. Wir wollen nun zunächst die Gleichung eines Kreises, der zwei gegebene Kreise rechtwinklig schneidet, bestimmen. Legen wir die erste Axe durch die Mittelpuncte der beiden gegebenen Kreise, so haben deren Gleichungen folgende Form:

$$y^2+(x-a)^2 = \varrho^2, \qquad (1)$$
$$y^2+(x-a)^2 = r^2. \qquad (2)$$

Der Mittelpunct eines beliebigen Kreises, der die beiden gegebenen Kreise rechtwinklig schneidet, liegt in irgend einem Puncte der Chordalen derselben, die wir hiernach als zweite Axe nehmen wollen; der Radius desselben ist gleich den Tangenten, die von jenem Puncte an die beiden gegebenen Kreise gezogen werden können, das Quadrat dieses Radius ist also gleich:

$$a^2+y'^2-\varrho^2 = a^2+y'^2-r^2,$$

wenn wir die Ordinate des Mittelpunctes y′ nennen. Für die Gleichung des in Rede stehenden Kreises erhalten wir, diesem entsprechend, folgende:

$$(y-y')^2+x^2 = a^2+y'^2-\varrho^2. \qquad (3)$$

Die Gleichung irgend eines zweiten solchen Kreises hat dieselbe Form, es ändert sich blofs die Ordinate y′, nehmen wir statt derselben y″, so kommt:

$$(y-y'')^2+x^2 = a^2+y''^2-\varrho^2. \qquad (4)$$

Ziehen wir die letzten beiden Gleichungen von einander ab, so verschwinden, wenn wir durch 2(y″—y′) dividiren, die Ordinaten y′ und y″, und wir finden für die Chordale der beiden Kreise (3) und (4):

$$y = 0;$$

d. h. die Gleichung der ersten Axe, oder der Central-Linie der beiden gegebenen Kreise. Diese Linie ist also die gemeinschaftliche Chordale aller Kreise, welche die letztgenannten unter rechten Winkeln schneiden. Wenn also einer dieser Kreise die Central-Linie schneidet, so schneiden alle dieselbe in denselben beiden Puncten. Um diese zu bestimmen, brauchen wir nur in der Gleichung (3) y gleich Null zu setzen. Auf diese Weise kommt:

$$x^2 = a^2-\varrho^2;$$

und, je nachdem α gröfser oder kleiner als ϱ oder gleich ϱ ist, was mit andern Worten heifst, je nachdem die beiden gegebenen Kreise keinen Punct mit einander gemein haben, sich schneiden oder berühren, sind die Werthe von x reell, imaginär oder Null.

Dieselben Werthe, die wir hier für x finden, haben wir früher in der 124. Nummer, für die Abscissen derjenigen beiden Puncte erhalten, zu deren quadratischen Gleichungen wir durch Verbindung der beiden gegebenen Kreis-Gleichungen gelangen können, für die Abscissen, die wir a. a. O. durch m bezeichnet haben. Diese beiden Puncte sind, wie wir leicht zeigen können, zugeordnete Pole für jeden der beiden gegebenen Kreise und mithin für alle diejenigen, welche mit diesen dieselbe Chordale haben. Denn, wenn wir den Anfangs-Punct der Coordinaten in den Mittelpunct des ersten Kreises verlegen, so

Digitized by Google

bekommen wir für die Gleichung der Chordalen $x = -a$ und für die Abscissen der in Rede stehenden Puncte:

$$x = -a \pm \sqrt{a^2+\varrho^2}.$$

Das Product der beiden Werthe von x giebt ϱ^2, die Summe derselben $-2a$; mithin sind jene Puncte zugeordnete Pole für den ersten Kreis. Ebenso läfst sich zeigen, dafs sie's auch für den zweiten Kreis sind, und überhaupt für jeden, der mit den beiden gegebenen dieselbe Chordale hat. Wir haben also folgenden Satz bewiesen:

Fig. 26. *Wenn beliebig viele Kreise gegeben sind, die eine gemeinschaftliche Chordale haben, so werden alle diese Kreise von denselben Kreisen, deren Mittelpuncte nothwendig auf dieser Chordalen liegen, rechtwinklig geschnitten, und alle diese Orthogonal-Kreise haben wiederum die Central-Linie der gegebenen Kreise zur gemeinschaftlichen Chordalen. Wir haben also zwei Reihen von Kreisen, die unter sich eine gemeinschaftliche Chordale haben und sich gegenseitig unter rechten Winkeln schneiden. Die Kreise der einen Reihe gehen alle durch zwei feste Puncte (O und O'), während die der andern sich nicht schneiden; jene zwei Puncte sind für jeden Kreis der letztgenannten Reihe zugeordnete Pole.*

143. Der durch (3) bezeichnete Kreis wird imaginär, wenn der zweite Theil seiner Gleichung negativ wird, d. h. wenn der Mittelpunct dieses Kreises innerhalb der gegebenen Kreise, die in diesem Falle sich schneiden müssen, angenommen wird. Aus einem solchen Puncte kann man also keinen Kreis beschreiben, der die gegebenen rechtwinklig schneidet, aber wir erhalten die Gleichung eines neuen Kreises, wenn wir bei obiger Voraussetzung, das Zeichen des zweiten Theiles der Gleichung (3) ändern. Auf diese Weise kommt:

$$(y-y')^2 + x^2 = \varrho^2 - (a^2+y'^2). \qquad (5)$$

Stellen wir, wie in der vorigen Nummer, mit dieser Gleichung eine zweite von derselben Form zusammen:

$$(y-y'')^2 + x^2 = \varrho^2 - (a^2+y''^2), \qquad (6)$$

so kommt, wenn wir abziehen und durch $2(y''-y')$ dividiren:

$$y = y' + y''. \qquad (7)$$

Fig. 27, 28. Um diesen Ausdruck geometrisch zu deuten, wollen wir von einem einzigen gegebenen Kreise ausgehen. Alsdann können wir jede beliebige gerade Linie, die den gegebenen Kreis schneidet, der obigen Coordinaten-Bestimmung gemäfs, zur zweiten Axe nehmen; die Mitte (O) der auf ihr interceptirten Chorde ist alsdann der Anfangs-Punct der Coordinaten. Die Mittelpuncte der Kreise (5) und (6) fallen in irgend zwei Puncte (C, C') dieser Chorde, und diejenigen beiden Chorden des gegebenen Kreises, MM und M'M', welche in C und C' halbirt werden, sind Durchmesser jener Kreise. Die Gleichung (7) ferner bezeichnet die Chordale dieser Kreise, $P\gamma$, welche also durch P, den Durchschnitt von MM und M'M' geht, und auf CC' senkrecht steht. Hiernach haben wir:

$$y = O\gamma, \quad y' = OC, \quad y'' = OC';$$

und da wir die Gleichung (7) folgendergestalt schreiben können:

$$y' = y - y''$$

so folgt, abgesehen vom Zeichen:

$$OC = C\gamma.$$

Dieses Resultat besteht, welche Lage auch der Punct P, in Beziehung auf den gegebenen Kreis, haben mag; er mag sich innerhalb oder aufserhalb desselben befinden, oder auf dem Umfange desselben liegen. In der Construction können wir von irgend zwei, belie-

big genommenen Chorden MM und M'M', durch deren Mitten alsdann CC' geht, angehen, und somit haben wir allgemein folgenden Satz hewiesen:

Wenn man in einem Kreise irgend zwei beliebige Chorden zieht, und von dem Durchschnitte derselben ein Perpendikel auf diejenige dritte Chorde fällt, welche die Mitten derselben verbindet, so steht der Fufs-Punct dieses Perpendikels so weit von der Mitte einer der zuerst gezogenen Chorden ab, als die Mitte der andern von der Mitte der zuletzt gezogenen Chorde.

144. Statt einer der beiden Chorden, z. B. statt M'M' können wir eine Tangente und den Berührungs-Punct C' als Mitte derselben nehmen. Diefs heifst in der Gleichung (6) y'' so bestimmen, dafs: Fig. 29.

$$\rho^2 - (\alpha^2 + y''^2) = 0.$$

Also auch in Beziehung auf die 29. Figur ist:

$$OC = C'\gamma \quad \text{oder} \quad OC' = C\gamma.$$

Wir hemerken endlich noch, dafs, wenn wir statt heider Chorden, MM und M'M', zwei Tangenten nehmen, wir als besondern Fall den Satz erhalten, dafs diejenige gerade Linie, welche durch den Durchschnitt zweier Tangenten geht und senkrecht auf der Berührungs-Chorde steht, diese letztere halbirt. Die Puncte O und γ fallen nemlich alsdann zusammen.

145. Wir wollen uns nun zur Theorie der Pole zurückwenden. Wenn irgend ein Punct und ein Kreis gegeben sind, so nennen wir mit französischen Schriftstellern Polare dieses Punctes diejenige gerade Linie, welche durch den zugeordneten Pol desselben, der Chordalen beider Oerter parallel gezogen werden kann. Gegenseitig heifst der gegebene Punct: der Pol dieser geraden Linie. Liegt der Punct aufserhalb des Kreises, so ist die Berührungs-Chorde dessen Polare.

Die Gleichung des gegebenen Kreises sey:

$$(y-\beta)^2 + (x-\alpha)^2 = \rho^2, \qquad (1)$$

und die Coordinaten des Punctes seyen y' nnd x'; wir wollen die Gleichung der Polaren desselben nach obiger Definition bestimmen. Wenn wir zu diesem Ende die Gleichung des Punctes unter folgender Form:

$$(y-y')^2 + (x-x)^2 = 0, \qquad (2)$$

nehmen und von der Gleichung des Kreises abziehen, so erhalten wir für die Gleichung der Chordalen:

$$2(y'-\beta)y + 2(x'-\alpha)x = \rho^2 - (\alpha^2-\beta^2) + (y'^2+x'^2). \qquad (3)$$

Die Gleichung einer der Chordalen parallelen Linie hat folgende Form:

$$2(y'-\beta)y + 2(x'-\alpha)x = C, \qquad (4)$$

wo wir durch C irgend eine constante Gröfse bezeichnen; die Parallele ferner, welche durch den gegebenen Punct (y',x') geht, wird durch folgende Gleichung dargestellt:

$$2(y'-\beta)(y-y') + 2(x'-\alpha)(x-x') = 0,$$

oder, wenn wir anders ordnen, durch die Gleichung:

$$2(y'-\beta)y + 2(x'-\alpha) = 2(y'-\beta)y' + 2(x'-\alpha)x'. \qquad (5)$$

Nehmen wir nun (4) für die Gleichung der Polaren, so folgt aus der Definition:

$$C + 2(y'-\beta)y' + 2(x'-\alpha)x' = 2\{\rho^2 - (\alpha^2+\beta^2) + (y'^2+x'^2)\},$$

mithin erhalten wir:

$$C = 2\{(y'-\beta)\beta + (x'-\alpha)\alpha + \rho^2\},$$

wonach denn die Gleichung (4) der Polaren in folgende übergeht:

$$(y'-\beta)(y-\beta) + (x'-\alpha)(x-\alpha) = \rho^2 \qquad (6)$$

Digitized by Google

Wenn wir den Anfangs-Punct der Coordinaten in den Mittelpunct des gegebenen Kreises verlegen, also $\beta = 0$, $\alpha = 0$ setzen, so geht die Gleichung der Polaren in folgende über:

$$y'y + x'x = \rho^2. \qquad (7)$$

146. Wenn wir den Punct (y', x') auf dem Umfange des Kreises annehmen, so sind die Gleichungen (6) und (7) mit den entsprechenden Gleichungen, die wir früher (126) für die Chordale desselben Punctes gefunden haben, oder mit den Gleichungen der Tangente in diesem Puncte identisch.

147. Setzen wir in der Gleichung (6) $y = \beta$, d. h. suchen wir den Durchschnitt der Polaren des Punctes (y', x') mit einer geraden Linie, die der ersten Axe parallel ist, und durch den Mittelpunct des Kreises geht, so kommt, wenn wir die Abscisse dieses Punctes durch X unterscheiden:

$$(x'-\alpha)(X-\alpha) = \rho^2,$$

in welcher Gleichung y' nicht mehr vorkommt. Wie wir also den Punct (y', x') auf der durch die Gleichung:

$$(X-\alpha)(x-\alpha) = \rho^2 \qquad (a)$$

dargestellten geraden Linie fortrücken lassen, wir erhalten immer denselben Punct für den Durchschnitt der Polaren desselben mit der geraden Linie:

$$y = \beta.$$

Die Gleichung (8) ist aber die der Polaren desjenigen Punctes, dessen Coordinaten β und X sind, denn wir erhalten diese Gleichung, wenn wir in (6) diese Werthe für y' und x' setzen. Da wir nun durchaus keine Bestimmung über die Richtung der ersten Axe gemacht haben, und sie jedem Durchmesser des Kreises parallel nehmen können, so ist folgender Satz bewiesen:

Fig. 30. 31. *Die Polaren aller Puncte einer beliebigen geraden Linie (RR) schneiden sich in ein und demselben Puncte (ρ), dem Pole der geraden Linie; und umgekehrt, die Pole aller geraden Linien, welche durch denselben festen Punct gehen, gleichviel welche Lage dieser Punct hat, liegen in einer einzigen geraden Linie, der Polaren des festen Punctes.*

Mit obigem Beweise dieses Satzes können wir den Beweis desselben Satzes, — nur mit der Beschränkung, dafs der Pol innerhalb liege — in der analytischen Geometrie des H. Biot vergleichen. *)

148. Aus der vorigen Nummer folgt unmittelbar, dafs der Pol einer geraden Linie in dem Durchschnitte der Polaren irgend zweier beliebiger Puncte derselben liegt.

149. Wir wollen wieder eine Reihe von Kreisen betrachten, die sich in denselben beiden Puncten schneiden, oder, allgemeiner, ein und dieselbe Chordale haben. Die Gleichungen irgend zweier dieser Kreise seyen:

$$y^2 + (x-\alpha)^2 = \rho^2,$$
$$y^2 + (x-a)^2 = r^2.$$

Ferner seyen y' und x' die Coordinaten irgend eines beliebigen Punctes; alsdann erhalten wir für die Polaren dieses Punctes auf den beiden Kreisen:

$$y'y + (x'-\alpha)(x-\alpha) = \rho^2,$$
$$y'y + (x'-a)(x-a) = r^2.$$

*) Essai de Géométrie analytique par Biot. six. édit. Nro. 120 — 121.

Digitized by Google

Ziehen wir die letzten beiden Gleichungen von einander ab, so kommt:

$$(\alpha - a)(x + x') = \varrho^2 - \alpha^2 - r^2 + a^2,$$

für die Gleichung einer geraden Linie, welche durch den Durchschnitt der beiden Polaren geht. Der letzte Theil dieser Gleichung verschwindet, wenn wir die Chordale zur zweiten Axe nehmen; dividiren wir endlich durch $(a - \alpha)$, so bleibt blofs:

$$x + x' = 0. \qquad (1)$$

Da dieser Ausdruck unabhängig ist von den Constanten der eben betrachteten Kreis-Gleichungen, so ergibt sich folgender Satz:

Wenn mehrere Kreise durch dieselben beiden Puncte M und M' gehen, und man zieht von irgend einem festen Puncte (R) Tangenten an die verschiedenen Kreise, so gehen die Berührungs-Chorden ebenfalls durch einen festen Punct (ϱ), der von der gemeinschaftlichen Chorde, so weit, als der angenommene Punct (R), absteht. Oder allgemeiner: *die Polaren eines beliebigen festen Punctes auf allen Kreisen, die eine gemeinschaftliche Chordale haben, gehen wiederum durch einen festen Punct; beide Puncte stehen gleichweit von der Chordalen ab.* Fig. 32.

Die Beziehung der beiden festen Puncte zu einander ist reciprok; diefs zeigt sogleich die Gleichung (1), die in Beziehung auf x' und x symmetrisch ist.

Liegt einer der beiden festen Puncte auf der Chordalen, so fällt auch der zweite in dieselbe. Diese beiden Puncte sind alsdann, im Fall die gegebenen Kreise sich schneiden, zugeordnete Pole in Beziehung auf denjenigen unter ihnen, der über der gemeinsamen Chorde als Durchmesser beschrieben werden kann.

149. Wenn die gegebenen Kreise sich nicht schneiden, so gehören in die Reihe derselben zwei Puncte, die in Beziehung auf jeden der Kreise zugeordnete Pole sind. Die Polare eines Punctes in Beziehung auf einen zweiten Punct ist, der allgemeinen Definition gemäfs, das Perpendikel in letzterm Puncte auf derjenigen geraden Linie, welche die beiden Puncte verbindet, was auch unmittelbar aus der Gleichung (6) der 145. Nummer folgt, wenn wir in derselben $\varrho = 0$ setzen. Wir wollen hier nur einen Satz hervorheben:

Wenn ein Kreis gegeben ist und man zieht von irgend einem Puncte (R) nach irgend zwei, in Beziehung auf den gegebenen Kreis, zugeordneten Polen (Q, Q') gerade Linien, und errichtet auf diese in den beiden Polen Perpendikel, so schneiden sich diese Perpendikel und die Polare des beliebig angenommenen Punctes in ein und demselben Puncte (R'). Fig. 33.

Indem wir hier abbrechen, bemerken wir nur noch, dafs sich hier eigentlich der früher schon in der 138. Nummer angezogene Satz anschliefst, und ebenso hätten wir den Satz der 148. Nummer schon in der 122. anziehen können.

150. Wenn wir wieder durch:

$$A = 0, \quad B = 0, \quad C = 0, \quad D = 0,$$

u. s. w. allgemeine, auf ein, wie früher, rechtwinkliges oder auch auf ein beliebiges System bezogene Kreis-Gleichungen der Kürze halber bezeichnen, so stellt jedes Aggregat von A, B, C, D u. s. w. gleich Null gesetzt, einen neuen Kreis dar, wenn nicht etwa so viele jener Symbole subtractiv als additiv genommen werden, in welchem Falle wir die Gleichung einer geraden Linie erhalten. Folgende Gleichung z. B.

$$A + B - C - D = 0$$

Digitized by Google

stellt eine gerade Linie dar, die wir leicht durch zwei Puncte construiren können, nemlich durch die beiden Durchschnitte folgender beiden Paare gerader Linien:

$$A-C=0, \quad B-D=0,$$
$$A-D=0, \quad B-C=0.$$

Folgende Gleichung — und nur dies eine Beispiel wollen wir näher betrachten —

$$A=B+C$$

stellt einen Kreis dar. Diese Gleichung wird befriedigt wenn zugleich den neben einander gestellten Gleichungen:

$$A-B=0, \quad C=0,$$
$$A-C=0, \quad B=0,$$

Genüge geleistet wird, was in den Durchschnitten jedes von zwei der gegebenen drei Kreise mit der Chordalen der beiden übrigen geschieht.

Fig. 34. *Wenn also drei Kreise gegeben sind und der eine dieser Kreise (C) wird von der Chordalen der beiden übrigen (MM) geschnitten, und ebenso ein anderer dieser Kreise (C') von der Chordalen der beiden übrigen (M'M'), so liegen die vier Durchschnitts-Puncte (μ, μ, μ', μ') auf einem neuen Kreise.*

Dieser Satz besteht noch, wenn einmal oder beidesmal die zwei Durchschnitte sich in einen Berührungs-Punct vereinigen, er besteht immer auch dann noch, wenn zwei Durchschnitte imaginär werden. In diesem letztern Falle nemlich gibt es einen Kreis, der durch zwei Durchschnitts-Puncte geht und zugleich mit einem der gegebenen Kreise dieselbe Chordale (ideale Chorde) hat, als die beiden andern gegebenen Kreise unter sich haben. Begegnen aber beidesmal die in Rede stehenden Chordalen:

$$A-B=0, \quad A-C=0,$$

den bezüglichen Kreisen;

$$C=0, \quad B=0,$$

nicht, so müssen wir verschiedene Fälle unterscheiden; es bleibt alsdann der Kreis:

$$A=B+C$$

nicht immer reell, er kann imaginär werden; der Uebergang ist dadurch angezeigt, dafs er sich auf einen Punct reducirt. Diese verschiedenen Fälle stellen sich unmittelbar in der Construction dar.

Wir können endlich statt eines der drei gegebenen Kreise einen Punct nehmen; wir können auch zwei, auch alle drei Kreise mit Puncten vertauschen. Auf diese Weise kommen wir zu einer Reihe specieller Sätze; wir können aber hier nicht, wie wir es früher gethan haben, in ein ausführlicheres Detail eingehen.

151. Ehe wir zur Erörterung anderer Beziehungen zweier Kreise zu einander übergehen, wollen wir die Theorie der Chordalen zur Construction der einzelnen, von Appollonius zusammengestellten, Probleme der Tactionen anwenden. Zuerst gehören hierhin die Construction eines Kreises, der durch drei gegebene Puncte geht und eines Kreises, der drei gegebene gerade Linien berührt. Zu beiden Constructionen sind wir auf analytischem Wege geführt worden. Ebenso haben wir die Construction derjenigen beiden Kreise angezeigt, welche durch zwei gegebene Puncte gehen und einen gegebenen Kreis berühren (106). Diese Construction läfst sich nicht geradezu auf den Fall ausdehnen, dafs der zu berührende Kreis in eine gerade Linie übergeht. Für diesen Fall haben wir folgende, der vorigen ähnliche, Construction.

Fig. 35. Seyen M und M' die beiden gegebenen Puncte und sey T'T' die zu berührende gerade Linie. Man ziehe alsdann die gerade Linie MM' und verlängere dieselbe bis zum Durch-

Digitized by Google

schnitt mit TT', dieser Durchschnitt sey C. Beschreibt man erner durch M und M' irgend einen Kreis und legt von C eine Tangente an diesen Kreis, so ist die Länge derselben bis zum Berührungs-Puncte N genommen, für alle beliebigen Kreise, die durch M und M' geben, constant. Also steht auch der Punct, in welchem der gesuchte Kreis die gegebene gerade Linie berührt, um die Länge dieser Tangente CN vom Puncte C ab. Hiernach finden wir sogleich diese beiden Berührungs-Puncte, in welchen die beiden möglichen Kreise, die den Forderungen der Aufgabe Genüge leisten, die gegebene Linie berühren. Es bleibt also blofs noch durch drei Puncte, einmal durch M, M' und T, das andere Mal durch M, M' und T', ein Kreis zu legen übrig.

151. Die allgemeinere Aufgabe, die der letztern entspricht, ist: einen Kreis zu beschreiben, der mit zweien gegebenen Oertern eine gemeinschaftliche Chordale hat und überdiefs eine gegebene gerade Linie berührt. Ein besonderer Fall ist wiederum der, einen Kreis zu beschreiben, der zwei gegebene Puncte zu zugeordneten Polen hat, und zugleich eine gegebene gerade Linie berührt. Die Constructionen sind der zuletzt angezeigten durchaus ähnlich. Im letztern Falle insbesondere errichte man in der Mitte derjenigen geraden Linie, welche die beiden Pole R und R' verbindet, ein Perpendikel, und beschreibe aus dem Durchschnitte desselben mit der gegebenen geraden Linie, aus C, als Mittelpunct einen Kreis, der durch die beiden Pole R und R' geht und die letztgenannte Gerade in T und T' schneidet. Diese beiden Puncte sind diejenigen, in welchen diejenigen beiden Kreise, die den Bedingungen der Aufgabe Genüge leisten, die gegebene Gerade berühren. Die Kreise selbst sind hiernach leicht zu beschreiben, denn ihre Mittelpuncte liegen in den Durchschnitten der Perpendikel in T und T' und der geraden Linie, welche durch die beiden Pole R und R' geht. Fig. 36.

152. Wenn zwei Puncte gegeben sind, so können wir sogleich eine gerade Linie bestimmen, auf welcher der Mittelpunct jedes Kreises liegt, der durch jene beiden Puncte geht; und, gegenseitig, wenn diese Linie und einer der beiden Puncte gegeben ist, so ergibt sich unmittelbar der andere Punct. Wir können ferner nach der bekannten Verfahrungs-Art der 118. Nummer die Construction eines Kreises, dessen Mittelpunct auf einer gegebenen geraden Linie liegt und der einen gegebenen Kreis berührt, auf die Construction eines Kreises zurückführen, der, statt den gegebenen Kreis zu berühren, durch einen gegebenen Punct, den Mittelpunct des letztgenannten Kreises, geht. Da nun endlich die Mittelpuncte aller Kreise, die zwei gegebene gerade Linien berühren, in diejenigen beiden geraden Linien fallen, welche die am Durchschnitte der beiden gegebenen entstehenden Winkel halbiren, so können wir nach den letzten Bemerkungen die beiden Aufgaben construiren: einen Kreis zu beschreiben der zwei gegebene gerade Linien berührt und überdiefs noch, einmal durch einen gegebenen Punct geht, das andere Mal einen gegebenen Kreis berührt. Die erstere Aufgabe läfst vier, die letztere acht Auflösungen zu.

153. Wir wollen uns nun zu der Aufgabe wenden, einen Kreis zu beschreiben, der drei gegebene Kreise berührt. Der Mittelpunct desjenigen Kreises P, der die gegebenen γ, c und C, alle drei innerhalb berührt, d. h. keinen derselben umschliefst, ist als derjenige Punct anzusehen, in welchem die drei gegebenen Kreise, Fig. 37.

Digitized by Google

deren Radien um den Radius des berührenden Kreises vergrößert worden sind, sich schneiden; mit andern Worten: der Chordal-Punct der so bestimmten Kreise. Der Ort der Chordal-Puncte aller Systeme dreier Kreise, die wir erhalten, indem wir die Radien der gegebenen Kreise um beliebige aber gleiche Stücke vergrößern, geht durch den Mittelpunct des zu berührenden Kreises. Dieser Ort aber ist eine gerade Linie. Um dieß zu beweisen, seyen:

$$\begin{aligned}(y-\beta)^2+(x-\alpha)^2 &= \varrho^2,\\ (y-b)^2+(x-a)^2 &= r^2,\\ (y-B)^2+(x-A)^2 &= R^2\end{aligned} \qquad (1)$$

die Gleichungen der drei gegebenen Kreise. Der Chordal-Punct dieser drei Kreise liegt in dem Durchschnitte zweier beliebiger Chordalen; wir wollen ihn durch die beiden Gleichungen:

$$\begin{aligned}2(b-\beta)y+2(a-\alpha)x &= \varrho^2-r^2-(\alpha^2+\beta^2)+(a^2+b^2),\\ 2(B-\beta)y+2(A-\alpha)x &= \varrho^2-R^2-(\alpha^2+\beta^2)+(A^2+B^2),\end{aligned} \qquad (2)$$

bestimmen. Zwischen diesen beiden Gleichungen könnten wir die Werthe der Coordinaten des Chordal-Punctes eliminiren, es genügt uns aber dieselben durch einen Accent von den allgemeinen Werthen von y und x zu unterscheiden. So kommt:

$$\begin{aligned}2(b-\beta)y'+2(a-\alpha)x' &= \varrho^2-r^2-(\alpha^2+\beta^2)+(a^2+b^2),\\ 2(B-\beta)y'+2(A-\alpha)x' &= \varrho^2-R^2-(\alpha^2+\beta^2)+(A^2+B^2).\end{aligned} \qquad (3)$$

Aus den Gleichungen (2) leiten wir auf der Stelle zwei andere Gleichungen zur Bestimmung des Chordal-Punctes dreier Kreise her, die aus denselben Mittelpuncten als die gegebenen Kreise mit Radien beschrieben werden, die um ein gleiches Stück verlängert worden sind; wir brauchen nemlich zu diesem Ende in den angezogenen Gleichungen nur $(\varrho+\varphi)$, $(r+\varphi)$ und $(R+\varphi)$ statt ϱ, r und R zu schreiben. Auf diese Weise erhalten wir:

$$\begin{aligned}2(b-\beta)y+2(a-\alpha)x &= \varrho^2-r^2-(\alpha^2+\beta^2)+(a^2+b^2)+2(\varrho-r)\varphi,\\ 2(B-\beta)y+2(A-\alpha)x &= \varrho^2-R^2-(\alpha^2+\beta^2)+(A^2+B^2)+2(\varrho-R)\varphi.\end{aligned} \qquad (4)$$

Durch die beiden letzten Gleichungen sind die Coordinaten des Chordal-Punctes jener drei Kreise, deren Radien $(\varrho+\varphi)$, $(r+\varphi)$ und $(R+\varphi)$ sind, bestimmt. Wenn wir aber nicht direct eliminiren wollen, so können wir auch diese Gleichungen beliebig zu der Gleichung eines neuen geometrischen Ortes verbinden, der alsdann ebenfalls den in Rede stehenden Punct enthält. Verbinden wir so, daß φ eliminirt wird, so erhalten wir die Gleichung einer Linie, welche die Chordal-Puncte aller besagten Systeme dreier Kreise enthält; denn, da diese Gleichung nicht mehr φ enthält, so würden wir, bei demselben Verfahren, immer zu derselben Gleichung gekommen seyn, wenn wir für φ auch irgend einen andern Werth angenommen hätten. Ziehen wir zuvor die entsprechenden Gleichungen bei (3) und (4) von einander ab, so kommt, wenn wir den gemeinschaftlichen Factor 2 weglassen:

$$\begin{aligned}(b-\beta)(y-y')+(a-\alpha)(x-x') &= (\varrho-r)\varphi,\\ (B-\beta)(y-y')+(A-\alpha)(x-x') &= (\varrho-R)\varphi;\end{aligned}$$

und wenn wir nun die ersten und zweiten Theile der beiden Gleichungen in einander dividiren, so fällt φ aus, und man bekommt:

$$\frac{(b-\beta)(y-y')+(a-\alpha)(x-x')}{(B-\beta)(y-y')+(A-\alpha)(x-x')} = \frac{\varrho-r}{\varrho-R},$$

und nach einer leichten Reduction:

$$y-y' = -\frac{\varrho(a-A)+r(A-\alpha)+R(\alpha-a)}{\varrho(b-B)+r(B-\beta)+R(\beta-b)}(x-x') \qquad (5)$$

Dieß ist die Gleichung des gesuchten Ortes, der also eine gerade Linie ist.

Digitized by Google

Wir bemerken in Beziehung auf die letzten Entwicklungen, dafs es uns darum zu thun war, die letzte Gleichung selbst herzuleiten; der blofse Beweis, dafs der gesuchte Ort eine gerade Linie sey, bedarf fast gar keiner Rechnung; man erkennt sogleich in den Gleichungen (4), dafs die Elimination von φ zu einer linearen Gleichung führt und die Form dieser Gleichungen selbst ergibt sich unmittelbar aus der Form der Chordalen-Gleichung zweier Kreise.

Um die Gleichung (5) zu construiren, brauchen wir blofs den Chordal-Punct der drei gegebenen Kreise zu bestimmen, dann die Radien dieser Kreise um ein beliebiges aber gleiches Stück gröfser zu nehmen und auch für die dadurch bestimmten drei neuen Kreise den Chordal-Punct zu suchen. Durch diese beiden Chordal-Puncte geht die zu construirende gerade Linie, welche den Mittelpunct desjenigen Kreises enthält, der die gegebenen alle drei innerhalb berührt.

Wir überzeugen uns leicht, dafs der Mittelpunct desjenigen Kreises, der die gegebenen alle drei anfserhalb berührt, und also dieselben umschliefst, ebenfalls auf der oben bestimmten geraden Linie (5) liegt. Der Mittelpunct dieses Berührungs-Kreises nemlich, dessen Radius wir durch ψ bezeichnen wollen, können wir als den Chordal-Punct dreier Kreise ansehen, die aus den Mittelpuncten der gegebenen Kreise mit den bezüglichen Radien $(\psi-\varrho)$, $(\psi-r)$ und $(\psi-R)$ beschrieben werden. Nehmen wir für ψ irgend einen beliebigen Werth, so erhalten wir zur Bestimmung des entsprechenden Chordal-Punctes die frühern Gleichungen (4), wenn wir die beliebigen Werthe ψ und φ unter einander vertauschen und die Zeichen der Radien, oder was damit auf Eins hinauskommt, das Zeichen von ψ ändern. Aus jeder der zwiefachen Zeichen-Aenderung folgt, dafs die Elimination von ψ zu derselben Gleichung (5) führt; denn einmal bleibt diese Gleichung dieselbe, wenn wir die Zeichen aller Radien ändern, und das andere Mal können wir auch die eliminirte Gröfse ψ ursprünglich negativ annehmen, d. h. statt die Radien um ein gleiches Stück zu verlängern, dieselben um ein gleiches Stück verkürzen.

Es gibt noch sechs Kreise, welche die drei gegebenen berühren, und diese ordnen sich ebenfalls paarweise zusammen, und zwar der Berührungs-Kreis, welcher jeden beliebigen der drei gegebenen Kreise umschliefst, mit demjenigen, der die beiden andern umschliefst. Die gerade Linie, welche die Mittelpuncte jedes Paares solcher Kreise verbindet, geht auch durch den Chordal-Punct der drei zu berührenden Kreise. Wollen wir diese Linien construiren, so brauchen wir blofs den Radius desjenigen Kreises, der allein umschlossen, oder allein nicht umschlossen wird, um ein beliebiges Stück zu verlängern oder zu verkürzen, und zu gleicher Zeit die Radien der beiden übrigen Kreise um dasselbe Stück zu verkürzen, wenn wir jenen verlängert, oder zu verlängern, wenn wir jenen verkürzt haben: der Chordal-Punct dreier auf diese Weise bestimmten Kreise liegt auf der bezüglichen gesuchten Linie. Auf gleiche Weise bestimmen wir die beiden andern.

Die Gleichungen der vier geraden Linien, von welchen jede die Mittelpuncte zweier der acht möglichen Berührungs-Kreise enthält, können wir demnach in folgende Gleichung:

$$y-y' = -\frac{\varrho(a-A)\pm r(A-\alpha)\pm R(\alpha-a)}{\varrho(b-B)\pm r(B-\beta)\pm R(\beta-b)}(x-x'), \qquad (6)$$

zusammenfassen, wobei die Zeichen in Nenner und Zähler entsprechend genommen werden müssen.*)

*) Wir haben im Texte, um die Art zu bezeichnen, wie die drei gegebenen Kreise von den gesuchten berührt werden, uns des gewöhnlichen Sprach-Gebrauches bedient, und dem gemäfs

154. Die eben angezeigte Construction der in Rede stehenden Linien erleidet mancherlei Modificationen, einmal nach der verschiedenen Bestimmungs-Art des Chordal-Punctes dreier Kreise, und dann nach der verschiedenen Annahme des beliebigen Stückes, das wir anfänglich φ genannt haben. Was letztere betrifft, so können wir z. B. nach einander für φ die Radien der gegebenen Kreise, und zwar mit negativen Zeichen, nehmen; alsdann erhalten wir drei Systeme von zwei Kreisen und einem Puncte, die wir durch folgendes Schema (es ist nemlich durchaus gleichgültig, ob die Radien sich als positive oder negative Gröfsen darstellen) nach den Radien bezeichnen können:

$$\begin{array}{ccc} 0, & r-\varrho, & R-\varrho; \\ r-\varrho, & 0, & R-r; \\ R-\varrho, & R-r, & 0; \end{array}$$

wo die Mittelpuncte der in der ersten, zweiten und dritten Vertical-Columne zusammengestellten Kreise die Mittelpuncte der gegebenen drei Kreise sind, welche ϱ, r und R zu Radien haben. Die Chordal-Puncte dieser drei Systeme liegen in gerader Linie und zwar auf der geraden Linie, die die Mittelpuncte derjenigen beiden Berührungs-Kreise enthält, welche die drei gegebenen entweder alle drei oder keinen derselben umschliefsen.

---

denjenigen Fall als Normal-Fall betrachtet, wo die drei gegebenen Kreise (γ, c und C) eine Lage zu einander haben, wie in der 37. Figur. Im Allgemeinen haben die Berührungs-Kreise in Beziehung auf die gegebenen Kreise sehr verschiedene Lagen, je nach der verschiedenen gegenseitigen Lage der letztgenannten. Wenn wir nur diejenigen beiden Berührungs-Kreise betrachten, deren Mittelpuncte auf der durch die Gleichung (8) dargestellten geraden Linie liegen, so umschliefsen diese Kreise erstens alle beide keinen der drei gegebenen Kreise, und werden von keinem derselben umschlossen, oder, zweitens alle beide umschliefsen die drei gegebenen (werden von diesen umschlossen) oder, drittens, einer der drei Berührungs-Kreise umschliefst keinen der drei gegebenen und der andere umschliefst alle drei (wird umschlossen). Wenn, um einige Beispiele zu geben, zwei gegebene Kreise sich nicht schneiden, und der dritte zwischen beiden und ganz innerhalb ihrer gemeinschaftlichen äufsern Tangenten liegt, so umschliefsen jene Berührungs-Kreise beidesmal keinen der gegebenen Kreise; wenn der dritte Kreis bei obigen Voraussetzungen, beide gemeinschaftlichen Tangenten schneidet, so werden die zu berührenden Kreise beidesmal umschlossen; wenn der dritte Kreis nur eine der gemeinschaftlichen Tangenten schneidet, so umschliefst ein Berührungs-Kreis die gegebenen Kreise, der andere nicht. Wenn zwei gegebene Kreise ganz innerhalb des dritten liegen, so umschliefsen beide in Rede stehende Berührungs-Kreise die beiden ersten Kreise, während sie vom dritten umschlossen werden; wenn zwei Kreise sich schneiden und der dritte innerhalb beider liegt, so umschliefsen beide Berührungs-Kreise den dritten Kreis und werden von den beiden andern umschlossen. Wenn je zwei der drei gegebenen Kreise sich schneiden und zwar so, dafs der Chordal-Punct innerhalb fällt, so umschliefst ein Berührungs-Kreis dieselben, während der andere von ihnen umschlossen wird; schneiden sich zwei Kreise, und schneidet der dritte jeden derselben so, dafs die Durchschnitte der beiden erstern Kreise aufserhalb desselben liegen, so werden beide Berührungs-Kreise umschlossen.

Wenn die drei gegebenen Kreise sich in demselben Punete schneiden, so reducirt sich ein Kreis jedes der vier Paare von Berührungs-Kreisen auf einen Punct, nemlich auf jenen Durchschnitts-Punct der gegebenen Kreise. Wir erhalten also eigentlich nur vier Berührungs-Kreise, und die Constanten derselben sind durch lineare Gleichungen gegeben.

Digitized by Google

Wir können auch auf dreifache Art φ so bestimmen, dafs wir zu Systemen von drei Kreisen kommen, von denen zwei einander gleich sind: wir brauchen nemlich zu diesem Ende nur φ subtractiv und gleich der halben Summe je zweier Radien der drei gegebenen Kreise zu nehmen, so finden wir z. B. wenn wir $\varphi = -\frac{r+\varrho}{2}$ setzen, abgesehen vom Zeichen, folgende Radien:

$$\frac{r-\varrho}{2}, \qquad \frac{r-\varrho}{2}, \qquad R-\frac{r+\varrho}{2}.$$

In diesem Falle wird die Construction des Chordal-Punctes sehr einfach.

155. Es ist zugleich ersichtlich, dafs in den angezeigten Constructions-Weisen durchaus nichts geändert wird, wenn statt eines der drei gegebenen Kreise ein Punct gegeben ist. Die Gleichungen der Linien, von welchen alsdann jede die Mittelpuncte zweier Berührungs-Kreise enthält, können wir in folgender Gleichung:

$$y-y' = -\frac{\varrho(a-A)\pm r(A-\alpha)}{\varrho(b-B)\pm r(B-\beta)}(x-x') \qquad (7)$$

zusammenfassen, wenn wir nemlich statt des Kreises, dessen Radius gleich R ist, einen Punct nehmen, also in der Gleichung (6) R gleich Null setzen. Wir bezeichnen hierbei wieder durch y' und x' die Coordinaten des Chordal-Punctes der drei gegebenen Oerter. Die letzte Gleichung stellt zwei verschiedene gerade Linien dar, und es gibt im Allgemeinen vier Kreise, die den Forderungen der Aufgabe Genüge leisten.

156. Wir wollen zwei Beispiele nehmen, um die Constructionen der in Rede ste- Fig. 38.
henden geraden Linien anschaulich zu machen.

Seyen erstens drei Kreise gegeben, von denen einer von den beiden andern geschnitten wird. Alsdann bestimmt sich der Chordal-Punct durch den Durchschnitt zweier gemeinschaftlicher Chorden. In der 38. Figur sind die drei gegebenen Kreise stärker gehalten, der Chordal-Punct P liegt im Durchschnitte von MP und μP. Es ist ferner das Stück φ, um welches der Radius jedes dieser Kreise verlängert wird, so genommen, dafs von den dadurch bestimmten, in der Figur schwächer gehaltenen, Kreise wiederum einer von den beiden andern geschnitten wird. Wir erhalten alsdann wie eben der Chordal-Punct p durch den Durchschnitt zweier Chorden, Np an νp. Durch P und p geht die gesuchte gerade Linie.

Wenn die drei gegebenen Kreise sich nicht schneiden, so brauchen wir nicht den Chordal-Punct derselben zu suchen, sondern können gleich die Radien so verlängern oder verkürzen, dafs die bezüglichen Kreise sich schneiden und alsdann den Chordal-Punct bestimmen. Durch Wiederholung derselben Construction erhalten wir einen neuen zur Bestimmung der gesuchten geraden Linie nöthigen Punct.

157. Seyen zweitens zwei beliebige Kreise $\gamma\mu$ und c und irgend ein Punct R, der nach der 39. Figur aufserhalb derselben liegt, gegeben. Zieht man bei dieser Annahme vom Fig. 39.
gegebenen Puncte an die beiden gegebenen Kreise Tangenten, so schneiden sich diejenigen beiden geraden Linien τP und tP, welche die Tangenten jedes Paares halbiren, im Chordal-Puncte der drei Oerter, nach der Figur in P. Bezeichnen wir ferner die Radien der beiden gegebenen Kreise durch ϱ und r, und nehmen $\varphi = -\frac{\varrho+r}{2}$, so besteht das System von neuen Kreisen, das auf diese Weise bestimmt wird, statt der beiden gege-

Digitized by Google

benen Kreise aus zweien Kreisen von gleichen Radien $\left(\frac{\rho-r}{2}\right)$, von welchen der erste Kreis in der Figur $\gamma\nu$ ist, und statt des gegebenen Punctes aus einem Kreise RM, dessen Radius gleich ist $\left(\frac{\rho+r}{2}\right)$. (Wir nehmen hierbei auf die verschiedenen Vorzeichen, mit welchen die Radien behaftet erscheinen, keine Rücksicht). Der Chordal-Punct dieses neuen Systems liegt im Durchschnitte derjenigen geraden Linie Kp, welche auf der Central-Linie der beiden gleichen Kreise in deren Mitte senkrecht steht, mit einer der beiden andern Chordalen, für welche wir in der Construction die gemeinschaftliche Chorde λp, der beiden Kreise RM und $\gamma\nu$ genommen haben. Der Chordal-Punct ist demnach p. Durch P und p geht die zu construirende gerade Linie, welche die Mittelpuncte derjenigen beiden Kreise enthält, die durch den gegebenen Punct R gehen und die beiden gegebenen Kreise $\gamma\mu$ und c beide gleichartig berühren.

Wir hätten auch φ gleich $(-\rho)$ oder $(-r)$ nehmen können, alsdann hätten wir wiederum ein System von zwei Kreisen und einem Puncte erhalten, dessen Chordal-Punct gerade wie im ersten Theile der eben angezeigten Construction gefunden wird. Oder, wir hätten auch statt des gegebenen Punctes einen Kreis von beliebigem schicklichem Radius nehmen, und um die Länge dieses Radius die Radien der beiden gegebenen Kreise vergrößern und alsdann den Chordal-Punct, wie in der vorigen Nummer, durch den Durchschnitt gemeinschaftlicher Chorden bestimmen können. — Diese Andeutungen sind für unsere Absicht mehr als hinreichend.

158. Um die Auflösung der in Rede stehenden Probleme, wo drei Kreise oder statt eines derselben ein Punct gegeben ist, zu vollenden, brauchen wir jetzt nur noch Kreise zu construiren, deren Mittelpuncte auf schon bestimmten geraden Linien liegen und die zwei gegebenen Kreise berühren, oder statt einen der Kreise zu berühren, durch einen gegebenen Punct gehen. Diese Constructionen sind früher angezeigt (116—118). Wenn noch zwei Kreise zu berühren sind, so erhalten wir vier Auflösungen, von denen wir aber nur zwei zu construiren brauchen, die beiden andern sind fremde Auflösungen. Wir überzeugen uns hiervon sogleich aus dem Anblick der Figur und wollen in kein Detail hier eingehen. Zum Schlusse bemerken wir nur noch, dafs — wie überhaupt jede lineare Gleichung eine reelle Linie darstellt — wir auch die Gleichungen (6) und (7) der letzten Nummern immer durch die Bestimmung von Chordal-Puncten construiren können, und also auch dann, wenn die Auflösungen der Aufgabe unmöglich werden.

159. Es sind noch zwei Probleme der Tactionen übrig, nemlich einen Kreis zu beschreiben, der zwei gegebene Kreise und eine gegebene gerade Linie berührt, und einen Kreis zu beschreiben, der einen gegebenen Kreis und eine gegebene gerade Linie berührt und zugleich durch einen gegebenen Punct geht. Diese beiden Aufgaben ordnen sich wie die beiden vorigen zusammen, und überhaupt sind die nächstfolgenden Entwicklungen den vorhergehenden ganz analog:

Seyen:

$$(y-\beta)^2+(x-\alpha)^2 = \rho^2, \qquad (1)$$
$$(y-b)^2+(x-a)^2 = r^2,$$

die Gleichungen zweier gegebenen Kreise, alsdann ist:

$$2(b-\beta)y+2(a-\alpha)x = \rho^2-(\alpha^2+\beta^2)-r^2+(a^2+b^2),$$

die Gleichung ihrer Chordalen. Nehmen wir die gegebene gerade Linie zur zweiten Axe, so ist ihre Gleichung

$$x = 0,$$

und legen wir überdiefs den Anfangs-Punct der Coordinaten in den Durchschnitt dieser Linie mit jener Chordalen, so haben wir folgende Beziehung zwischen den Constanten der beiden Kreis-Gleichung:

$$\rho^2-(\alpha^2+\beta^2)-r^2+(a^2+b^2) = 0.$$

Wenn wir nun ferner die Radien der gegebenen Kreise beide um ein gleiches Stück φ gröfser nehmen, und um dasselbe Stück die gegebene gerade Linie parallel mit sich selbst nach der positiven oder negativen Seite der x hin fortrücken lassen, so erhalten wir, mit Berücksichtigung der Bedingungs-Gleichung:

$$(b-\beta)y+(a-\alpha)x = (\rho-r)\varphi, \qquad (2)$$

für die Gleichung der Chordalen der beiden neuen Kreise, und

$$x = \pm\varphi \qquad (3)$$

für die Gleichung der neuen geraden Linie. Wenn wir aus der letzten Gleichung den Werth von φ nehmen und in die vorhergehende substituiren, so kommt, wenn wir ordnen:

$$y = -\frac{(a-\alpha)\pm(r-\rho)}{b-\beta}x, \qquad (4)$$

eine lineare Gleichung, die nicht mehr φ enthält. Die durch diese Gleichung dargestellten beiden geraden Linien sind also der Ort aller Durchschnitte der durch (2) und (3) bezeichneten geraden Linien, wenn wir in diesen Gleichungen nach einander für φ jeden beliebigen Werth nehmen. Zu derselben Gleichung (4) wären wir gekommen, wenn wir die gegebene gerade Linie immer nach derselben, etwa nach der negativen Seite der x, fortgerückt, also in der Gleichung derselben, in (3), φ immer mit negativen Zeichen genommen hätten, zugleich aber in der Gleichung (2) φ einmal positiv, das andere mal negativ setzen. In der Construction entspricht dem letztern Falle entweder eine Verkürzung der Radien, so dafs diese gleich $(\rho-\varphi)$ und $(r-\varphi)$ werden, oder auch dafs für dieselben diese Ausdrücke mit dem entgegengesetzten Zeichen, also $(\varphi-\rho)$ und $(\varphi-r)$ genommen werden.

Wenn wir erstens den Radius eines der beiden gegebenen Kreise um ein beliebiges Stück φ verkürzen und den Radius des andern Kreises um dasselbe Stück verlängern, dann zweitens jenen Radius verlängern, während wir diesen verkürzen, und beidesmal die gegebene gerade Linie um das Stück (φ) parallel mit sich sich selbst fortrücken lassen, so brauchen wir nur, um die Gleichung (4) für diese Fälle zu modificiren, nach einander das Zeichen von ρ und r zu ändern. Auf diese Weise kommt:

$$y = -\frac{(a-\alpha)\pm(r+\rho)}{b-\beta}x, \qquad (5)$$

und wenn wir die Gleichungen (4) und (5) in eine Form zusammenfassen

$$y = -\frac{(a-\alpha)\pm(r\mp\rho)}{b-\beta}x. \qquad (6)$$

160. Wir hätten die Resultate der vorigen Nummer unmittelbar aus der 153. Nummer und den nachstehenden Bemerkungen folgern können. Wenn nemlich eine gerade Linie in einem beliebigen Puncte von verschiedenen Kreisen berührt wird, so nähert sich derjenige Kreis, dessen Radius am gröfsten ist, am meisten dieser geraden Linie: wir können dieselbe als die Gränze zwischen denjenigen Kreisen, die auf der einen Seite

Digitized by Google

und denjenigen, die auf der andern Seite liegen, ansehen, so dafs der Uebergang von diesen zu jenen dadurch geschieht, dafs die Radien unendlich werden. Was also für Kreise von jedem beliebigen Radius gilt, gilt auch wenn Kreise mit geraden Linien vertauscht werden. Solche Schlufs-Weisen, die, wie mir billig scheint, in der Behandlung der Geometrie im Sinne der Alten durchaus nicht Platz finden dürfen, lassen sich durch algebraische Entwicklungen unterstützen, und gewinnen auf diese Weise volle Evidenz. In unserm Falle kommt Alles darauf an, eine gerade Linie durch eine Kreis-Gleichung auszudrücken. Auf solche Ausdrücke sind wir gewissermaafsen schon in der 123. Nummer gestofsen. Denn, wenn wir daselbst $\mu = -1$ nehmen, so stellt die Gleichung (2)

$$y^2+x^2-2mx = \varrho^2-\alpha^2$$

die Chordale der beiden gegebenen Kreise dar, also nach der dort gemachten Axen-Bestimmung, die zweite Axe. In obiger Voraussetzung wird m unendlich; um auf die Gleichung der zweiten Axe:

$$x = 0,$$

zu kommen, brauchen wir blofs alle Glieder obiger Gleichung, die nicht m, gleichviel ob y und x, enthalten, zu vernachläfsigen.

Es folgt zugleich aus der eben angezogenen Nummer, dafs wenn ein Kreis und eine gerade Linie gegeben sind, wir die gegebene gerade Linie als Chordale der beiden Oerter betrachten können, und dafs mithin der Chordal-Punct zweier Kreise und einer geraden Linie in dem Durchschnitte der letztern mit der Chordalen der beiden erstern liegt. In der vorstehenden Nummer haben wir also den Anfangs-Punct der Coordinaten in den Chordal-Punct gelegt; wollen wir also für dieselbe die End-Gleichung der 153. Nummer umformen, so ist zunächst $y' = x' = 0$ und es kommt:

$$y = -\frac{\varrho(a-A)\pm r(A-\alpha)\pm R(\alpha-a)}{\varrho(b-B)\pm r(B-\beta)\pm R(\beta-b)}\,x. \qquad (7)$$

Soll nun die dritte Kreis-Gleichung:

$$(y-B)^2+(x-A)^2 = R^2,$$

die zweite Axe darstellen, so ist B gleich Null (oder hat irgend einen endlichen Werth), ferner sind A und R gleich und zwar gröfser als jede gegebene Gröfse. Setzen wir also in der Gleichung (7) A und R gleich, dividiren durch den Werth derselben Nenner und Zähler des Coefficienten von x, so finden wir mit Vernachläfsigung der verschwindenden Gröfsen:

$$y = -\frac{(a-\alpha)\pm(r\mp\varrho)}{b-\beta}\,x, \qquad (8)$$

gerade dieselbe Gleichung als oben.

Wir können hier noch weiter gehen, und zeigen, wie die allgemeine Gleichung (7), gehörig modificirt, diejenigen geraden Linien, welche die Mittelpuncte der Berührungs-Kreise erhalten, auch dann noch darstellt, wenn wir für zwei der drei gegebenen Oerter gerade Linien nehmen. Die Stelle des Chordal-Punctes vertritt alsdann offenbar der Durchschnitt der beiden gegebenen geraden Linien, gleichviel welche Lage der dritte gegebene Ort auch haben mag. Legen wir also den Anfangs-Punct der Coordinaten in diesen Durchschnitt, und nehmen als zweite Axe die eine der gegebenen geraden Linien, so haben wir zunächst wiederum die Gleichung (8). Soll ferner die Gleichung:

$$(y-b)^2+(x-a)^2 = r^2,$$

eine gerade Linie darstellen, so können wir uns diese Linie, wie eben, als die Gränze

derjenigen Kreise denken, von welchen dieselbe in irgend einem Puncte, für den wir sogleich den Anfangs-Punct nehmen wollen, berührt wird, wenn wir nemlich die Radien jener Kreise immer gröfser nehmen. Betrachten wir irgend einen dieser Kreise, und nehmen die letzte Gleichung für die seinige, so überzeugen wir uns leicht, auch ohne die Figur zu zeichnen, dafs

$$\frac{b}{r} = \sin\omega, \quad \frac{a}{r} = \cos\omega,$$

wenn wir den Winkel, welchen die zweite gegebene gerade Linie mit der ersten, also mit der Axe y bildet, ω nennen.*) Diese Gleichungen bestehen auch bei immer gröfser werdendem r. Wenn wir daher bei dieser Annahme Nenner und Zähler des Coefficienten von x in der Gleichung (8) durch r dividiren, für $\frac{b}{r}$ und $\frac{a}{r}$ jene Werthe substituiren und die verschwindenden Gröfsen vernachlässigen, so kommt:

$$y = -\frac{\cos\omega \pm 1}{\sin\omega},$$

eine Gleichung, die wir in folgende beide einzelne Gleichungen:

$$y = -\frac{1+\cos\omega}{\sin\omega} = -\cot g\,\frac{\omega}{2},$$

$$y = \frac{1-\cos\omega}{\sin\omega} = \tang\,\frac{\omega}{2},$$

auflösen können. Diese Gleichungen bezeichnen, wie zu erwarten stand, diejenigen beiden geraden Linien, welche die, am Durchschnitte der beiden gegebenen entstehenden, Scheitel-Winkel halbiren.

Wir werden uns niemals, als einzigen Beweises, solcher Entwicklungen, die den letzten ähnlich sind, bedienen; wir erkennen aber zugleich an, dafs solchen Beweisen nichts an Strenge abgeht. Denn, auf was für Formen auch die Rechnung uns führen mag, wir können mit diesen Formen weiter rechnen. Diesen Grundsatz müssen wir festhalten

---

*) Nach den Bestimmungen des Textes mufs die Gleichung:

$$(x-b)^2 + (x-a)^2 = r^2, \qquad (a)$$

mit folgender Gleichung identisch seyn:

$$y = \tang\left(\omega + \frac{\pi}{2}\right) \cdot x. \qquad (b)$$

Dieſs gibt zuvörderst:

$$a^2+b^2 = r^2, \qquad (c)$$

wonach die Gleichung (a), wenn wir zugleich alle Glieder derselben durch 2b dividiren, folgende wird:

$$\frac{y^2}{2b} - y + \frac{x^2}{2b} - \frac{a}{b}x = 0,$$

und diese Gleichung geht in (b) über, wenn

$$\frac{a}{b} = -\tang\left(\omega + \frac{\pi}{2}\right), \text{ mithin } \frac{b}{a} = \tang\,\omega, \qquad (d)$$

und wir überdiefs b und also auch a und r unendlich nehmen. Die Zusammenstellung von (c) und (d) gibt, wie im Texte:

$$\frac{b}{r} = \sin\omega, \qquad \frac{a}{r} = \cos\omega.$$

Digitized by Google

einen Grundsatz, den wir stillschweigend bei der Auflösung jeder algebraischen Gleichung annehmen, denn, sonst müfsten wir ja alle Gleichungen, durch die wir stufenweise zum Resultate gelangen, näher prüfen, ob sie nicht Ausdrücke enthalten, die unendlich oder imaginär werden.

161. Wir überzeugen uns leicht, dafs jede der vier geraden Linien, welche die Gleichung (6) bezeichnet, die Mittelpuncte zweier derjenigen Kreise enthält, die die beiden gegebenen Kreise und die gegebene gerade Linie berühren; solcher Kreise sind mithin
Fig. 40. acht möglich. In der 40. Figur z. B. seyen C und γ die beiden zu berührenden Kreise, K und K' zwei gesuchte. Nehmen wir den ersten der zuletzt bezeichneten Kreise und nennen dessen Radius φ, so liegt der Mittelpunct dieses Kreises in einem der beiden Durchschnitte, der aus C und γ mit Radien, die gleich sind $(r+\varphi)$ und $(\varrho+\varphi)$ beschriebenen Kreise, durch welchen Mittelpunct auch diejenige gerade Linie nn geht, welche der gegebenen NN parallel ist, und von ihr um dasselbe Stück φ absteht. Nehmen wir nun an, dafs die beiden gegebenen Kreise nach der negativen Seite der x hin liegen, so ist die Gleichung jener Parallelen

$$x = -\varphi,$$

mithin liegt der Mittelpunct des Berührungs-Kreises K, auf einer geraden Linie, deren Gleichung folgende ist:

$$y = -\frac{(a-\alpha)-(r-\varrho)}{b-\beta}\,x. \qquad (9)$$

Auf derselben geraden Linie liegt der Mittelpunct des Kreises K'.

Fig. 41. In der 41. Figur liegt der Mittelpunct des Kreises K in einem der Durchschnitte zweier Kreise, die aus C und γ mit Radien beschrieben werden, die, wenn wir wiederum durch φ den Radius des Kreises K bezeichnen, gleich sind $(r-\varphi)$ und $(\varphi-\varrho)$. Durch denselben Punct geht auch diejenige gerade Linie nn, die der gegebenen NN parallel ist, und von derselben um dasselbe Stück φ absteht. Die Gleichung dieser Linie ist, wenn wir diejenige Seite, auf welcher die Mittelpuncte der gegebenen Kreise liegen, als die positive Seite der x betrachten:

$$x = \varphi;$$

mithin liegt der Mittelpunct des Berührungs-Kreises K auf einer geraden Linie, die wiederum durch die Gleichung (9) dargestellt wird. Auf derselben geraden Linie liegt der Mittelpunct des Kreises K'.

Fig. 42. 162. Nichts ist nun leichter als die, durch die vier in der Gleichung (6) enthaltenen Gleichungen dargestellten, geraden Linien zu construiren. Wir können dieselben, ähnlich wie wir früher verfahren sind, construiren, indem wir irgend zwei Puncte derselben bestimmen; wir können aber auch die Gleichungen (6) geradezu construiren. Nach der frühern Annahme liegt der Anfangs-Punct der Coordinaten in dem Durchschnitte P der gegebenen geraden Linie und der Chordalen der beiden gegebenen Kreise. Die Gleichung der Chordalen ist:

$$(b-\beta)y+(a-\alpha)x = 0;$$

mithin entspricht für dieselbe der Abscisse $-(b-\beta)$ eine Ordinate $(a-\alpha)$. Es ist aber $(b-\beta)$ die Projection der geraden Linie, welche die Mittelpuncte der beiden Kreise verbindet auf die zweite Axe, nach der Figur also MN. Nehmen wir nun auf der ersten Axe nach der negativen Seite hin ein Stück PQ gleich MN, und legen durch Q eine gerade Linie, die der zweiten Axe parallel ist, so ist die Ordinate des Durchschnittes dieser

Linie mit den Chordalen, QR, gleich $(a-\alpha)$. Tragen wir nun von diesem Puncte R aus, nach beiden Seiten hin Stücke auf, die gleich sind $(r+\rho)$ und $(r-\rho)$, so ergibt sich:

$$a-\alpha + (r-\rho) = QV,$$
$$a-\alpha - (r-\rho) = QW,$$
$$a-\alpha + (r+\rho) = QT,$$
$$a-\alpha - (r-\rho) = QU,$$

und wenn wir durch P und jeden der Puncte V, W, T und U eine gerade Linie legen, so erhalten wir auf diese Weise die vier geraden Linien, die durch die Gleichung:

$$y = -\frac{a-\alpha \pm (r \mp \rho)}{b-\beta} x, \qquad (6)$$

dargestellt werden.

Sind die Radien der beiden gegebenen Kreise gleich, so fallen die beiden geraden Linien OW und OV in eine einzige zusammen, auf der also die Mittelpuncte von vier Berührungs-Kreisen liegen.

Wenn einer der beiden gegebenen Kreise, etwa der Kreis γ, auf einen Punct sich reducirt, so ändert sich die eben angewandte Schluſs-Weise nicht im Mindesten, die Gleichung (6) geht aber, indem wir ρ gleich Null setzen, in folgende Gleichung über:

$$y = -\frac{a-\alpha \pm r}{b-\beta} x, \qquad (10)$$

welche alsdann nur noch zwei einzelne Gleichungen in sich begreift. Durch die Construction derselben, die der eben angezeigten vollkommen entspricht, erhalten wir zwei gerade Linien, von welchen jede die Mittelpuncte zweier der vier möglichen Berührungs-Kreise enthält.

Die beiden in Rede stehenden Probleme der Tactionen sind also auf die bekannten Constructionen von Kreisen zurückgeführt, deren Mittelpuncte in einer gegebenen geraden Linie liegen und die eine gegebene gerade Linie und einen gegebenen Kreis berühren, oder, statt einen Kreis zu berühren, durch einen gegebenen Punct gehen (150—152). Wir gehen in keine weitere Ausführungen hier ein (später werden wir noch neue Constructionen der Probleme der Tactionen geben), und wollen nun andere Beziehungen von Kreisen zu einander betrachten.

163. Wenn zwei Kreise, die zu einander irgend eine beliebige Lage haben, gegeben sind, und wir ziehen in beliebiger Richtung in denselben zwei parallele Radien, so geht diejenige gerade Linie, welche die Endpuncte dieser Radien verbindet, immer durch einen oder den andern von zweien festen Puncten der Central-Linie, je nachdem die Endpuncte der Radien auf dieselbe oder auf entgegengesetzte Seite dieser Linie fallen. Es ist leicht dieſs zu zeigen. Seyen:

$$y^2 + x^2 = R^2,$$
$$y^2 + (x-\alpha)^2 = \rho^2,$$

die Gleichungen der beiden Kreise, alsdann ist:

$$y = 0$$

die Gleichung der Centralen. Nennen wir ferner die Winkel, welche die parallelen Radien mit dieser Linie, also mit der ersten Axe bilden, φ, so ist die Gleichung derjenigen geraden Linie, welche durch die Endpuncte dieser Radien, also durch die Puncte $(R \sin\varphi, R\cos\varphi)$ und $(\rho \sin\varphi, (\rho\cos\varphi + b))$ geht, folgende:

$$y - R\sin\varphi = \frac{(R-\rho)\sin\varphi}{(R-\rho)\cos\varphi - \alpha}(x - R\cos\varphi),$$

und diese Gleichung gibt, wenn wir in derselben $y = o$ setzen, nach einer ganz einfachen Reduction für den Durchschnitt mit der Centralen:

$$x = \frac{Ra}{R-\varrho},$$

einen Ausdruck, unabhängig von φ. Wir haben hierbei vorausgesetzt, dafs die Endpuncte beider Radien auf derselben Seite der ersten Axe liegen; betrachten wir aber statt des einen Radius, für welchen wir den Radius des ersten Kreises nehmen wollen, denjenigen, der mit jenem einen Durchmesser dieses Kreises bildet, so müssen wir die bisher in die Rechnung eingeführten Coordinaten des ersten Punctes, oder was damit auf Eins hinauskommt, den Radius R negativ nehmen. Machen wir diese Zeichen-Aenderung im Resultate, so kommt:

$$x = \frac{Ra}{R+\varrho}.$$

Fig. 43. 44. Die auf diese Weise bestimmten beiden festen Puncte der Central-Linie zweier Kreise, die in der 43. und 44. Figur durch S und σ bezeichnet sind, wollen wir Symmetral-Puncte der beiden gegebene Kreise nennen, und zwar S den äufsern, σ den innern Symmetral-Punct.*) Im erstern Puncte vereinigen sich alle diejenigen geraden Linien, welche durch die, auf dieselbe Seite der Centralen fallenden End-Puncte irgend zweier paralleler Radien, wie z. B. durch M und μ oder durch M' und μ' gehen, im innern Symmetral-Puncte alle diejenigen geraden Linien, welche die, nicht auf dieselbe Seite der Centralen fallenden End-Puncte irgend zweier parallelen Radien, z. B. M und μ', oder M' und μ verbinden. Wenn die beiden gegebenen Kreise sich nicht schneiden und einer den andern auch nicht einschliefst, so schneiden sich in den beiden Symmetral-Puncten auch die gemeinschaftlichen beiden äufsern und innern Tangenten. Wenn die beiden Kreise sich schneiden, so sind nur die erstgenannten, wenn ein Kreis ganz in dem andern liegt, gar keine gemeinschaftliche Tangenten möglich; aber auch in diesen Fällen existiren jene Symmetral-Puncte, die wir vermittelst paralleler Radien construiren können. Wenn die beiden gegebenen Kreise sich innerhalb oder aufserhalb berühren, fällt der äufsere oder innere Symmetral-Punct mit dem Berührungs-Puncte zusammen. Dieſs folgt sogleich aus der analytischen Bestimmung jener Puncte; denn, wenn z. B. die beiden Kreise sich aufserhalb berühren, so ist, bei obiger Axen-Annahme, $R+r = a$, mithin reducirt sich die Abscisse des innern Symmetral-Punctes auf

$$x = R,$$

worin wir sogleich die Abscisse des Berührungs-Punctes wieder erkennen.

164. Wenn wir drei Kreise zusammenstellen, so haben je zwei derselben ihren zwiefachen Symmetral-Punct, den wir auf die eben angezeigte Weise construiren können. Bedienen wir uns zu diesem Ende dreier Radien, die alle drei unter einander parallel sind, so folgt unmittelbar aus der 77—81. Nummer folgender Satz:

Wenn irgend drei beliebige Kreise gegeben sind, so können wir dieselben auf dreifache Art zu zwei nehmen, und erhalten mithin drei äufsere und drei innere Symmetral-Puncte; die drei äufsern, so wie jeder derselben und zwei der innern Symmetral-Puncte, liegen in gerader Linie.

---

*) Der von Monge eingeführte Ausdruck ist „point de similitude de deux cercles externe et interne. (Innerer und äufserer Aehnlichkeits-Punct.)

Digitized by Google

Wir können für je drei beliebige Kreise jene vier gerade Linien bestimmen. Wir nennen diese Linien Symmetralen der drei Kreise; diejenige Symmetrale, welche die drei äufsern Symmetral-Puncte enthält, nennen wir die äufsere, jede der drei übrigen eine innere Symmetrale.*)

166. Nehmen wir an, dafs jeder der drei gegebenen Kreise ganz aufserhalb der beiden andern liegt, so giht die vorige Nummer folgenden, zuerst von Monge bemerkten Satz:**) Fig. 45.

Zieht man die gemeinschaftliche Tangenten je zweier von drei gegebenen Kreisen, so liegen die drei Durchschnitte der zusammengehörigen äufsern Tangenten in gerader Linie. Ebenso liegt jeder dieser Durchschnitte mit zweien Durchschnitten der innern Tangenten in gerader Linie.

In der 43. Figur sind SS'S'', Sσ'σ'', S'σσ'' und S''σ'σ'' die vier Symmetralen.

Wir könnten hier den Fall besonders hervorheben, dafs die drei gegebenen Kreise sich gegenseitig berühren.

166. Wir wollen jetzt die Gleichungen der Symmetralen dreier Kreise bestimmen, und zwar zunächst die Gleichung der äufsern Symmetralen, aus der sich alsdann die Gleichungen der übrigen drei unmittelbar ergeben. Seyen zu diesem Ende:

$$(y-\beta)^2+(x-\alpha)^2 = \varrho^2,$$
$$(y-b)^2+(x-a)^2 = r^2,$$
$$(y-B)^2+(x-A)^2 = R^2,$$

die Gleichungen der drei gegebenen Kreise. Nehmen wir die Radien, deren wir uns zur Construction des Symmetral-Punctes der beiden ersten Kreise bedienen, der ersten Axe parallel, so haben wir zur Bestimmung der Coordinaten desselben folgende beiden Gleichungen:

$$y-\beta = \frac{\beta-b}{\alpha-a}(x-\alpha),$$

$$y-\beta = \frac{\beta-b}{\alpha-a+\varrho-r}(x-\alpha-\varrho),$$

von denen die erste die Centrale, die zweite diejenige gerade Linie darstellt, die durch die Endpuncte der Radien geht. Bezeichnen wir die Coordinaten des in Rede stehenden Symmetral-Punctes durch y' und x', so kommt durch eine ähnliche Elimination wie in der 77. Nummer:

$$x' = \frac{\varrho a-r\alpha}{\varrho-r}, \quad y' = \frac{\varrho b-r\beta}{\varrho-r}.$$

Da der Werth von x' unabhängig ist von den Ordinaten der Mittelpuncte und überdiefs die Richtung der zweiten Axe durchaus beliebig ist, so folgt, dafs, wenn ein fester und unveränderlicher Kreis gegeben ist, und ein anderer Kreis von constantem Radius sich so bewegt, dafs der Mittelpunct desselben auf einer geraden Linie bleibt, so rückt der Symmetral-Punct beider Kreise ebenfalls auf einer geraden Linie fort, und diese gerade Linie ist jener parallel. Dieselbe Bemerkung hätten wir auch an die Form des Ausdruckes für y' knüpfen können.

---

*) Nach Monge: „axes de similitude externe et internes." (Aehnlichkeits-Linien.)

**) Monge: Géométrie descriptive. 4ième éd. nro. 44.

Durch bloſse Buchstaben-Vertauschung erhalten wir aus den letzten Gleichungen die folgenden:

$$x'' = \frac{\varrho A - R\alpha}{\varrho - R}, \quad y'' = \frac{\varrho B - R\beta}{\varrho - R},$$

wenn wir die Coordinaten des äuſsern Symmetral-Punctes des ersten und dritten Kreises durch x'' und y'' bezeichnen. Für die Gleichung derjenigen geraden Linie endlich, welche durch die beiden Puncte (y'', x'') und (y', x') geht, findet man nach allen Reductionen:

$$y = \frac{\varrho(h-B)+r(B-\beta)+R(\beta-h)}{\varrho(a-A)+r(A-\alpha)+R(\alpha-a)}x + \frac{\varrho(aB-Ah)+r(A\beta-aB)+R(\alpha h-a\beta)}{\varrho(a-A)+r(A-\alpha)+R(\alpha-a)} \quad (1)$$

Dieſs ist die gesuchte Gleichung der äuſsern Symmetralen. Darin, daſs diese Gleichung in Beziehung auf die gleichnamigen Constanten der drei Kreis-Gleichungen symmetrisch ist, liegt der directe Beweis des Satzes der 163. Nummer, daſs die drei äuſsern Symmetral-Puncte in gerader Linie liegen.

Nach der 162. Nummer erhalten wir unmittelbar die Gleichungen der drei innern Symmetralen (163), wenn wir in der letzten Gleichung nach einander jeden der drei Radien ϱ, r und R negativ nehmen. Hiernach können wir die Gleichungen der vier einzelnen Symmetralen in folgende Gleichung zusammenfassen:

$$y = \frac{\varrho(b-B)\pm r(B-\beta)\pm R(\beta-h)}{\varrho(a-A)\pm r(A-\alpha)\pm R(\alpha-a)}x + \frac{\varrho(aB-Ah)\pm r(A\beta-aB)\pm R(\alpha h-a\beta)}{\varrho(a-A)\pm r(A-\alpha)\pm R(\alpha-a)}. \quad (2)$$

167. Wenn wir die in dem letzten Ausdrucke zusammengezogenen vier Gleichungen mit denen, welche die letzte Gleichung der 153. Nummer:

$$y-y' = -\frac{\varrho(a-A)\pm r(A-\alpha)\pm R(\alpha-a)}{\varrho(b-B)\pm r(B-\beta)\pm R(\beta-b)}(x-x')$$

in sich begreift, einzeln vergleichen, so ist sogleich ersichtlich, daſs die durch die erstgenannten Gleichungen dargestellten geraden Linien auf den, durch die letztgenannten Gleichungen dargestellten, senkrecht stehen. Die äuſsere Symmetrale nemlich steht auf derjenigen Linie senkrecht, welche die Mittelpuncte derjenigen beiden Kreise enthält, die die gegebenen alle drei innerhalb und auſserhalb berühren; von den drei innern Symmetralen steht jedesmal diejenige, welche durch den äuſsern Symmetral-Punct irgend zweier gegebenen drei Kreise geht, auf derjenigen geraden Linie senkrecht, in welcher die Mittelpuncte derjenigen beiden Berührungs-Kreise liegen, die jene zwei entweder nicht oder alle beide umschlieſsen.

Aus den letzten Bemerkungen ergeben sich Modificationen für die oben angezeigten Constructionen des Problems der Tactionen; wir können nemlich diejenigen geraden Linien, welche die Mittelpuncte der Berührungs-Kreise enthalten construiren, indem wir vom Chordal-Punct (y', x') der gegebenen Kreise Perpendikel auf die Symmetralen fällen.

168. Wir können auch von der Symmetralen zweier Kreise und eines Punctes sprechen. Solcher Symmetralen gibt es zwei, deren Gleichungen wir sogleich erhalten, wenn wir in der Gleichung (2) den Radius des Kreises, den wir uns nun auf seinen Mittelpunct reducirt denken, z. B. R, gleich Null setzen. Auf diese Weise kommt:

$$y = \frac{\varrho(h-B)\pm r(B-\beta)}{\varrho(a-A)\pm r(A-\alpha)}x + \frac{\varrho(aB-Ab)\pm r(A\beta-\alpha B)}{\varrho(a-A)\pm r(A-\alpha)}. \quad (3)$$

Diese beiden Symmetralen gehen durch den gegebenen Punct (in welchem zwei Paar Symmetral-Puncte zusammenfallen) und durch den äuſsern und innern Symmetral-Punct

der beiden gegebenen Kreise. Hiervon überzeugen wir uns leicht, wenn wir die Construction bis zum allmähligen Verschwinden des dritten Kreises verfolgen; dasselbe zeigt aber auch die Form der letzten Gleichung. Denn legen wir den Anfangs-Punct der Coordinaten in den gegebenen Punct, setzen mithin B und A gleich Null, so verschwindet das constante Glied der letzten Gleichung, die bezügliche gerade Linie geht also durch den gegebenen Punct. Wir erhalten nemlich bei jener Annahme statt der letzten Gleichung (3) folgende:

$$y = \frac{\varrho h \mp r\beta}{\varrho a \mp r\alpha} x,$$

die wir auch unter folgende Form bringen können:

$$\frac{\varrho a \mp r\alpha}{\varrho \mp r} y = \frac{\varrho b \mp r\beta}{\varrho \mp r} x,$$

woraus denn sogleich auch ferner ersichtlich ist, dafs die durch jene Gleichung dargestellte gerade Linie durch den Punct

$$\left(\frac{\varrho b \mp r\beta}{\varrho \mp r}, \quad \frac{\varrho a \mp r\alpha}{\varrho \mp r}\right),$$

d. h. durch den (äufsern oder innern) Symmetral-Punct geht.

Der Analogie und der leichtern Uebersichtlichkeit wegen, können wir die gerade Linie, welche durch zwei gegebene Puncte geht, als die Symmetrale der beiden Puncte und eines beliebigen Kreises ansehen. Hierzu berechtigen uns sowohl Gränz-Betrachtungen in der Construction, als auch die Form, welche die allgemeine Gleichung (2) annimmt, wenn wir zwei Radien, z. B. R und r gleich Null setzen. Alsdann verschwinden aus der eben angezogenen Gleichung die Constanten ϱ, α und β und dieselbe reducirt sich auf:

$$y = \frac{b-B}{a-A} x + \frac{aB-Ab}{a-A},$$

auf die Gleichung einer geraden Linie, welche durch die beiden gegebenen Puncte (B, A) und (b, a) geht.

169. Wir wollen ferner sehen, was aus der Gleichung der Symmetralen dreier Kreise wird, wenn wir statt eines Kreises eine gerade Linie nehmen. Bedienen wir uns zu diesem Ende derselben Reductions-Art als für den bezüglichen Fall in der 160 Nummer, setzen wir nemlich R gleich A und gröfser als jede gegebene Gröfse, während B einen endlichen Werth behält, so kommt, indem wir zunächst die Gleichung (1) behandeln:

$$y = \frac{\beta-b}{-\varrho+r+\alpha-a} x + \frac{-\varrho b+r\beta+\alpha h-a\beta}{-\varrho+r+\alpha-a}, \qquad (4)$$

und wenn wir reduciren:

$$((r-a)-(\varrho-\alpha))y = (\beta-b)x + (r-a)\beta-(\varrho-\alpha)b.$$

Diese Gleichung können wir endlich noch unter folgende beide Formen bringen:

$$\begin{aligned} ((r-a)-(\varrho-\alpha))(y-b) &= (\beta-b)(x-a+r), \\ ((r-a)-(\varrho-\alpha))(y-\beta) &= (\beta-b)(x-\alpha+\varrho), \end{aligned} \qquad (5)$$

und so ist augenfällig, dafs die in Rede stehende gerade Linie durch die Puncte $(b, a-r)$ und $(\beta, \alpha-\varrho)$ geht, also mit Beziehung auf die 42. Figur durch K und x, durch die Endpuncte zweier paralleler Radien der gegebenen Kreise, mithin auch durch den (äufsern) Symmetral-Punct derselben. Dieſs folgt nemlich aus der 163. Nummer, und, umgekehrt, wenn wir, was leicht ist, geradezu aus der Gleichung (4) beweisen, dafs die bezügliche Linie durch den Symmetral-Punct geht, so erscheint, weil wir als gegebene gerade Linie jede beliebige betrachten können, der Satz der angezogenen Nummer, dafs nemlich die Fig. 42.

Endpuncte irgend zweier beliebigen paralleler Radien in zweien Kreisen mit einem der Symmetral-Puncte in gerader Linie liegen — als eine Modification des Satzes, dafs immer drei Symmetral-Puncte dreier Kreise in gerader Linie liegen.

Durch Zeichen-Aenderung von r und ϱ erhalten wir aus (4) unmittelbar die Gleichungen der drei übrigen Symmetralen, wenn wir dieses Ausdrucks uns auch für den in Rede stehenden Fall bedienen wollen. Diese Linien sind in der Figur durch K'x', K'x und Kx' bezeichnet.

Die zuerst bestimmte und dann die eben genannten drei Linien stehen, ganz der 169. Nummer gemäfs, auf den in der 162. Nummer construirten, daselbst durch (6) bezeichneten geraden Linien, welche die Mittelpuncte der Berührungs-Kreise enthalten, nemlich der Ordnung nach, auf PV, PW, PT und PU senkrecht. Hiernach können wir also wiederum die letztgenannten geraden Linien construiren.

In folgender Gleichung sind die Gleichungen der vier einzelnen Symmetralen zusammengezogen:

$$y = \frac{(\beta - h)x + h(\alpha \pm \varrho) - \beta(a \pm r)}{\alpha \pm \varrho - (a \pm r)}. \qquad (6)$$

Gehen wir noch weiter und fragen nach den Symmetralen eines Kreises und zweier geraden Linien, so brauchen wir nur die letzte Gleichung auf eine ähnliche Weise zu behandeln, wie wir die entsprechende Gleichung (8) in der 160. Nummer behandelt haben.

Den Winkel, welchen die zweite mit der ersten gegebenen geraden Linie, also mit der zweiten Axe, bildet, wollen wir wie dort ω nennen. Dividiren wir nun Nenner und Zähler des zweiten Theiles der Gleichung (6) durch r, substituiren für $\frac{h}{r}$ und $\frac{a}{r}$ ihre Werthe *sin* ω und *cos* ω, und vernachläfsigen diejenigen Ausdrücke, die für immer gröfser werdende Werthe von r verschwinden, so geht die letzte Gleichung (6) in folgende über:

$$y = \frac{-x \sin a + (\alpha \pm \varrho) \sin \omega - \beta(\cos \omega \pm 1)}{-(\cos \omega \pm 1)},$$

wo das Zeichen von 1 im Nenner dem Zeichen von 1 im Zähler entsprechend genommen werden mufs. Diese Gleichung enthält vier von einander verschiedene Gleichungen. Wir können ihr auch folgende Form geben:

$$y - \beta = (x - (\alpha \pm \varrho)) \frac{\sin \omega}{\cos \omega \pm 1},$$

und endlich noch in folgende beide Gleichungen auflösen:

$$y - \beta = (x - (\alpha \pm \varrho)) \operatorname{tang} \frac{\omega}{2}, \qquad (7)$$

$$y - \beta = -(x - (\alpha \pm \varrho)) \operatorname{cotg} \frac{\omega}{2}.$$

Die vier durch diese Gleichungen dargestellten Symmetralen bilden zwei Paar Parallel-Linien, die auf denjenigen beiden geraden Linien, welche die am Durchschnitte der gegebenen geraden Linien entstehenden Winkel halbiren, und mithin die Mittelpuncte der Berührungs-Kreise enthalten, senkrecht stehen (in anderer Ordnung genommen, ihnen parallel sind). In so fern wir die letztgenannten Linien durch Perpendikel auf jene Symmetrale construiren, erhalten wir zwei Paar zusammenfallender Linien: eine Folgerung, zu der wir auch aus der Construction gelangen können. Hierin erblicken wir denn auch gewissermaafsen den Grund, warum auf jeder jener beiden Halbirungs-Linien im Allgemeinen

die Mittelpuncte von vier Berührungs-Kreisen sich befinden, deren immer noch acht möglich sind. Nur wenn einer der gegebenen Kreise sich auf einen Punct reducirt, reducirt sich die Zahl der jedesmaligen Auflösungen auf die Hälfte.

Wenn wir die Gleichungen (7) genauer betrachten, so sehen wir, dafs die bezüglichen Linien durch einen der beiden Puncte $(\beta, (\alpha+\varrho))$ und $(\beta, (\alpha-\varrho))$ gehen, und wir erkennen in diesen Puncten die Durchschnitte des gegebenen Kreises, mit dem vom Mittelpuncte desselben auf die erste der gegebenen geraden Linie, d. h. auf die zweite Axe, gefällten Perpendikel. Diese Puncte sind in der Figur durch S und σ bezeichnet. Ebenso gehen jene Linien durch die Puncte S' und σ', die in derselben Beziehung zu der zweiten gegebenen geraden Linie stehen. Die vier in Rede stehenden Symmetralen bilden also das in den Kreis beschriebene Parallelogramm $SS'\sigma\sigma'$. Fig. 46.

Wir wären durch Gränz-Betrachtungen in der Construction ebenfalls zu den Resultaten dieser Nummer gekommen. Wir haben aber vorgezogen, diese Gränz-Betrachtungen nur auf die analytischen Formel anzuwenden, und auch hier haben uns dieselben nur dazu gedient, um uns auf die Form der Gleichungen (6) und (7) aufmerksam zu machen, Gleichungen, die wir alsdann auf directe, von aller Gränz-Methode unabhängige, Weise construirt haben. Solche Betrachtungen sind übrigens von grofsem Vortheil, um verschiedene Constructionen aus demselben Gesichtspuncte zu übersehen; wir werden in dem Folgenden an Beispielen sehen, wie wir durch Hülfe derselben, Constructionen, die sich auf gegebene Kreise beziehen, unmittelbar auf die Fälle, wo Puncte und gerade Linien an die Stelle von gegebenen Kreisen treten, übertragen, oder wenigstens sogleich zeigen können, dafs, und aus welchem Grunde jene Uebertragung unstatthaft ist.

170. Wir haben in dem Obigen (163) die Symmetral-Puncte zweier Kreise als diejenigen beiden Puncte bezeichnet, in welchen alle gerade Linien, welche durch die End-Puncte irgend zweier beliebiger paralleler Radien gehen, sich vereinigen. Wenn wir, umgekehrt, durch einen der beiden Symmetral-Puncte irgend eine gerade Linie ziehen, welche die gegebenen Kreise schneidet, so werden durch die Durchschnitte auf dem einen Kreise zwei Radien bestimmt, die den durch die Durchschnitte mit dem andern Kreise bestimmten Radien parallel sind. Es sind CM und $\gamma\mu$, so wie CM' und $\gamma\mu'$ unter sich parallel. Fig. 47. 48.

Eine unmittelbare Folgerung aus dem Parallelismus jener Radien ist, dafs auch die Tangenten in M und μ, so wie die Tangenten in M' und μ' unter sich parallel sind, und dafs mithin die durch jene beliebige, durch einen der Symmetral-Puncte gezogene, gerade Linie auf beiden Kreisen bestimmten Abschnitte gleiche Winkel fassen, woraus denn weiter folgt, dafs die Flächen beider Kreise in demselben Verhältnisse getheilt werden.

171. Bei denselben Voraussetzungen als eben, sind offenbar die Winkel CMM', CM'M, $\gamma\mu\mu'$ und $\gamma\mu'\mu$ alle vier einander gleich. Wenn wir daher zwei von den durch die Puncte M, M', μ und μ' bestimmten vier Radien, welche nicht unter einander parallel sind, und nicht demselben Kreise angehören, (wir wollen die Radien CM' und $\gamma\mu$ nehmen) bis zu ihrem Durchschnitte K verlängern, so steht dieser gleichweit von den End-Puncten jener beiden Radien, von M' und μ ab. Wir können daher aus diesem Durchschnitte K als Mittelpunct einen Kreis beschreiben, der durch jene beiden Puncte geht, und dieser Kreis berührt die beiden gegebenen Kreise und zwar, wie aus der Construction ersichtlich ist, gleichnamig wenn die schneidende gerade Linie durch den äufsern, ungleichnamig, wenn sie durch den innern Symmetral-Punct geht. Dem ersten Falle entspricht die 47. Figur, dem zweiten die 48. Figur.

Digitized by Google

Wenn, umgekehrt, irgend ein dritter Kreis zwei gegebene berührt, so geht die gerade Linie, welche die beiden Berührungs-Puncte verbindet, je nachdem die Berührungen gleichnamig oder ungleichnamig sind, durch den äufsern oder innern Symmetral-Punct.

Wir bemerken beiläufig, dafs der letzte Satz ein besonderer Fall des allgemeinen Satzes der 164. Nummer ist.

172. Da die beiden gegebenen Kreise in den Puncten M und μ', so wie in den Puncten M' und μ von demselben Kreise berührt werden, so folgt aus der Theorie des Chordal-Punctes, dafs die gemeinschaftlichen Tangenten in den eben paarweise zusammengestellten Puncten, sich auf der Chordalen der beiden gegebenen Kreise schneiden, nach den bezüglichen beiden Figuren in P und p. Also:

Wenn wir durch einen der beiden Symmetral-Puncte zweier gegebenen Kreise eine beliebige gerade Linie ziehen, welche diesen Kreisen begegnet, so schneiden sich von den vier Tangenten in den vier Durchschnitts-Puncten diejenigen, welche nicht demselben Kreise angehören und nicht parallel sind, auf der Chordalen beider Kreise.

173. Wenn wir ferner die Durchschnitte der beiden Tangenten jedes der beiden gegebenen Kreise, oder, mit andern Worten, die Pole der, durch einen der Symmetral-Puncte gehenden, geraden Linie betrachten, so ist ersichtlich, dafs diejenigen geraden Linien, welche diese Puncte N und ν mit den Mittelpuncten der bezüglichen Kreise C und γ verbinden, parallel sind und überdiefs sich verhalten, wie die Radien der beiden Kreise, woraus denn weiter folgt, dafs jene Puncte N und ν mit dem Symmetral-Puncte S oder σ in gerader Linie liegen. Man überzeugt sich leicht, dafs auch dann, wenn die durch einen der Symmetral-Puncte gezogene gerade Linie die gegebenen Kreise nicht schneidet, die Pole dieser Linie auf den beiden Kreisen mit dem Symmetral-Puncte immer noch in gerader Linie liegen. Also:

Wenn wir durch einen der beiden Symmetral-Puncte zweier Kreise irgend eine gerade Linie legen, so liegen die, in Beziehung auf beide Kreise genommene, Pole derselben in gerader Linie mit dem Symmetral-Puncte.

174. Bringen wir die Resultate der beiden letzten Nummern in Verbindung, so haben wir folgenden Satz:

Wenn man durch einen der beiden Symmetral-Puncte zweier Kreise eine, denselben begegnende, gerade Linie zieht, so bilden die, durch die vier Durchschnitte bestimmten, Tangenten, genugsam verlängert, ein Parallelogramm, welches eine constante gerade Linie, nemlich die Chordale der beiden Kreise, zu einer Diagonalen hat, und dessen andere Diagonale immer durch den Symmetral-Punct geht.

175. Wenn wir eine gerade Linie sich um einen der beiden Symmetral-Punct zweier gegebenen Kreise drehen lassen, so beschreibt der Pol derselben in Beziehung auf jeden jener Kreise eine gerade Linie. Wir erhalten also zwei solcher geraden Linien, die Polaren des Symmetral-Punctes auf den beiden gegebenen Kreisen, deren allgemeine Gleichungen wir hier zunächst entwickeln wollen. Seyen zu diesem Ende:

$$(y-B)^2+(x-A)^2 = R^2,$$
$$(y-\beta)+(x-\alpha) = \rho^2,$$

die Gleichungen der beiden gegebenen Kreise, alsdann ist:

$$(y'-\beta)(y-\beta)+(x'-\alpha)(x-\alpha) = \rho^2,$$

die Gleichung der Polaren des Punctes (y', x') auf dem zweiten Kreise. Nehmen wir für diesen Punct den Symmetral-Punct der beiden Kreise, so ist

$$y' = \frac{\varrho B \mp R\beta}{\varrho \mp R}, \quad x' = \frac{\varrho A \mp R\alpha}{\varrho \mp R},$$

wo wir das negative Zeichen auf den äufsern, das positive auf den innern Symmetral-Punct beziehen müssen; nach einer einfachen Reduction wird hiernach die Gleichung obiger Polaren folgende:

$$(B-\beta)(y-\beta)+(A-\alpha)(x-\alpha) = \varrho(\varrho \mp R). \qquad (1)$$

Für die Gleichung der Polaren auf dem ersten Kreise finden wir nach blofser Buchstaben-Vertauschung:

$$(\beta-B)(y-B)+(\alpha-A)(x-A) = R(R \mp \varrho). \qquad (2)$$

Legen wir den Anfangs-Punct der Coordinaten in dem Mittelpuncte des zweiten Kreises, setzen also α und β gleich Null, so gehen die letzten beiden Gleichungen in folgende beide über:

$$By + Ax = \varrho(\varrho \mp R), \qquad (3)$$

$$B(y-B)+A(x-A) = -R(R \mp \varrho). \qquad (4)$$

176. Legen wir die erste Axe durch die Mittelpuncte der beiden gegebenen Kreise, so bekommen wir für die Gleichungen der in Rede stehenden beiden Polaren folgende:

$$\begin{aligned} (A-\alpha)(x-\alpha) &= \varrho(\varrho \mp R), \\ (\alpha-A)(x-A) &= R(R \mp \varrho). \end{aligned} \qquad (5)$$

Unterscheiden wir nun ferner das durch die erste dieser Gleichungen bestimmte x durch einen, das durch die zweite Gleichung bestimmte x durch zwei Accente, so erhalten wir durch Abziehen dieser Gleichungen:

$$(A-\alpha)(x'+x'') = \varrho^2-\alpha^2-(R^2-A^2).$$

Wenn wir also die Chordale der beiden gegebenen Kreise zur zweiten Axe nehmen, so kommt:

$$x'+x'' = 0.$$

Die auf zweien Kreisen genommenen Polaren jedes ihrer beiden Symmetral-Puncte stehen gleichweit von der Chordalen ab.

Hierin liegt der directe Beweis des früher schon (99) bemerkten Satzes, dafs die Chordale zweier Kreise die gemeinschaftlichen Tangenten derselben halbirt. Es ergibt sich ferner hieraus unmittelbar folgender Satz:

Die Pole jeder geraden Linie, die durch einen der beiden Symmetral-Puncte zweier gegebenen Kreise geht, in Beziehung auf diese Kreise genommen, stehen gleichweit von der Chordalen derselben ab.

177. Lösen wir eine der beiden Gleichungen (5), etwa die erstere, in die beiden einzelnen Gleichungen auf, welche dieselbe enthält, so kommt:

$$\begin{aligned} (A-\alpha)(x-\alpha) &= \varrho(\varrho-R), \\ (A-\alpha)(x-\alpha) &= \varrho(\varrho+R). \end{aligned}$$

Ziehen wir diese beiden Gleichungen von einander ab, nachdem wir zuvor die beiden x durch Accente unterschieden haben, so ergibt sich:

$$x'-x'' = \frac{2R\varrho}{A-\alpha},$$

Abgesehn vom Zeichen ändert dieser Werth von $x'-x''$ sich nicht, wenn wir den Constanten der beiden Kreis-Gleichungen mit einander vertauschen. Hieraus ergibt sich folgender Satz, den wir auch unmittelbar aus der vorigen Nummer hätten herleiten können.

Digitized by Google

Die beiden Polaren des innern und äufsern Symmetral-Punctes stehen auf jedem der beiden Kreise gleichweit von einander ab.

178. Durch Umkehrung erhalten wir aus der 172. Nummer folgenden Satz:

Wenn man von irgend einem Puncte der Chordalen zweier gegebener Kreise an jeden derselben eine Tangente zieht, so liegen die beiden Berührungs-Puncte mit einem der beiden Symmetral-Puncte in gerader Linie.

Fig. 49. Da überdiefs die von einen beliebigem Puncte der Chordalen zweier gegebenen Kreise an dieselben gezogenen Tangenten einander gleich nnd Radien eines Kreises sind, der die gegebenen rechtwinklig schneidet, so haben wir folgenden Satz:

Wenn irgend zwei gegebene Kreise von einem dritten Kreise unter rechten Winkeln geschnitten werden, so sind die vier Durchschnitte (M, μ', N' und ν) die Winkel-Puncte eines Vierecks, dessen gegenüberliegende Seiten sich bei gehöriger Verlängerung in den beiden Symmetral-Puncten (S und σ) schneiden.

Fig. 50. 51. 52. 179. Wir wollen die vier Durchschnitte einer beliebigen geraden Linie mit zweien gegebenen Kreisen, durch deren äufsern oder innern Symmetral-Punct diese Linie geht, durch μ, μ', M und M' bezeichnen, so dafs sich die griechischen nnd lateinischen Buchstaben auf denselben Kreis beziehen, nnd dann wiederum dafs den beiden accentuirten, wie den beiden nicht accentuirten, Buchstaben solche Puncte entsprechen, in denen die Tangenten unter einander parallel sind. Wenn wir bei dieser Bezeichnung durch M und μ', oder durch M' und μ irgend einen beliebigen Kreis legen, so schneidet dieser Kreis die beiden gegebenen Kreise unter gleichen Winkeln. Denn diese Winkel sind offenbar gleich der Summe oder dem Unterschiede derjenigen gleichen Winkel, nnter welchen die gegebenen Kreise von der, durch einen der Symmetral-Puncte gehenden geraden Linie geschnitten werden, und derjenigen, wiederum gleichen, Winkel, welche jene gerade Linie auf dem dritten Kreise bestimmt. In den Constructionen der 50—52. Figur gebt der schneidende Kreis durch M' nnd μ, es ist:

$$\left.\begin{matrix} RM'M - QM'M \\ RM'Q \end{matrix}\right\} = \begin{cases} \varrho\mu\mu' - \varkappa\mu\mu', \\ \varrho\mu\varkappa; \end{cases}$$

wobei wir die bezeichneten Winkel zweier Kreisbogen, wie bekannt, durch Tangenten bestimmen.

Der dritte Kreis schneidet die beiden gegebenen anfser in den Puncten M' nnd μ noch in zwei Puncten N und ν. Die in diesen Durchschnitten entstehenden Winkel sind ebenfalls gleich, woraus denn, wenn wir die eben angewendete Schlufs-Weise geradezu umkehren, folgt, dafs jene beiden Puncte N und ν mit dem Symmetral-Puncte in gerader Linie liegen. Also:

Wenn wir durch einen der beiden Symmetral-Punete zweier gegebenen Kreise eine gerade Linie legen, welche die beiden gegebenen Kreise schneidet, und wir nehmen solche zwei Durchschnitts-Punete, die nicht auf demselben Kreise liegen, und in denen die Tangenten einander nicht parallel sind, so schneidet jeder beliebige Kreis, der durch diese beiden Puncte geht, die beiden gegebenen unter gleichen Winkeln. Diejenige gerade Linie, welche durch die übrigen beiden Durchschnitte dieses Kreises mit den beiden gegebenen geht, geht auch durch den Symmetral-Punct.

Wenn, umgekehrt, zwei gegebene Kreise von einem dritten unter gleichen Winkeln geschnitten werden, so lassen sich durch die vier Durchschnitte zwei gerade Linien legen, die sich in einem der beiden Symmetral-Puncte vereinigen.

180. Da die Puncte N und ν, die der schneidende Kreis, welcher durch M' und μ geht, aufserdem noch auf den beiden gegebenen Kreisen bestimmt, mit dem Symmetral-Puncte in gerader Linie liegen, so folgt durch Umkehrung, dafs ein Kreis, der durch M', μ und durch den Punct N geht, der auf dem einen der beiden gegebenen Kreise liegt, zugleich auch durch einen vierten Punct ν geht, der auf dem andern Kreise durch eine gerade Linie bestimmt wird, die den Punct N mit dem Symmetral-Puncte verbindet. Hieraus folgt folgender Satz:

Wenn wir durch einen der beiden Symmetral-Puncte zweier gegebenen Kreise zwei gerade Linien ziehen, welche diese beiden Kreise schneiden, so können wir durch zwei Durchschnitte der einen und durch zwei Durchschnitte der andern geraden Linie, die nicht auf demselben Kreise liegen, und in denen die Tangenten unter sich nicht parallel sind, einen Kreis legen. Solcher Kreise erhalten wir vier, von welchen jeder die beiden gegebenen Kreise unter gleichen Winkeln schneidet.

181. An die letzte Nummer schliefsen sich die nächstfolgenden Entwicklungen an. Seyen:

$$y^2+x^2 = R^2, \qquad (1)$$

$$(y-\beta)^2+(x-\alpha)^2 = \rho^2, \qquad (2)$$

die Gleichungen zweier gegebenen Kreise: wir wollen in Beziehung auf den ersten dieser Kreise den geometrischen Ort für die zugeordneten Pole aller Puncte, die auf dem Umfange des zweiten Kreises liegen, bestimmen. Die Coordinaten irgend eines dieser Puncte seyen y' und x', alsdann ist die Gleichung der Polaren dieses Punctes auf dem ersten Kreise:

$$yy'+xx' = R^2, \qquad (3)$$

und der zugeordnete Pol liegt in dem Durchschnitte dieser Polaren mit derjenigen geraden Linie, welche den Punct (y', x') mit dem Mittelpuncte des ersten Kreises, den wir zum Anfangs-Puncte der Coordinaten genommen haben, verbindet. Die Gleichung dieser geraden Linie ist:

$$yx'-y'x = 0, \qquad (4)$$

Wenn die beiden Gleichungen (3) und (4) zugleich Statt finden sollen, so bezeichnet (y, x) einen bestimmten Punct, den gesuchten Pol. Wir können die Werthe der Coordinaten dieses Punctes eliminiren, wir können aber auch umgekehrt die Coordinaten des Punctes (y', x') durch die Coordinaten des Punctes (y, x) ausdrücken. Auf diese Weise kommt:

$$y' = \frac{R^2y}{y^2+x^2}, \quad x' = \frac{R^2x}{y^2+x^2}. \qquad (5)$$

Wenn nicht der Punct (y', x') selbst, sondern blofs eine Curve gegeben ist, auf der sich derselbe befindet, und wir also blofs eine Gleichung zwischen y' und x' haben, während wir diese Coordinaten als veränderliche Gröfsen betrachten müssen, so erhalten wir vermittelst der letzten beiden Gleichungen (5) ebenfalls eine Beziehung zwischen y und x, d. h. einen Ort für den gesuchten Pol. Wir haben bei unserer Annahme:

$$(y'-\beta)^2+(x'-\alpha)^2 = \rho^2,$$

wo y' und x' veränderliche Gröfsen bezeichnen, so dafs diese Gleichung identisch ist mit der Gleichung des zweiten gegebenen Kreises. Substituiren wir nun für y' und x' die eben gefundenen Werthe in y und x, so ergibt sich:

$$\left(\frac{R^2y}{y^2+x^2}-\beta\right)^2+\left(\frac{R^2x}{y^2+x^2}-\alpha\right)^2 = \rho^2,$$

Digitized by Google

für den gesuchten Ort der Pole. Entwickeln wir, so erhalten wir aus der letzten Gleichung folgende:

$$R^4 - 2R^2(\beta y + \alpha x) = (\rho^2 - (\beta^2 + \alpha^2))(y^2 + x^2), \qquad (6)$$

also die Gleichung eines Kreises, der wir, durch eine gewöhnliche Umformung, indem wir zugleich der Kürze halber:

$$(\beta^2 + \alpha^2) - \rho^2 = \gamma,$$

setzen, folgende Gestalt geben können:

$$\left(y - \frac{R^2\beta}{\gamma}\right)^2 + \left(x - \frac{R^2\alpha}{\gamma}\right)^2 = \frac{R^4}{\gamma^2}\rho^2. \qquad (7)$$

Weil die Gleichungen (3) und (4) in Beziehung auf die accentuirten und nicht accentuirten Coordinaten symmetrisch sind, so ist auch die Beziehung der durch die Gleichungen (2) und (7) dargestellten Kreise zu einander reciprok, d. h. als geometrischen Ort für die zugeordneten Pole aller Puncte, die auf dem letztbezeichneten Kreise liegen, erhalten wir den Kreis (2). Diese beiden Kreise können wir ganz füglich, rücksichtlich des ersten Kreises, zugeordnete Kreise nennen

Wir wollen den durch die Gleichung (7) dargestellten Kreis noch genauer betrachten. Es folgt aus den Gleichungen (5) für die Voraussetzung, dafs der Punct (y, x) auf dem Umfange des Kreises (1) liegt:

$$x' = x, \quad y' = y,$$

d. h. die Puncte (y, x) und (y', x') fallen zusammen, der gesuchte Kreis geht also durch die Durchschnitte der beiden gegebenen Kreise. Es haben überhaupt die drei Kreise eine gemeinschaftliche Chordale. Dieses allgemeinere Resultat können wir nicht aus den eben angezogenen Gleichungen (5), wenigstens nicht, ohne imaginäre Ausdrücke zu Hülfe zu nehmen, herleiten. Wir überzeugen uns hiervon indefs sogleich, indem wir von der Gleichung (1) nach einander die Gleichungen (2) und (7) abziehen. Die resultirende Gleichung der Chordalen ist in beiden Fällen ein und dieselbe Gleichung, nemlich:

$$2\beta y + 2\alpha x = R^2 + \gamma. \qquad (8)$$

Wenn wir ferner die beiden Gleichungen (2) und (7) mit einander vergleichen, und, der Kürze halber, die letztgenannte folgendermaafsen schreiben:

$$(y-b)^2 + (x-a)^2 = r^2, \qquad (9)$$

so finden wir sogleich:

$$\frac{b}{\beta} = \frac{a}{\alpha} = \pm\frac{r}{\rho},$$

und hieraus ergibt sich:

$$b\rho \mp \beta r = 0, \quad a\rho \mp \alpha r = 0;$$

mithin ist auch, wenn wir durch $(\rho \mp r)$ dividiren:

$$\frac{b\rho \mp \beta r}{\rho \mp r} = 0, \quad \frac{a\rho \mp \alpha r}{\rho \mp r} = 0,$$

d. h. der Anfangs-Punct der Coordinaten, oder der Mittelpunct des ersten der beiden gegebenen Kreise, ist entweder der äufsere oder innere Symmetral-Punct der in Beziehung auf diesen Kreis, conjugirten beiden andern Kreise (2) und (7).

182. Die Gleichung (7) kann in eine lineare Gleichung übergehen, was nemlich dann geschieht, wenn zwischen den Constanten des zweiten gegebenen Kreises folgende Bedingungs-Gleichung:

$$\gamma = (\beta^2 + \alpha^2) - \rho^2 = 0,$$

Digitized by Google

Statt findet. Dieſs ist sogleich ersichtlich, wenn wir zur Gleichung (6) zurückgehen, die sich bei dieser Annahme, indem wir noch durch R^2 dividiren, auf folgende reducirt:

$$2\beta y + 2\alpha x = R^2, \qquad (10)$$

und alsdann die Chordale der beiden gegebenen Kreise (1) und (2) bezeichnet. Obiger Bedingungs-Gleichung entspricht aber der Fall, dafs der zweite Kreis durch den Mittelpunct des ersten Kreises geht. Wenn wir, umgekehrt, von der Gleichung (10), die wir nur als eine Modification der Gleichung (7) zu betrachten haben, ausgegangen wären, und den Ort für die Pole aller Puncte derselben auf dem ersten gegebenen Kreis gesucht hätten, so würden wir als Resultate die Gleichung (2) gefunden haben.

183. Wenn wir nochmals die Gleichung (7) ansehen, so ergibt sich, dafs der durch dieselbe dargestellte Ort immer einen reellen Kreis oder ausnahmsweise eine gerade Linie darstellt; und dieſs bewährt sich auch für den Fall noch, dafs der Radius des ersten Kreises imaginär d. h. R^2 negativ wird. Hieraus ziehen wir durch Umkehrung den Schlufs, dafs einer derjenigen Kreise, in Beziehung auf welche zwei gegebene Kreise (2) und (9) zugeordnete sind, imaginär werden kann. Wir können diese Kreise, deren es im Allgemeinen zwei gibt, leicht construiren, denn nach dem Obigen liegen die Mittelpuncte derselben in den Symmetral-Puncten der beiden gegebenen Kreise, und sie haben mit diesen dieselbe Chordale. Aus der hierdurch angedeuteten Construction *) lassen sich die Fälle herleiten, für welche einer der in Rede stehenden Kreise imaginär wird. Wir ziehen indefs vor, zu den frühern Gleichungen zurückzukehren, und setzen, der Kürze halber: β mithin auch b gleich Null, alsdann gibt die Gleichung (8) folgende Bedingungs-Gleichung für die Realität von R:

$$2\alpha x - a^2 + \rho^2 > 0,$$

wo x der gemeinschaftlichen Chordalen entspricht. Zur Bestimmung des Werthes von x wollen wir von der Chordalen der beiden Kreise (2) und (9), die wir nun als ursprünglich gegeben betrachten, ausgehen und diese Chordale vermittelst der Polaren des (äufsern oder innern) Symmetral-Punctes dieser Kreise, welcher unser Anfangs-Punct der Coordinaten ist, construiren. Für die Gleichungen dieser Polaren haben wir nemlich:

$$-\alpha x = \rho^2 - a^2,$$
$$-ax = r^2 - a^2;$$

folglich erhalten wir nach der 176. Nummer für die Gleichung der Chordalen:

$$x = \frac{a^2-\rho^2}{2\alpha} + \frac{a^2-r^2}{2a},$$

und hiernach geht obige Bedingungs-Gleichung für die Realität von R in folgende über,

$$\frac{\alpha}{a}(a^2-r^2) > 0.$$

*) Wenn ein Kreis und eine denselben nicht schneidende gerade Linie gegeben sind und überdiefs noch ein Punct, der auf derjenigen geraden Linie liegt, welche durch den Mittelpunct des gegebenen Kreises geht und senkrecht auf der gegebenen geraden Linie ist, so können wir auf verschiedene Weise aus dem gegebenen Puncte, als Mittelpuncte, einen Kreis beschreiben, der mit dem gegebenen Kreise die gegebene gerade Linie zur Chordalen hat. Es bietet sich uns z. B. sogleich folgende Construction dar:

Man beschreibe aus irgend einem Puncte der gegebenen geraden Linie, als Mittelpuncte, einen Kreis, der den gegebenen unter rechten Winkeln schneidet, und wiederum aus dem gegebenen Puncte, als Mittelpuncte, einen Kreis, der den eben construirten rechtwinklig schneidet. Dieser letzte Kreis ist der gesuchte.

Digitized by Google

Bei der Interpretation dieser Gleichung müssen wir die beiden Fälle unterscheiden, wo α und a von gleichem oder entgegengesetztem Zeichen sind; dem ersten Falle entspricht, dafs der Anfangs-Punct der Coordinaten im äufsern, dem zweiten Falle, dafs er im innern Symmetral-Puncte liegt. Im erstern Falle wird R, und also der bezügliche Kreis imaginär, wenn r^2 gröfser ist als a^2, d. h. wenn der äufsere Symmetral-Punct innerhalb des Kreises (9) fällt, oder wenn die gegebenen Kreise in einander liegen. Die Gränze der Realität ist, dafs diese Kreise sich innerhalb berühren. Wenn wir den andern Fall nehmen, wo α und a entgegengesetzte Zeichen haben, und wir also denjenigen Kreis betrachten, der aus dem innern Symmetral-Puncte als Mittelpuncte beschrieben wird, so wird dieser Kreis imaginär, wenn, umgekehrt, a^2 gröfser ist als r^2, d. h. wenn jener Symmetral-Punct (derjenige welcher zwischen die Mittelpuncte der beiden gegebenen Kreise
Fig. 53. fällt) aufserhalb liegt. Die äufsere Berührung entspricht der Gränze der Realität. Wenn die beiden gegebenen Kreise sich schneiden, so gibt es immer zwei reelle Kreise, für welche die gegebenen zugeordnete Kreise sind; auf diesen Fall bezieht sich die Construction, in der die beiden in Rede stehenden Kreise C und C' stärker als die beiden gegebenen c und γ gehalten sind.

184. Wir können die Resultate der letzten Nummern in Folgendem zusammenfassen: *Wenn irgend ein Kreis gegeben und irgend ein zweiter Kreis beliebig angenommen wird, so befinden sich die zugeordneten Pole aller Puncte, die auf dem Umfange des letztern liegen, auf dem Umfange eines dritten Kreises. Alle drei Kreise haben dieselbe Chordale und der Mittelpunct des ersten ist einer der Symmetral-Puncte der beiden übrigen, der beiden conjugirten Kreise. Wenn der beliebig angenommene Kreis durch den Mittelpunct des gegebenen geht, so geht der dritte Kreis in eine gerade Linie, der Chordale der beiden erstern, über, und, umgekehrt, die zugeordneten Pole aller Puncte einer beliebig angenommenen geraden Linie liegen auf dem Umfange eines Kreises, der durch den Mittelpunct des gegebenen geht. Ferner, wenn zwei beliebige Kreise gegeben sind, so gibt es zwei andere Kreise, für welche die gegebenen conjugirte Kreise sind, je nachdem die beiden gegebenen sich schneiden, berühren, oder keinen Punct gemeinschaftlich haben, sind diese Kreise beide reell, einer derselben geht in einen Punct über, oder wird imaginär.*

185. Wenn wir drei Kreise zusammenstellen, so können wir für je zwei derselben diejenigen beiden Kreise construiren, für welche sie zugeordnete Kreise sind. Auf diese Weise erhalten wir im Allgemeinen solcher Kreise sechs, von denen drei die äufsern, drei die innern Symmetral-Puncte der gegebenen Kreise zu Mittelpuncten haben; jene drei erstern, so wie je zwei der letztern und einer der erstern drei haben unter sich dieselbe Chordale, und alle diese Chordalen, deren es vier gibt, gehen durch den Chordal-Punct der drei gegebenen Kreise. Um dieſs zu zeigen, wollen wir nur den ersten Fall hervorheben. Bezeichnen wir, der Kürze halber, die drei gegebenen Kreise durch γ, c und C und die aus den äufsern Symmetral-Puncten von C und c, C und γ und von c und γ beschriebenen Kreise durch S, S' und S'', so haben nach der obigen Bestimmung dieser Kreise, von den in folgendem Schema:

C, c, S; C, γ, S'; c, γ, S'';

jedesmalig zusammengestellten drei Kreisen je zwei dieselbe Chordale; es fallen also auch die Chordal-Puncte der drei gegebenen Kreise γ, c und C und der Kreise S, S' und S'' zusammen. Da nun ferner die Mittelpuncte der letztgenannten Kreise in gerader

Linie liegen, so fallen nothwendig die Chordalen je zweier derselben zusammen, denn einerseits sind diese Linien unter einander parallel, und andrerseits geht jede derselben durch einen nicht unendlich weit entfernt liegenden Punct, nemlich durch den Chordal-Punct der drei gegebenen Kreise.

Da die Chordale der drei Kreise S, S′ und S″ auf der äufsern Symmetralen senkrecht steht, und durch den Chordal-Punct der drei gegebenen Kreise geht, so ist sie nach der 167. Nummer, keine andere als die gerade Linie, welche die Mittelpuncte derjenigen beiden Berührungs-Kreise enthält, die die gegebenen Kreise alle drei auf gleiche Weise berühren. Hierdurch ist eine neue Modification für die Construction des Problems der Tactionen angedeutet, da wir jene, die Mittelpuncte der gesuchten Berührungs-Kreise enthaltenden, geraden Linien, nun auch ohne Construction von Chordal-Puncten, bestimmen können. In der 54. Figur z. B. sind γ, c und C die zu berührenden Kreise; aus S, dem äufsern Symmetral-Puncte von C und c, ist ein Kreis beschrieben, der durch die Durchschnitte dieser Kreise geht, und ebenso ein entsprechender Kreis aus S′, dem äufsern Symmetral-Puncte von C und γ. Die beiden so beschriebenen Kreise schneiden sich nach der Figur in A und B; durch diese beiden Puncte geht diejenige gesuchte gerade Linie, welche die Mittelpuncte zweier Berührungs-Kreise enthält. Fig. 54.

186. Die folgenden Entwicklungen schliefsen sich ebenfalls an die Theorie der Symmetral-Puncte an. Wir wollen nemlich zunächst den Ort derjenigen Puncte suchen, von denen aus zwei gegebene Kreise unter gleichen Winkeln gesehen werden, so dafs also die beiden von einem dieser Puncte an jeden dieser Kreise gezogenen Tangenten unter sich gleiche Winkel bilden. Seyen: Fig. 55. 56.

$$(y-\beta)^2+(x-\alpha)^2 = \varrho^2, \qquad (1)$$

$$(y-b)^2+(x-a)^2 = r^2, \qquad (2)$$

die Gleichungen der beiden gegebenen Kreise und y′ und x′ die Coordinaten eines Punctes, den wir beliebig aufserhalb dieser beiden Kreise annehmen wollen. Ziehen wir alsdann von diesem Puncte Tangenten an den ersten Kreis, und bezeichnen den von ihnen eingeschlossenen Winkel durch 2ω, so haben wir offenbar, wenn wir gleich die quadratischen Ausdrücke nehmen:

$$\sin^2\omega = \frac{\varrho^2}{(y'-\beta)^2+(x'-\alpha)^2}. \qquad (3)$$

Für den zweiten Kreis finden wir einen entsprechenden Ausdruck:

$$\sin^2\omega' = \frac{r^2}{(y'-b)^2+(x'-a)^2}, \qquad (4)$$

wenn wir hier den von den Tangenten eingeschlossenen Winkel $2\omega'$ nennen. Vermittelst der letzten Gleichungen können wir, wenn die Coordinaten y′ und x′ gegeben sind, die Winkel ω und ω' bestimmen; sind umgekehrt diese Winkel gegeben, so sind diese Gleichungen Bedingungs-Gleichungen zwischen y′ und x′, die wir nun auch als veränderliche Gröfsen betrachten können. Die auf diese Weise bezeichneten Oerter sind, wie die Form ihrer Gleichungen zeigt, zwei Kreise, die mit den gegebenen beiden concentrisch sind; von allen Puncten derselben erscheinen die bezüglichen gegebenen Kreise unter den gegebenen Winkeln. Jede Beziehung ferner zwischen den beiden Winkeln ω und ω', oder ihren trigonometrischen Functionen, führt uns wiederum zu einer Gleichung zwischen y′ und x′. Setzen wir jene Winkel, mithin auch ihre Sinus einander gleich, so gehen uns, bei Hinweglassung der Accente, die letzten beiden Gleichungen (3) und (4) folgenden Ort:

$$\varrho^2((y-b)^2+(x-a)^2) = r^2((y-\beta)^2+(x-\alpha)^2), \qquad (5)$$

mithin die Gleichung eines neuen Kreises, den wir nun näher bestimmen wollen. Wir sehen sogleich, dafs wir dieselbe Gleichung (5) erhalten hätten, wenn wir die Gleichungen der beiden gegebenen Kreise, nachdem die erste derselben mit r^2, die zweite mit ϱ^2 multiplicirt worden, von einander abgezogen hätten. Es folgt hieraus, dafs der durch (5) dargestellte Kreis mit den beiden gegebenen Kreisen dieselbe Chordale hat.

Wir sehen ferner, dafs, wenn ϱ und r gleich sind, die Gleichung (5) in die Gleichung einer geraden Linie, der Chordalen der beiden gegebenen Kreise, übergeht.

Wenn wir entwickeln, so erhalten wir aus (5):

$$y^2 - 2\frac{\varrho^2 b - r^2\beta}{\varrho^2 - r^2}y + x^2 - 2\frac{\varrho^2 a - r^2\alpha}{\varrho^2 - r^2}x = \frac{r^2(\beta^2+\alpha^2) - \varrho^2(b^2+a^2)}{\varrho^2 - r^2}, \qquad (6)$$

und wenn wir den ersten Theil dieser Gleichung zu zwei vollständigen Quadraten ergänzen, kommt:

$$\left(y - \frac{\varrho^2 b - r^2\beta}{\varrho^2 - r^2}\right)^2 + \left(x - \frac{\varrho^2 a - r^2\alpha}{\varrho^2 - r^2}\right)^2 = \left(\frac{r\varrho}{\varrho^2 - r^2}\right)\left((\beta - b)^2 + (\alpha - a)^2\right). \qquad (7)$$

Zugleich zeigt die Form dieser Gleichung, dafs der bezügliche Kreis immer reell bleibt.

Setzen wir, für einen Augenblick, zum Behuf der Construction dieses Kreises, β und b gleich Null, so verschwindet auch die Mittelpuncts-Ordinate dieses Kreises, d. h. der Mittelpunct desselben liegt auf der Centralen der beiden gegebenen Kreise. Setzen wir zugleich α gleich Null, so geht die Gleichung dieses Kreises, was unmittelbar aus (6) folgt, in folgende über:

$$y^2 + x^2 - 2\frac{\varrho^2 a}{\varrho^2 - r^2}x + \frac{\varrho^2 a^2}{\varrho^2 - r^2} = 0,$$

und wenn wir nun ferner in dieser Gleichung y gleich Null nehmen, so geben uns die Wurzeln der resultirenden Gleichung:

$$x^2 - 2\frac{\varrho^2 a}{\varrho^2 - r^2}x + \frac{\varrho^2 a^2}{\varrho^2 - r^2} = 0,$$

die Durchschnitte des besagten Kreises mit der Central-Linie der beiden gegebenen Kreise, welche wir zur ersten Axe genommen haben. Wir erkennen sogleich, dafs

$$x = \frac{\varrho a}{\varrho - r}, \quad x = \frac{\varrho a}{\varrho + r},$$

die Wurzeln dieser Gleichung sind; denn die Summe dieser beiden Wurzeln gibt den Coefficienten der ersten Potenz von x, mit entgegengesetztem Zeichen genommen, und ihr Product das constante Glied. Jene Werthe von x entsprechen aber den beiden Symmetral-Puncten der gegebenen Kreise: der zu bestimmende Kreis ist also über den Abstand dieser beiden Puncte als Durchmesser zu beschreiben.

Fig. 56. 187. Wenn die beiden gegebenen Kreise sich schneiden, so fällt ein Bogen des eben bestimmten Kreises innerhalb derselben; wenn einer der gegebenen Kreise von dem andern ganz umschlossen wird, so liegt der besagte Kreis ganz innerhalb. Im erstern Falle lassen sich nicht von allen, im letztern Falle von keinem, Puncte desselben Tangenten an die gegebenen Kreise ziehen; für jeden beliebigen Punct desselben, (y', x'), besteht indefs die Gleichung:

$$\frac{\varrho^2}{(y'-\beta)^2 + (x'-\alpha)^2} = \frac{r^2}{(y'-b)^2 + (x'-a)^2},$$

nur dafs die beiden Theile derselben eine andere geometrische Interpretation erhalten, wenn der Punct (y', x') innerhalb der beiden gegebenen Kreise liegt, als wenn er ausserhalb derselben sich befindet. Im Allgemeinen bedeutet diese Gleichung, dafs die

Digitized by Google

Quadrate der Radien der beiden gegebenen Kreise sich wie die Quadrate der Abstände jedes, beliebig auf dem Umfange des eben bestimmten dritten Kreises angenommenen Punctes (y', x') von den Mittelpuncten der gegebenen Kreise verhalten. Hieraus folgt denn, dafs die Flächen dieser letztern in demselben Verhältnisse getheilt (oder erweitert) werden, wenn man aus den beiden Mittelpuncten concentrische Kreise beschreibt, die durch denselben, beliebigen Punct auf dem Umfange desjenigen Kreises gehen, der über dem Abstande der Symmetral-Puncte der beiden gegebenen Kreise als Durchmesser beschrieben werden kann.

Wenn der Punct (y', x') innerhalb des ersten Kreises liegt, wie in der 56. Figur der Punct M in Beziehung auf den Kreis γ, und wir construiren den Pol dieses Punctes, der in μ fällt, so ist, wenn wir, um kurz zu seyn, gleich auf die Figur verweisen:

$$\frac{1}{\sin^2\omega} = \frac{1}{\sin^2\varphi} = \frac{\varrho^2}{(y'-\beta)^2+(x'-\alpha)^2},$$

wo wir durch 2ω den Winkel bezeichnen, welche die beiden von μ, dem Pole des Punctes (y', x') an den ersten Kreis gezogenen Tangenten mit einander bilden. Da wir für den entsprechenden Ausdruck rücksichtlich des zweiten Kreises einen durchaus gleichgebildeten Ausdruck erhalten, so haben wir folgende Ergänzung des in dem Vorstehenden enthaltenen Satzes:

Wenn zwei gegebene Kreise sich schneiden oder ganz in einander liegen, so fällt derjenige Kreis, welcher über den Abstand der beiden Symmetral-Puncte als Durchmesser beschrieben wird, zum Theil oder ganz innerhalb der beiden gegebenen Kreise; wenn wir alsdann für irgend einen innerhalb liegenden Punct des Umfanges dieses Kreises auf den beiden gegebenen Kreisen die zugeordneten Pole suchen, so werden von diesen Polen aus die bezüglichen gegebenen Kreise unter gleichen Winkeln gesehen.

188. Wenn wir ferner drei Kreise zusammenstellen, so können wir über die Abstände der Symmetral-Puncte je zweier dieser Kreise, als Durchmesser, neue Kreise beschreiben, deren Gleichungen wir nach den vorigen Nummern sogleich erhalten. Die Gleichung des dritten gegebenen Kreises sey:

$$(y-B)^2+(x-A)^2 = R^2;$$

bezeichnen wir alsdann durch $2\omega''$ denjenigen Winkel unter welchem dieser Kreis von einem beliebig angenommenem Puncte (y', x') aus gesehen wird, so haben wir, ähnlich wie in der 185. Nummer:

$$\sin^2\omega'' = \frac{R^2}{(y'-B)^2+(x'-A)^2}.$$

Stellen wir endlich für einen Augenblick die Ausdrücke für $\sin^2\omega$, $\sin^2\omega'$ und $\sin^2\omega''$ durch A, A' und A'' dar, so sind, indem wir y' und x' als veränderliche Gröfsen betrachten,

$$\begin{aligned} A - A' &= 0, \\ A - A'' &= 0, \\ A' - A'' &= 0, \end{aligned} \qquad (s)$$

die Gleichungen jener drei in Rede stehenden Kreise. Zwei dieser Gleichungen bedingen die dritte, d. h. die drei bezüglichen Kreise haben ein und dieselbe Chordale; sie schneiden sich also, wenn überhaupt Durchschnitte Statt finden, in denselben beiden Puncten. Die Abstände jedes dieser Puncte von den Mittelpuncten der drei gegebenen Kreise verhalten sich wie die Radien derselben. Liegen diese Puncte aufserhalb, so werden von denselben aus die drei gegebenen Kreise unter gleichen Winkeln gesehen.

Da ferner jeder dieser Kreise mit den beiden gegebenen, zu denen er gehört, dieselbe Chordale hat, so geht auch die gemeinschaftliche Chordale der Constructions-Kreise durch den Chordal-Punct der drei gegebenen.

Wenn man aber über den Abständen der innern und äufsern Symmetral-Punete je zweier von drei gegebenen Kreisen als Durchmesser drei neue Kreise beschreibt, so haben diese ein und dieselbe Chordale, und diese geht durch den Chordal-Punct der gegebenen Kreise. *)

Da die Mittelpuncte solcher Kreise, welche dieselbe Chordale haben, in gerader Linie liegen, so ergibt sich noch folgender Satz:

Die drei Mitten zwischen den Abständen der beiden Symmetral-Punete je zweier von drei gegebenen Kreise liegen in gerader Linie.

189. Wir wollen die Gleichung der den drei Constructions-Kreisen gemeinschaftlichen Chorde suchen; wir brauchen zu diesem Ende nur irgend zwei der drei Gleichungen (8) zu entwickeln und dann von einander abzuziehen. Für die erste dieser Gleichungen haben wir in dem Obigen folgende gefunden:

$$y^2 - 2\frac{\varrho^2 b - r^2\beta}{\varrho^2 - r^2}y + x^2 - 2\frac{\varrho^2 a - r^2\alpha}{\varrho^2 - r^2}x = \frac{r^2(\beta^2+\alpha^2) - \varrho^2(b^2+a^2)}{\varrho^2 - r^2},$$

und erhalten hieraus für die zweite derselben, durch Buchstaben-Vertauschung auf der Stelle folgende Gleichung:

$$y^2 - 2\frac{\varrho^2 B - R^2\beta}{\varrho^2 - R^2}y + x^2 - 2\frac{\varrho^2 A - R^2\alpha}{\varrho^2 - R^2}x = \frac{R^2(\beta^2+\alpha^2) - \varrho^2(B^2+A^2)}{\varrho^2 - R^2}.$$

Nehmen wir ferner an, dafs der Anfangs-Punct der Coordinaten in dem Chordal-Puncte der drei gegebenen Kreise liege, so ist:

$$\beta^2+\alpha^2-\varrho^2 = b^2+a^2-r^2 = B^2+A^2-R^2,$$

mithin ist:

$$b^2+a^2 = \beta^2+\alpha^2-(\varrho^2-r^2),$$
$$B^2+A^2 = \beta^2+\alpha^2-(\varrho^2-R^2),$$

und wenn wir für (b^2+a^2) und (B^2+A^2) ihre Werthe in die zweiten Theile der letzten beiden Kreis-Gleichungen substituiren, so finden wir nach einer leichten Reduction, dafs beide Theile gleich sind $(\beta^2+\alpha^2-\varrho^2)$. Die Chordale der bezüglichen Kreise geht also, dem Frühern gemäfs, durch den Anfangs-Punct der Coordinaten. Ziehen wir nun jene beiden Kreis-Gleichungen wirklich von einander ab, so kommt:

$$\left(\frac{\varrho^2 b - r^2\beta}{\varrho^2 - r^2} - \frac{\varrho^2 B - R^2\beta}{\varrho^2 - R^2}\right)y + \left(\frac{\varrho^2 a - r^2\alpha}{\varrho^2 - r^2} - \frac{\varrho^2 A - R^2\alpha}{\varrho^2 - r^2}\right)x = 0,$$

und wenn wir entwickeln:

$$y = -\frac{\varrho^2(a-A)+r^2(A-\alpha)+R^2(\alpha-a)}{\varrho^2(b-B)+r^2(B-\beta)+R^2(\beta-b)}x. \qquad (9)$$

Dieſs ist die Gleichung der in Rede stehenden geraden Linie, wenn wir den Anfangs-Punct der Coordinaten im Chordal-Puncte der drei gegebenen Kreise annehmen.

190. Zu derselben Gleichung hätten wir auf eine directere Weise gelangen können. Vergleichen wir nemlich die eben gefundene Gleichung (9) mit der in der 153. Nummer hergeleiteten Gleichung (5) der geraden Linie, welche die Mittelpuncte derjenigen beiden Kreise enthält, von welchen die drei gegebenen gleichnamig berührt werden, so ist offenbar, dafs die letztgenannte Gleichung (5) in die eben entwickelte Gleichung (9) übergeht,

*) Gerg. Ann. XI. p. 384.

Digitized by Google

wenn wir zunächst, der letzten Annahme der Coordinaten gemäfs, y' und x' gleich Null setzen, und dann, statt der Radien ϱ, r und R, die Quadrate derselben nehmen, und diesem entspricht dieselbe Veränderung schon in dem Coefficienten von φ in der 4. Gleichung der angezogenen 153. Nummer zu machen. Zu Gleichungen von so bestimmter Form wären wir aber gekommen, wenn wir die Radien der drei gegebenen Kreise, nicht, wie in der angezogenen Nummer geschehen ist, alle drei um irgend ein gleiches Stück, sondern um denselben aliquoten Theil vergröfsert hätten. Wenn wir nemlich die Radien der drei gegebenen Kreise um den μ. Theil gröfser nehmen, und der Kürze halber $\frac{2\mu+\mu^2}{\mu 2}$ gleich φ setzen, so haben wir folgende drei neue Kreis-Gleichungen:

$$(y-\beta)^2+(x-\alpha)^2 = (1+\varphi)\varrho^2,$$
$$(y-b)^2+(x-a)^2 = (1+\varphi)r^2,$$
$$(y-B)^2+(x-A)^2 = (1+\varphi)R^2,$$

und mithin zur Bestimmung des Chordal-Punctes dieser Kreise, wenn wir, wie in der vorigen Nummer, den Anfangs-Punct der Coordinaten in den Chordal-Punct der gegebenen Kreise legen, folgende beide Gleichungen:

$$2(b-\beta)y+2(a-\alpha)x = (\varrho^2-r^2)\varphi,$$
$$2(B-\beta)y+2(A-\alpha)x = (\varrho^2-R^2)\varphi.$$

Durch Elimination von φ erhalten wir die Gleichung (9), die also den geometrischen Ort der Chordal-Puncte aller Systeme dreier Kreise darstellt, die wir dadurch bestimmen, dafs wir die Radien der drei gegebenen Kreise in demselben Verhältnisse vergröfsern, oder auch, indem wir oben μ negativ nehmen, verkürzen. Auf dieser Linie liegen, wovon man sich auch leicht durch Construction überzeugt, die beiden Puncte, von denen aus die gegebenen Kreise unter gleichen Winkeln erscheinen, wenn es überhaupt solche Puncte gibt.

191. Wir wollen hier nicht bei der Gleichung derjenigen Linie verweilen, welche die Mitten zwischen den Symmetral-Puncten je zweier der drei gegebenen Kreise enthält. Ohne die Rechnung indefs auszuführen, erkennen wir sogleich aus der Anlage derselben, indem wir dieselbe mit der Herleitung der Gleichung für die äufsere Symmetrale (166) vergleichen, dafs wir, um die besagte Gleichung aus der letztgenannten zu erhalten, wiederum blofs die Radien mit den Quadraten derselben zu vertauschen brauchen.

192. Eh wir weiter gehen, machen wir noch darauf aufmerksam, dafs die Centrale zweier gegebener Kreise durch die beiden Mittelpuncte und Symmetral-Puncte derselben harmonisch getheilt wird. Hiervon überzeugen wir uns sogleich, wenn wir diese Linie zur ersten Axe nehmen, und den Anfangs-Punct der Coordinaten nach einander in die Mittelpuncte des ersten und zweiten Kreises (γ, C) legen. Alsdann erhalten wir nemlich: Fig. 57.

$$\frac{\varrho a}{r-\varrho}, \quad \frac{\varrho a}{\varrho+r}, \quad -\frac{ra}{r-\varrho}, \quad -\frac{ra}{r+\varrho},$$

für die Abstände des äufsern und innern Symmetral-Punctes von den Mittelpuncten des ersten und zweiten Kreises, wenn wir den Abstand dieser Mittelpuncte von einander durch a bezeichnen. Nach der bezüglichen Figur sind dieſs die Ausdrücke für γS, γσ, CS und Cσ und es verhält sich

$$\gamma S : CS = \gamma\sigma : \sigma C = \varrho : r,$$

wobei wir nur das Zeichen des Ausdruckes für Cσ ändern müssen.

Hieraus folgt unter Andern folgender Satz: *Wenn wir über den Abstand der Symmetral-Puncte zweier gegebener Kreise, als Durchmesser, einen neuen Kreis beschreiben, und durch irgend einen Punct auf dem Umfange desselben, etwa durch M, und durch die Mittelpuncte der beiden gegebenen Kreise, γ und C, zwei gerade Linien ziehen, so werden die Winkel, welche dieselben mit einander bilden, von denjenigen geraden Linien, welche von M nach den beiden Symmetral-Puncten σ und S gezogen werden können, halbirt.*

($\gamma M\sigma = \sigma MC$, $CMS = SMN$). *)

Da, im Falle die gegebenen Kreise sich schneiden, der letztbezeichnete Kreis durch die Durchschnitte derselben geht, so können wir jeden dieser Durchschnitte für den Punct nehmen, den wir vorhin M genannt haben. Ziehen wir also von einem dieser Durchschnitte gerade Linien nach den beiden Symmetral-Puncten, so bilden dieselben unter sich einen rechten Winkel und halbiren überdiefs diejenigen Winkel, welche in jenem Durchschnitte von den, durch die Mittelpuncte der gegebenen Kreise gezogenen, geraden Linien gebildet werden.

193. Um die nachfolgenden Entwicklungen nicht zu unterbrechen, schalten wir gleich hier schon die Construction des Problems der Tactionen, die H. Gergonne in den Memoiren von Turin und später in seinen Annalen, zugleich mit einer neuen Modification, entwickelt hat.**) Das Characteristische dieser Construction besteht darin, dafs Gergonne nicht geradezu den Mittelpunct des Berührungs-Kreises, sondern die Puncte, in welchen derselbe die drei gegebenen Kreise berührt, analytisch bestimmt. Auf diese Weise wird die zusammengesetztere Construction gewissermaafsen in drei einfachere Constructionen zerlegt. Die Construction des Berührungs-Punctes auf jedem der drei gegebenen Kreise ist ganz dieselbe, so dafs es genügt, einen dieser Puncte analytisch zu construiren. Wir legen den Anfangs-Punct der Coordinaten in den Mittelpunct desjenigen Kreises, auf dem wir den Berührungs-Punct bestimmen wollen, nehmen aber die Richtung der Axen

---

*) Wenn nemlich die Winkel, welche zwei gerade Linien mit einander bilden, von zweien andern geraden Linien halbirt werden, so wird, wie wir früher im ersten Abschnitte bemerkt haben, jede gerade Linie, welche jenen vier geraden Linien begegnet, von denselben harmonisch geschnitten. Die Linien des letztbezeichneten Paares stehen auf einander senkrecht. Wenn, umgekehrt, zwei gerade Linien MS und Mσ (wir beziehen uns hier auf die Figur des Textes) gegeben sind, die auf einander senkrecht sind und einer beliebigen gegebenen geraden Linie in S und σ, einem äufsern und innern harmonischen Theilungs-Puncte begegnen, so bilden diejenigen geraden Linien, die von M nach den beiden andern Theilungs-Puncten gezogen werden, gleiche Winkel mit jeder der erstgezogenen.

Da ferner der Ort des Durchschnittes zweier gerader Linien, die durch zwei feste Puncte, S, und σ, gehen, und sich rechtwinklig schneiden, ein Kreis ist, der über den Abstand dieser festen Puncte als Durchmesser beschrieben werden kann, so erhalten wir denselben geometrischen Ort, für alle Puncte M, welche die Bedingung erfüllen, dafs, wenn wir von denselben nach dreien festen Puncten γ, σ und C gerade Linien ziehen, die zweite derselben mit den beiden übrigen gleiche Winkel bildet. Der vierte harmonische Theilungs-Punct S findet sich leicht durch Construction.

**) Gerg. Ann. T. VII.

Digitized by Google

beliebig: auf diese Weise kürzen wir die Entwicklungen ab, ohne dadurch der Symmetrie derselben Abbruch zu thun. Demnach seyen:

$$\begin{aligned} y^2+x^2 &= \rho^2, \\ (y-b)^2+(x-a)^2 &= r^2, \\ (y-B)^2+(x-A)^2 &= R^2, \end{aligned} \qquad (1)$$

die Gleichungen der drei gegebenen Kreise; wir wollen den Punct suchen, in welchem der erste Kreis berührt wird, und zwar von einem solchen Berührungs-Kreise, der keinen der gegebenen umschliefst. Bei diesen Voraussetzungen haben wir, indem wir die Mittelpuncts-Coordinaten des letztgenannten Kreises y' und x', den Radius desselben φ nennen, folgende drei Gleichungen:

$$\begin{aligned} y'^2+x'^2 &= (\rho+\varphi)^2, \\ (y'-b)^2+(x'-a)^2 &= (r+\varphi)^2, \\ (y'-B)^2+(x'-A) &= (R+\varphi)^2, \end{aligned} \qquad (2)$$

und diese Gleichungen sind zur Bestimmung der unbekannten Gröfsen: y', x' und φ hinreichend. Ziehen wir nach einander die zweite und dritte Gleichung von der ersten ab, so kommt:

$$\begin{aligned} 2by' + 2ax' &= a^2+b^2+\rho^2-r^2+2(\rho-r)\varphi, \\ 2By' + 2Ax' &= A^2+B^2+\rho^2-R^2+2(\rho-R)\varphi, \end{aligned}$$

Gleichungen, die wir zum Behuf späterer Substitutionen folgendermaafsen schreiben können:

$$\begin{aligned} 2by' + 2ax' - 2(\rho-r)(\varphi+\rho) &= a^2+b^2-(\rho-r)^2, \\ 2By' + 2Ax' - 2(\rho-R)(\varphi+\rho) &= A^2+B^2-(\rho-R)^2, \end{aligned} \qquad (3)$$

Diese beiden Gleichungen, verbunden mit der ersten der Gleichungen (2), sind die möglichst einfachen zur Elimination von y', x' und φ. Statt hier indessen geradezu zu eliminiren, führen wir an die Stelle der Mittelpunets-Coordinaten die Coordinaten des oben bezeichneten Berührungs-Punctes ein und nennen dieselben y und x. Nun haben wir aber offenbar:

$$y' = \frac{y(\rho+\varphi)}{\rho}, \quad x' = \frac{x(\rho+\varphi)}{\rho};$$

und wenn wir diese Werthe für y' und x' in die letzten Gleichungen (3) substituiren, kommt:

$$\begin{aligned} 2(by+ax-\rho(\rho-r))(\rho+\varphi) &= \rho(a^2+b^2-(\rho-r)^2), \\ 2(By+Ax-\rho(\rho-R))(\rho+\varphi) &= \rho(A^2+B^2-(\rho-R)^2), \end{aligned}$$

und endlich durch Elimination von $(\rho+\varphi)$:

$$\frac{by+ax-\rho(\rho-r)}{a^2+b^2-(\rho-r)^2} = \frac{By+Ax-\rho(\rho-R)}{A^2+B^2-(\rho-R)^2}. \qquad (4)$$

Diese Gleichung ist in Beziehung auf y und x vom ersten Grade, und stellt mithin, wenn wir diese Coordinaten als veränderliche Gröfsen betrachten, eine gerade Linie dar, die auf dem ersten Kreise:

$$y^2+x^2 = \rho^2,$$

den gesuchten Berührungs-Punct bestimmt. Solcher Puncte erhalten wir zwei, die offenbar den beiden Kreisen entsprechen, die sich auch in dem Frühern schon zusammengeordnet haben, zweien Kreisen nemlich, die, je nach der verschiedenen Lage der drei gegebenen Kreise zu einander, entweder beide dieselben innerhalb, oder beide dieselben aufserhalb berühren, oder auch von denen der eine die drei gegebenen Kreise innerhalb, der andere dieselben aufserhalb berührt. Dafs die Gleichung (4) sich auf die doppelte Art von Berührung bezieht, erhellet daraus, dafs diese Gleichung dieselbe bleibt, wenn wir die Zeichen aller Radien ändern.

Digitized by Google

Es kommt nun blofs noch darauf an, die Gleichung (4) zu construiren und bei dieser Gelegenheit wandte H. Gergonne die sinnreiche, bereits schon (41) erwähnte Constructions-Art einer linearen Gleichung an. Er setzt nemlich zuerst jeden Theil derselben für sich gleich Null, so kommt:

$$by+ax = \varrho(\varrho-r), \qquad (5)$$
$$By+Ax = \varrho(\varrho-R). \qquad (6)$$

Diese beiden Gleichungen, mit einander verbunden, bezeichnen einen bestimmten Punct der zu construirenden geraden Linie. Diesen Punct können wir mithin construiren durch den Durchschnitt der durch (5) und (6) (indem wir y und x als veränderliche Grösen betrachten), dargestellten geraden Linien, in welchen wir sogleich die Polaren der äufsern Symmetral-Puncte des ersten und zweiten und des ersten und dritten der gegebenen Kreise auf dem ersten derselben wieder erkennen (175).

Ferner setzt H. Gergonne jeden Theil der zu construirenden Gleichung gleich Eins, und erhält auf diese Weise:

$$b(y-b)+a(x-a) = r(\varrho-r), \qquad (7)$$
$$B(y-B)+A(x-A) = R(\varrho-R), \qquad (8)$$

Gleichungen, durch welche die Polaren der äufsern Symmetral-Puncte des ersten und zweiten und des ersten und dritten Kreises auf dem zweiten und dritten Kreise bezeichnet werden (175). Der Durchschnitt dieser beiden Linien, die den vorigen beiden Polaren (5) und (6) bezüglich parallel sind, gibt einen zweiten Punct der gesuchten geraden Linie, die nun also völlig bestimmt ist.

Hiernach gibt denn H. Gergonne folgende Construction des Problems der Tactionen für drei gegebene Kreise:

Fig. 58. Man ziehe die gemeinschaftlichen äufsern Tangenten an je zwei der drei gegebenen Kreise und dann die Berührungs-Chorden, die drei Paar Parallel-Linien bilden. Die beiden Chorden des ersten Kreises γ schneiden sich in M, und die ihnen parallele Chorden auf den beiden andern Kreisen c und C in N. Ebenso schneiden sich die beiden Chorden des zweiten Kreises c in M′ und die ihnen parallele Chorden der Kreise γ und C in N′ und endlich schneiden sich die beiden Chorden des dritten Kreises C in M″ und die ihnen parallele Chorden der ersten beiden Kreise γ und c in N″.

„Man ziehe ferner MN, M′N′ und M″N″. MN schneidet den Kreis γ in T und ϑ; M′N′ schneidet den Kreis c in T′ und ϑ'; M″N″ schneidet den Kreis C in T″ und ϑ''. Legt man nun einen Kreis durch T, T′ und T″, einen andern durch ϑ, ϑ' und ϑ'', so sind diefs die gesuchten Kreise, welche die drei gegebenen entweder alle drei aufserhalb oder alle drei innerhalb berühren. Hiernach ergeben sich die Mittelpuncte dieser Kreise auf die leichteste Weise; denn ziehen wir durch die Mittelpuncte der drei gegebenen Kreise und einmal durch die Puncte T, T′ und T″, das andere Mal durch die Puncte ϑ, ϑ' und ϑ'' gerade Linien, so laufen die ersten drei in dem Mittelpuncte des einen, die andern drei in dem Mittelpuncte des andern Kreises zusammen."

Nach dem Bisherigen überzeugt man sich leicht, dafs man auf ganz ähnliche Weise die sechs übrigen Berührungs-Kreise erhält, indem man in der angezeigten Construction statt der gemeinschaftlichen äufsern Tangenten die innere nimmt. Wir formen nemlich die Gleichung (4) für diese Fälle um, indem wir nach einander die Zeichen der Radien der drei Kreise ändern.

Zugleich ist offenbar, dafs die Möglichkeit der Auflösungen im Allgemeinen nicht von der Möglichkeit der gemeinschaftlichen Tangenten, deren Construction wir nicht anum-

Digitized by Google

gänglich nöthig haben, abhängt, sondern einzig davon, ob die, immer construirbaren, Gleichungen von der Form der Gleichung (4) gerade Linien bedeuten, die dem bezüglichen Kreise begegnen, oder nicht.

194. Wir erhalten mit H. Gergonne eine Modification der angezeigten Construction, indem wir jeden Theil der Gleichung (4) gleich $\frac{1}{2}$ setzen; auf diese Weise kommt:

$$\begin{aligned} 2by+2ax &= \rho^2-r^2+a^2+b^2, \\ 2By+2Ax &= \rho^2-R^2+A^2+B^2. \end{aligned} \qquad (9)$$

In diesen Gleichungen erkennen wir die Gleichungen der Chordalen des ersten und jedes der beiden andern Kreise wieder; der Durchschnitt dieser Linien bestimmt also einen Punct der zu construirenden Linie, die mithin durch den Chordal-Punct der drei gegebenen Kreise geht. Durch diesen Punct geht also, wenn wir uns wieder auf die vorige Figur beziehen, jede der drei geraden Linien MN, M'N' und M''N'', wir können also auch statt die drei Puncte N, N' und N'' zu construiren, den Chordal-Punct P der drei gegebenen Kreise suchen. Dieſs ist, wie wir uns leicht überzeugen, als eine Folge davon anzusehen, daſs die Chordale zweier gegebenen Kreise gleichweit von den Polaren eines beliebigen ihrer beiden Symmetral-Puncte absteht. Durch den Chordal-Punct P gehen auch die entsprechenden geraden Linien für die drei übrigen Paare von Berührungs-Kreisen; dieſs folgt unmittelbar daraus, daſs die Gleichungen (9) keine Aenderung erleiden, indem man die Zeichen der Radien der drei gegebenen Kreise beliebig ändert.

Wir betrachten die, in den letzten beiden Nummern auseinandergesetzte, analytische Construction als ein Muster der Behandlungs-Art und verweisen deshalb, da wir überdieſs ganz frei verfahren sind, auf den Original-Aufsatz selbst. Zu derselben Construction werden wir in dem Folgenden noch auf andere Weise gelangen, indem wir die isolirt dastehende Aufgabe in ihre natürliche Verbindung bringen und auf diesem Wege kommen wir auch noch, ungemein leicht, zur Auflösung zusammengesetzterer und allgemeinerer Aufgaben. Hiermit wollen wir diesen zweiten Abschnitt, den wir hier nicht weiter ausdehnen dürfen, beschlieſsen.

195. Seyen C und C' zwei gegebene Kreise, die von einem dritten Kreise γ berührt werden. Wir legen die erste Axe durch die Mittelpuncte der beiden ersten Kreise, die Form ihrer Gleichungen ist demnach folgende:

$$\begin{aligned} y^2+(x-A)^2 &= R^2, \\ y^2+(x-A')^2 &= R'^2; \end{aligned}$$

wir nehmen ferner die Chordale derselben als zweite Axe; alsdann haben wir zwischen den Constanten der letzten beiden Gleichungen folgende Bedingungs-Gleichung:

$$R^2-A^2 = R'^2-A'^2.$$

Die Gleichung des Berührungs-Kreises γ sey:

$$(y-\beta)^2+(y-\alpha)^2 = \rho^2,$$

wenn alsdann dieser Kreis γ den Kreis C aufserhalb, den Kreis C' innerhalb berührt, wie in dem Falle der 59. Figur, so kommt: Fig. 59.

$$\begin{aligned} \beta^2+(\alpha-A)^2 &= (R+\rho)^2, \\ \beta^2+(\alpha-A')^2 &= (R'-\rho)^2, \end{aligned}$$

und wenn wir abziehen, und die obige Bedingungs-Gleichung berücksichtigen:

$$(A'-A)\alpha = (R'+R)\rho.$$

Digitized by Google

Würde umgekehrt, der Kreis C innerhalb und der Kreis C' aufserhalb berührt, so wären wir zu folgendem Ausdruck gekommen:

$$(A'-A)\alpha = -(R'+R)\varrho.$$

Würden endlich die beiden Kreise C und C' vom dritten Kreise beide aufserhalb oder beide innerhalb berührt, so ergibt sich:

$$(A'-A)\alpha = \mp (R'-R)\varrho.$$

Für jeden dieser einzelnen Fälle ist also $\frac{\alpha}{\varrho}$ constant. Der auf diese Art bewiesene Satz ist folgender:

Wenn beliebig viele Kreise zwei gegebene und feste Kreise auf dieselbe Weise berühren, so ist für alle das Verhältnifs des Radius zum Abstande des Mittelpunctes von der Chordalen der beiden gegebenen Kreise ein constantes.

Wenn wir eine der gemeinschaftlichen Tangenten der beiden Kreise C und C' als die Gränze betrachten, der sich die Berührungs-Kreise immer mehr nähern, je gröfser die Radien derselben genommen werden, so haben wir für diese Gränze:

$$\frac{\alpha}{\varrho} = \sin \omega,$$

wenn wir durch ω denjenigen Winkel bezeichnen, den die gemeinschaftlichen Tangenten mit der Central-Linie der beiden gegebenen Kreise bilden. Jenes constante Verhältnifs $\frac{\alpha}{\varrho}$ ist also gleich dem Sinus des Winkels, welchen die, der jedesmaligen Berührungs-Art entsprechenden, gemeinschaftlichen Tangenten mit der Central-Linie bilden.

196. Wir wollen nun zwei Berührungs-Kreise betrachten und für die Gleichungen derselben folgende nehmen:

$$(y-\beta)^2+(x-\alpha)^2 = \varrho^2,$$
$$(y-\beta')^2+(x-\alpha')^2 = \varrho'^2,$$

alsdann erhalten wir für den äufsern Symmetral-Punct (166):

$$x = \frac{\varrho'\alpha-\varrho\alpha'}{\varrho'-\varrho}.$$

Wenn wir nun für die beiden Berührungs-Kreise die Kreise γ und γ' nehmen, welche jeden der beiden gegebenen C und C' auf dieselbe Weise (für den Fall der 59. Figur den ersten Kreis C aufserhalb, den zweiten C' innerhalb) berühren, so ist:

$$\frac{\alpha}{\varrho} = \frac{\alpha'}{\varrho'},$$

und diese Bedingung reducirt obigen Werth von x auf Null. Es liegt also der äufsere Symmetral-Punct S der Kreise γ und γ' auf der zweiten Axe, mithin auf der Chordalen der beiden Kreise C und C'.

Für die Abscisse des innern Symmetral-Punctes der obigen beiden Kreise erhalten wir:

$$x = \frac{\varrho'\alpha+\varrho\alpha'}{\varrho'+\varrho},$$

und dieser Ausdruck wird Null wenn:

$$\frac{\alpha}{\varrho} = -\frac{\alpha'}{\varrho'},$$

eine Beziehung, die nach der 195. Nummer dann eintritt, wenn wir zwei Kreise γ und $\varkappa$ nehmen, die den einen wie den andern der Kreise C und C' auf verschiedene Weise berühren. In dem Falle der Figur berührt γ den Kreis C aufserhalb und den Kreis C' innerhalb, während $\varkappa$ den Kreis C innerhalb und den Kreis C' aufserhalb berührt. Ein an-

Digitized by Google

derer hierher gehöriger Fall ist, dafs γ z. B. die beiden Kreise C und C' aufserhalb berührt, während $\varkappa$ dieselben innerhalb berührt. In beiden Fällen liegt der innere Symmetral-Punct σ für γ und $\varkappa$ auf der Chordalen der beiden Kreise C und C'.

Wenn zwei gegebene Kreise von irgend zweien andern beiden gleichartig oder beide ungleichartig berührt werden, so liegt im ersten Falle der äufsere, im letztern Falle der innere Symmetral-Punct der beiden letztgenannten Kreise auf der Chordalen der beiden gegebenen.

197. Wir bemerken hier noch, dafs zwischen den Kreisen γ, γ' und C, C' eine gegenseitige Beziehung Statt findet, denn während C und C' ungleichartig berührt werden, werden γ und γ' gleichartig berührt; der äufsere Symmetral-Punct S von γ und γ' liegt auf der Chordalen von C und C', während der innere Symmetral-Punct P von C und C' auf der Chordalen von γ und γ' liegt.

198. Wenn wir endlich beliebig viele Kreise γ, γ', γ'' u. s. w. construiren, von denen jeder die beiden gegebenen Kreise C und C' auf dieselbe Weise berührt, so geht die Chordale jedes Paares derselben durch einen der beiden Symmetral-Puncte der zwei gegebenen Kreise, durch den äufsern Symmetral-Punct, wenn die Berührungen für C und C' gleichnamig, durch den innern Symmetral-Punct, wenn dieselben ungleichnamig sind. Dieser Punct ist mithin der Chordal-Punct je dreier Berührungs-Kreise, die also auch alle von demselben Kreise unter rechten Winkeln geschnitten werden.

Wenn die beiden Kreise C und C' sich schneiden, wie in der 59. Figur, so sondern sich die eben betrachteten Berührungs-Kreise in zwei Reihen von Kreisen ab, von welchen die eine Reihe γ, γ', γ'' u. s. w. den Kreis C aufserhalb, und den Kreis C' innerhalb berührt, während die andere Reihe, in welche $\varkappa$ gehört, jeden jener Kreise auf die entgegengesetzte Art berührt. Die Uebergänge von der einen Reihe zur andern geschehen, indem die Berührungs-Kreise sich auf Puncte, auf die Durchschnitts-Puncte nemlich von C und C', reduciren. Dasselbe findet Statt, wenn wir von denjenigen Kreisen, die zwei sich schneidende Kreise C und C' aufserhalb berühren, zu denjenigen übergehen, welche beide innerhalb berühren. Die aufserhalb berührenden Kreise sondern sich wiederum in solche ab, welche die beiden gegebenen umschliefsen und nicht umschliefsen, mithin selbst, im ersten Falle innerhalb, im zweiten Falle aufserhalb von C und C' berührt werden. Die gemeinschaftlichen äufsern Tangenten der gegebenen Kreise C und C' bezeichnen hier die Uebergänge.

199. Aus den Bemerkungen der letzten Nummer erhellt, dafs, wenn die beiden gegebenen Kreise, C und C', sich schneiden, derjenige Kreis, welcher alle, die beiden gegebenen Kreise gleichnamig oder ungleichnamig berührende, Kreise rechtwinklig schneidet, durch die Durchschnitte der beiden gegebenen Kreise C und C' geht. In allen Fällen hat der eben bezeichnete Orthogonal-Kreis mit C und C' dieselbe Chordale. Denn da der gemeinschaftliche Chordal-Punct der Berührungs-Kreise, P, der (innere) Symmetral-Punct der Kreise C und C' ist, so sind jede zwei Durchschnitte, wie Q und Q', einer geraden Linie, die durch P geht, mit den letztgenannten Kreisen, zwei Puncte, in welchen diese von irgend einem Berührungs-Kreise, von γ, berührt werden (171). Je zwei auf diese Weise bestimmte Durchschnitte, Q und Q', sind also in Beziehung auf den Orthogonal-Kreis zugeordnete Pole (133), und die beiden gegebenen Kreise, C und C' zugeord-

nete Kreise. Jener Orthogonal-Kreis hat also mit den beiden gegebenen Kreisen C und C' dieselbe Chordale (18t).

Fig. 59. 60. 200. Wenn wir also drei jener Kreise γ, γ' nnd γ'' als nrsprünglich gegehen hetrachten, so können wir ihren Chordal-Punct construiren, nnd erhalten auf diese Weise einen der Symmetral-Puncte für jedes der vier möglichen Paare von Kreisen, welche die gegebenen berühren, so dafs also für vier Paare ein nnd derselbe Pnnct einer der beiden Symmetral-Poncte ist. Ob wir für ein bestimmtes Paar der Berührungs-Kreise den äufsero oder ionern Symmetral-Punct erhalten, hängt davon ab, ob diese beiden Kreise ihrerseits gleichartig oder nngleichartig berührt werden, nnd diefs hestimmt sich dann wiederum nach der gegenseitigen Lage nnd Gröfse der gegehenen Kreise. Die gleichartige Berührung entspricht dem äufsern, die ongleichartige dem innern Symmetral-Poncte. Wir können hier in keine ausführliche Erörterungen eingehen; die Nebeneinander-Stellung der 59. nnd 60. Figur läfst indefs keine Dunkelheit über das eben Gesagte mehr übrig. In der ersten Construction giht es, wenn die Kreise γ, γ' ond γ'' gegehen sind, einen Kreis C, der von jedem derselben ausserhalb, einen andern C', der von jedem der gegehenen innerhalb herührt wird; der Chordal-Punct P ist also der innere Symmetral-Punct der beiden zu constnirenden Berührungs-Kreise. In der Constructioo der 60. Figur gibt es für die drei gegehenen Kreise γ, γ' und γ'' zwei Kreise C nnd C', von denen jeder von jedem der gegebenen aofserhalh berührt wir, mithin ist der Chordal-Punct in diesem Falle der äufsere Symmetral-Punct jener Berührungs-Kreise C und C'.

Fig. 59. 201. Wir wollen wiederum beliehig viele Kreise hetrachten, von denen jeder zwei gegehene Kreise gleichartig oder nngleichartig herührt. Um die Ideen zn fixiren, nehmen wir den letzten Fall, auf den sich die 59. Figur hezieht, nnd hetrachten also die Kreise γ, γ', γ'' . . . $\varkappa$. n. s. w. Alsdann liegt einer der Symmetral-Puncte je zweier dieser Kreise auf der Chordalen von C und C', nnd zwar der äufsere, wenn wir zwei Kreise zosammenstellen, die wie γ nnd γ', jeden der gegebenen Kreise C und C' auf gleichartige Weise berühren, während wir den innern Symmetral-Punct erhalten, wenn die heiden Berührungs-Kreise, wie γ und $\varkappa$, jeden der gegehenen Kreise ungleichartig berühren. Hierans fulgt denn nnmittelhar, dafs für je drei ohiger Berührongs-Kreise drei Symmetral-Puncte auf der Chordalen der heiden gegehenen Kreise C nnd C' liegen, nnd diese Symmetral-Pnncte sind drei äufsere, wenn wir drei Kreise nehmen, die wie γ, γ' und γ'' den Kreis C sowol als den Kreis C' gleichartig herühren, hingegen zwei innere und ein äufserer, wenn wir drei Kreise wie γ, γ' ond $\varkappa$, zusammenstellen, von denen zwei jeden der heiden gegebenen Kreise C nnd C' aof dieselhe, der dritte aber jeden derselben auf entgegengesetzte Weise, als die beiden ersten, herührt.

Auf diese Art haben wir also aof eine neue, sehr directe, Weise den Satz hewiesen, dafs für drei gegebene Kreise viermal drei Symmetral-Poncte in gerader Linie liegen, weil wir nemlich ursprünglich von dreien beliebigen Kreisen γ, γ' und γ'' (oder $\varkappa$) ausgehen können. Nnr ist ersichtlich, dafs dieser Beweis des Satzes, da voraosgesetzt werdeo mufs, dafs die jeder Symmetralen entsprechende Berührungs-Art wirklich Statt haben köone, nicht wie die früher gegehenen ohne alle Beschränkung gilt, nnd darin kommt er mit dem, von Monge in seiner descriptiven Geometrie gegehenen, überein.

Den in den letzten Entwicklungen enthaltenen Satz können wir in folgende Aussage einkleiden:

Digitized by Google

Wenn irgend drei Kreise gegeben sind, so sind die vier Symmetralen derselben die Chordalen der vier Paare möglicher Berührungs-Kreise.

202. In dem Bisherigen liegen die Elemente mehrerer Constructionen des Problems der Tactionen. Wir wollen deren drei hier aufstellen. Als erste Construction, die auf der Stelle einleuchtet, erhalten wir folgende:

„Man construire die vier Symmetralen, construire ferner denjenigen Kreis, der die „gegebenen alle drei rechtwinklig schneidet, und der, wie bekannt, aus dem Chordal-„Puncte mit einem Radius, der den, von diesem Puncte an die gegebenen Kreise gezoge-„nen, unter sich gleichen, Tangenten gleich ist, beschrieben wird. Dieser Kreis schnei-„det im Allgemeinen jede der Symmetralen in zwei Puncten. Construirt man nun die bei-„den Kreise, die durch jedes Paar dieser Durchschnitts-Puncte gehen, und zugleich einen „beliebigen der drei gegebenen berühren, so erhält man die acht möglichen Kreise, die „den Forderungen der Aufgabe Genüge leisten."

„Wenn obiger Orthogonal-Kreis eine oder mehrere Symmetralen nicht schneidet, so „werden die bezüglichen Berührungs-Kreise deshalb nicht unmöglich. Die Construction „reducirt sich in diesem Falle auf die bekannte, einen Kreis zu beschreiben, der mit einem „gegebenen (dem Orthogonal-Kreise) eine gegebene gerade Linie (eine der Symmetra-„len) zur Chordalen hat und überdiefs einen zweiten gegebenen Kreis berührt (119)."

Die Möglichkeit der verschiedenen Auflösungen der Aufgabe hängt von der Möglichkeit der einzelnen, eben bezeichneten, Constructionen ab, auf welche dieselbe zurückgeführt worden ist.

203. Wenn zwei gegebene Kreise C und C' von einem dritten γ berührt werden, so geht diejenige gerade Linie, welche die beiden Berührungen, Q und Q' verbindet, durch einen der Symmetral-Puncte der beiden Kreise C und C', in dem Falle der 59. Figur durch den innern, durch P. Wenn drei Berührungs-Kreise γ, γ' und γ'', oder auch γ, γ' und $\varkappa$, welche, alle drei, die beiden gegebenen entweder gleichnamig oder ungleichnamig berühren, so können wir P, als den Chordal-Punct dieser Kreise, construiren. Legen wir ferner in den Berührungen des Kreises γ und der beiden gegebenen die gemeinschaftlichen Tangenten, so liegt der Durchschnitt derselben auf der Chordalen der beiden gegebenen Kreise (172), nach der Figur in T. Wenn wir also wiederum drei Berührungs-Kreise γ, γ' und γ'' oder γ, γ' und $\varkappa$ zusammenstellen, so erhalten wir eine gerade Linie, auf der T liegt, indem wir einmal die äufsere, das andere Mal eine der innern Symmetralen construiren. Fig. 59.

Wenn wir ursprünglich von den Kreisen γ, γ' und γ'', um diesen einen Fall vorzugsweise zu betrachten, ausgehen, so können wir das Problem der Tactionen als aufgelöset betrachten, wenn wir entweder für jeden dieser Kreise diejenigen geraden Linien bestimmen, welche durch die jedesmaligen beiden Puncte gehen, in welchen derselbe von jedem Paare der gesuchten Kreise berührt wird, oder auch wenn wir nur die Puncte finden, in welchen die in je zwei jener Berührungs-Puncte gelegten Tangenten sich schneiden, die Pole, mit andern Worten, der eben bezeichneten Linien.

204. Betrachten wir nun wieder einen einzelnen Kreis γ und wollen wir die gerade Linie QQ' bestimmen, so kennen wir schon einen Punct, durch welchen dieselbe geht, nemlich den Chordal-Punct P der drei zu berührenden Kreise γ, γ' und γ''. Ferner wis-

Digitized by Google

sen wir, dafs der Pol T dieser geraden Linie QQ' auf der äufsern Symmetralen der gegebenen Kreise liegt, und folglich geht gegenseitig QQ' durch den Pol der äufsern Symmetralen, durch M; weil nemlich die Polare jedes Punctes der letztgenannten Linie, mithin auch die Polare des Punctes T, d. h. eben jene zu construirende gerade Linie QQ' durch den Pol derselben, durch M, geht. Die gerade Linie QQ' ist auf diese Weise durch die Puncte P und M bestimmt.

Nehmen wir die Kreise γ, γ' und $\varkappa$ für die gegebenen, und suchen wir, um uns auf dieselbe Figur beziehen zu können, diejenigen beiden Kreise, deren jeder von γ und γ' auf dieselbe, von $\varkappa$ aber auf die entgegengesetzte Weise berührt wird, so ist sogleich ersichtlich, dafs die eben angezeigte Construction von QQ' sich nur in soweit ändert, als wir mit der äufsern Symmetralen der zu berührenden Kreise, diejenige innere vertauschen müssen, welche den innern Symmetral-Punct von γ und $\varkappa$, so wie von γ' und $\varkappa$, mithin den äufsern von γ und γ' enthält.

Hiernach ergibt sich denn folgende allgemeine und leicht übersichtliche zweite Construction des Problems der Tactionen:

„Man construire den Chordal-Punct der drei gegebenen zu berührenden Kreise; con„struire ferner die vier Symmetralen und für jede derselben den Pol auf jedem der gege„benen Kreise. Auf diese Weise erhalten wir zwölf Puncte, und wenn wir dieselben mit „dem Chordal-Puncte verbinden, zwölf gerade Linien, welche im Allgemeinen die bezügli„chen Kreise in vier und zwanzig Puncten schneiden, und diese vier und zwanzig Puncte „sind diejenigen, in welchen die acht möglichen Berührungs-Kreise die drei gegebenen „Kreise berühren."

Die Determination der Aufgabe liegt in der Realität der Durchschnitte der eben construirten dreimal vier geraden Linien mit den bezüglichen gegebenen Kreisen.

Fig. 59. 205. Die eben angezeigte Construction erleidet Modificationen nach den verschiedenen Methoden, den Pol einer gegebenen geraden Linie auf einem gegebenen Kreise zu bestimmen. Dieser Pol liegt z. B. in dem Durchschnitte des vom Mittelpuncte des Kreises auf die gerade Linie gefällten Perpendikels, (das wir als die Polare eines unendlich weit abstehenden Punctes der geraden Linie betrachten können) mit der Polaren irgend eines Punctes der gegebenen geraden Linie, oder auch im Durchschnitte der Polaren irgend zweier beliebiger Puncte derselben. Nehmen wir insbesondere für diese beiden Puncte, wenn wir z. B. QQ' auf dem Kreise γ construiren wollen, die äufsern Symmetral-Puncte von γ und γ' und von γ und γ'', so fallen wir auf die Construction des H. Gergonne zurück (194).

Wir können auch, mehr in dem Sinne der alten Geometrie, den Pol M construiren, indem wir auf dem Perpendikel, das von γ auf die äufsere Symmetrale gefällt werden kann, den Punct M so bestimmen, dafs γM die dritte Proportionale für γL oder α und dem Radius des Kreises oder ϱ ist, dafs also:

$$\gamma M = \frac{\varrho^2}{\alpha},$$

oder wenn wir $\frac{\varrho}{\alpha}$, wofür die in Beziehung auf γ' γ'' u. s. w. entsprechend gebildeten Ausdrücke einen constanten Werth haben, durch c bezeichnen:

$$\gamma M = c.\varrho = c^2.\alpha.$$

Wir bemerken hier beigehend, dafs das Verhältnifs von γM zu dem Radius, oder

Digitized by Google

zum Abstande des Mittelpunctes von der äufsern Symmetrale für alle Kreise von denen C und C' auf entsprechende Art berührt werden, ein constantes ist.

206. Wir erhalten eine dritte Construction des Problems der Tactionen, wenn wir, was oben schon bemerkt worden ist, nicht geradezu (wir beziehen uns wieder auf den Kreis γ in der Construction der 59. Figur) die gerade Linie QQ' construiren, sondern den Pol derselben, den Punct T. Dieser Punct liegt zuvörderst auf der äufsern Symmetralen von γ, γ' und γ'' oder auf einer leicht zu unterscheidenden innern von γ, γ' und $\varkappa$; dann liegt er ferner auf der Polaren jedes Punctes der geraden Linie QQ', deren Pol er ist, also auch auf der Polaren von P. Hiernach erhalten wir folgende Construction:

„Man construire die vier Symmetralen der drei gegebenen, zu berührenden Kreise; „construire ferner den Chordal-Punct und für dieselben auf jedem der drei gegebenen „Kreise die Polare. Die drei geraden Linien, welche wir auf diese Weise erhalten, schnei„den jene vier Symmetralen in zwölf Puncten; ziehen wir von diesen Puncten Tangenten „an die bezüglichen Kreise, so erhalten wir vier und zwanzig Berührungs-Puncte. Diese „vier und zwanzig Puncte sind zugleich diejenigen, in welchen die acht gesuchten Kreise „die drei gegebenen berühren."

Die Möglichkeit der vier Paare von Berührungs-Kreisen hängt davon ab, ob die dreimal vier eben construirten Pole aufserhalb oder innerhalb der drei gegebenen Kreise fallen.

Wir können noch bemerken, dafs die gemeinschaftlichen Chorden des Orthogonal-Kreises mit den drei gegebenen Kreisen die Polaren des Chordal-Punctes sind.

207. Die oben aufgestellten drei Constructionen des Problems der Tactionen für den Fall, dafs drei gegebene Kreise berührt werden sollen, liefert mehrere zierliche Constructionen für die andern Fälle, wo gerade Linien oder Puncte an die Stelle von Kreisen treten. Nach den früher gemachten, und durch Rechnung unterstützten, Bemerkungen (160, 168, 169) können wir die Constructionen für alle diese einzelnen Fälle unmittelbar herleiten.

Wenn zwei Kreise und ein Punct gegeben sind, so gehen die beiden Symmetralen durch den gegebenen Punct, durch welchen auch der Orthogonal-Kreis geht. Die erste Construction gibt uns also immer noch einen zweiten Punct auf jeder der beiden Symmetralen, durch welchen zwei der vier möglichen Berührungs-Kreise gehen. Nach der zweiten und dritten Construction können wir die Berührungs-Puncte auf den beiden gegebenen Kreisen bestimmen.

208. Wenn ein Kreis γ und zwei Puncte γ' und γ'' gegeben sind, so ist diejenige gerade Linie, welche durch diese beiden Puncte geht, als Symmetrale anzusehen. Die erste Construction gibt hier keinen neuen Punct, durch den die Berührungs-Kreise gehen. Nach der zweiten Construction erhalten wir die Berührungs-Puncte auf dem gegebenen Kreise γ, wenn wir den Pol, von $\gamma'\gamma''$ suchen, durch diesen Pol, durch M, und den Chordal-Punct eine gerade Linie legen, und die Durchschnitte derselben mit dem Kreise γ, nemlich Q und Q', bestimmen. Statt des Chordal-Punctes können wir, ähnlich wie in der anfänglich von H. Gergonne gegebenen Construction (193), den Durchschnitt N zweier den Polaren von γ' und γ'' parallelen und durch diese Puncte gehenden geraden Linien suchen. Fig. 61.

Digitized by Google

Aus der so modificirten Construction ist sogleich ersichtlich, dafs wir die Puncte M und N durch den Durchschnitt derselben geraden Linien, nur in umgekehrter Ordnung, erhalten, wenn ursprünglich statt der Puncte γ' und γ'' ihre Pole $\varkappa'$ und $\varkappa''$ gegeben wären. Gleichviel also, ob uns irgend zwei Puncte oder ihre Pole auf dem Kreise, der berührt werden soll, gegeben sind, die Berührungs-Puncte sind in beiden Fällen dieselben. Die beiden durch γ' und γ'' und durch $\varkappa'$ und $\varkappa''$ gelegten geraden Linien schneiden sich in dem Pole von MN, der sowol auf der einen als der andern dieser Linien liegen mufs. Es ist hier der Ort nicht, hieran noch weitere Folgerungen anzuknüpfen.

Fig. 42. 209. Wenn zwei Kreise und eine gerade Linie die gegebenen zu berührenden Oerter sind, so finden alle drei Constructions-Arten ihre Anwendung. Die Stelle des Chordal-Punctes vertritt alsdann der Durchschnitt der gegebenen geraden Linie mit der Chordalen der beiden gegebenen Kreise. Man bestimmt, wie wir in dem Frühern ausführlich gezeigt haben, die vier Symmetralen durch die auf die gerade Linie von den Mittelpuncten der Kreise gefällten Perpendikel mit diesen Kreisen. In der 42. Figur, auf die wir hier zurückweisen, ist P der Chordal-Punct, $K\varkappa$, $K\varkappa'$, $K'\varkappa$ und $K'\varkappa'$ sind die vier Symmetralen. Die übrige Construction der Berührungs-Kreise ergibt sich hiernach von selbst, und sind überdiefs den auf den folgenden Fall sich beziehenden, die wir ausführlicher behandeln wollen, ganz analog.

Fig. 62. 210. Wenn ein Kreis, γ, ein Punct, γ', und eine gerade Linie, PG, gegeben sind, so liegt der Chordal-Punct des Systems der drei Oerter im Durchschnitte derjenigen geraden Linie, welche die von γ' an den Kreis γ gezogenen Tangenten halbirt, mit der gegebenen, PG. Dieser Durchschnitt fällt, nach der Figur, in der jene Halbirungs-Linie der leichtern Uebersichtlichkeit wegen fortgelassen ist, in P. Der Durchmesser $S\sigma$ des Kreises γ trifft, genugsam verlängert, die gegebene gerade Linie unter rechten Winkeln, demnach sind $\gamma'S$ und $\gamma'\sigma$ die beiden Symmetralen des Systems. Hieraus ergeben sich folgende Constructionen der in Rede stehenden Aufgabe:

Erstens. Man beschreibe aus P einen Kreis, der durch γ' geht, und also den gegebenen Kreis rechtwinklig schneidet. Dieser Kreis begegnet, aufser in γ' den beiden Symmetralen noch in R und ϱ. Zwei der Berührungs-Kreise, diejenigen nemlich, welche γ aufserhalb berühren, gehen durch R, die beiden andern durch ϱ.

Zweitens. Man suche die Pole der beiden Symmetralen, M und μ, und lege durch P und jeden dieser Pole eine gerade Linie. Die auf diese Weise gefundenen Linien schneiden den gegebenen Kreis in Q und Q', in $\varkappa$ und $\varkappa'$: dieſs sind diejenigen vier Puncte, in welchen derselbe von den gesuchten Kreisen berührt wird.

Drittens. Man suche die Polare von P; diese Linie ist keine andere als die gemeinsame Chorde des gegebenen und des schon eben bezeichneten Kreises, dessen Mittelpunct P ist, und der durch γ' geht. Die Durchschnitte dieser Polaren mit $\gamma'S$ und $\gamma'\sigma$ sind T und ϑ, und wir erhalten wiederum die Puncte Q, Q' und $\varkappa$, $\varkappa'$, wenn wir von T und ϑ Tangenten an den gegebenen Kreis ziehen.

Fig. 63. 64. 211. Sind endlich zwei gerade Linien, PG und PH, und ein Kreis gegeben, so spielt der Durchschnitt der erstern die Rolle des Chordal-Punctes, die vier Symmetralen bilden ein in den Kreis beschriebenes Viereck, dessen Winkel-Puncte σ, σ', S und S' durch die Durchschnitte der vom Mittelpuncte des Kreises auf die gegebenen geraden Linien gefällten Perpendikel bestimmt werden. Wenn die gegebenen ge-

raden Linien sich innerhalb des gegebenen Kreises schneiden, so können wir die erste Construction nicht geradezu anwenden, weil aus dem Durchschnitte derselben, aus P, alsdann kein Orthogonal-Kreis beschrieben werden kann. Diefs ist der Fall der 63. Figur. In der 64. Figur schneidet der Orthogonal-Kreis die eine Symmetrale $\sigma\sigma'$ in den Puncten R und R', die beide aufserhalb des Kreises liegen; durch diese beiden Puncte gehen zwei der gesuchten Berührungs-Kreise. Zwei andere dieser Kreise haben mit dem Orthogonal-Kreise SS' zur gemeinschaftlichen Chordalen, und sind daher leicht zu construiren. Die andern beiden Symmetralen $S\sigma'$ und $S'\sigma$ werden von diesem Kreise jede in zweien Puncten geschnitten, von denen einer aufserhalb, der andere innerhalb des gegebenen Kreises liegt. Die bezüglichen beiden Paare von Berührungs-Kreisen werden also imaginär.

Am zierlichsten stellt sich hier die zweite Construction dar. Die Pole der vier Symmetralen bilden offenbar die Winkel-Puncte eines um den gegebenen Kreis beschriebenen Parallelogrammes MM'M''M''', dessen Seiten denselben in σ, σ', S und S' berühren und mithin den beiden gegebenen geraden Linien, paarweise genommen, parallel sind. Hiernach bestimmen sich die Berührungs-Puncte auf dem gegebenen Kreise folgendermaafsen: man beschreibe ein Parallelogramm um den gegebenen Kreis, dessen beide Paare gegenüberliegender Seiten mit den beiden gegebenen geraden Linien parallel sind, und ziehe von dem Durchschnitte der letztern vier gerade Linien nach den vier Winkel-Puncten jenes Parallelogrammes. Die acht Puncte Q, in welchen diese vier Linien den Kreis schneiden, sind die gesuchten. In dem Falle der 64. Figur begegnen zwei der eben bezeichneten geraden Linien, nemlich PM und PM dem Kreise nicht, es gibt also hier, was uns auf die frühere Constructions-Art zeigte, nur zwei Paare gesuchter Berührungs-Kreise.

Auch die dritte Construction läfst sich auf diesen Fall ohne alle Schwierigkeit übertragen.

212. Wir wollen nun einen Schritt weiter gehen: Seyen C und C' zwei gegebene Kreise, welche von zweien andern γ und γ' berührt werden, und zwar im Falle der Figur, auf den wir uns zunächst beziehen wollen, wird C von beiden Kreisen aufserhalb und C' von beiden innerhalb berührt. Aus dem innern Symmetral-Puncte von C und C' ist ein Kreis K beschrieben, der mit diesen Kreisen dieselbe Chordale hat, und, um das Entsprechende gleich neben einander zu stellen, aus dem äufsern Symmetral-Puncte der Kreise γ und γ' (von denen jeder von C und C' verschiedenartig berührt wird) ist ein Kreis $\varkappa$ beschrieben, der mit γ und γ' dieselbe Chordale hat. Der Kreis K schneidet alsdann (199) die Kreise γ und γ' und alle mögliche andere, welche C und C' auf entsprechende Weise berühren, unter rechten Winkeln, so wie der Kreis $\varkappa$ die Kreise C und C' und alle mögliche andere, welche γ und γ' auf entsprechende Weise berühren, unter rechten Winkeln schneidet. Fig. 65.

Die Durchschnitte der beiden Kreise C und C' mit einem beliebigem Kreise c, der durch irgend zwei Puncte, A und B, geht, die für den Kreis K zugeordnete Pole sind, und der also den letztgenannten Kreis rechtwinklig schneidet, liegen, paarweise genommen, Q und Q', q und q', mit dem Mittelpuncte dieses Kreises K in gerader Linie. Denn ein Kreis, der durch die beiden Pole A und B und durch den Punct Q oder q geht, geht auch durch den Pol von Q oder q, durch Q' oder q' (132). Da nun der Mittelpunct des Kreises K der (innere) Symmetral-Punct von C und C', ist, so folgt weiter, (179) dafs jener Kreis c die beiden Kreise C und C' unter gleichen Winkeln schneidet. Ebenso schneidet jener Kreis, der durch irgend zwei Puncte geht, die rücksichtlich des Krei-

ses $\varkappa$ zugeordnete Pole sind, die beiden Kreise γ und γ', im Falle, dafs er denselben überhaupt begegnet, unter gleichen Winkeln.

Da wir nach dem frühern die beiden Kreis-Paare C und C', γ und γ', conjugirte Kreise in Beziehung auf K und $\varkappa$ nennen, so können wir den eben bewiesenen Satz in folgende Anssage einkleiden:

Jeder Kreis, der einen gegebenen Kreis rechtwinklig schneidet, oder, was hiermit einerlei ist, durch irgend zwei conjugirte Pole desselben geht, schneidet je zwei beliebige conjugirte Kreise unter gleichen Winkeln.

Fig. 65. 66. 213. Da die beiden Kreise K und γ' sich unter rechten Winkeln schneiden, so bestimmt jede gerade Linie, welche durch den Mittelpunct des Kreises K geht und den Kreis γ' schneidet, zwei Durchschnitte, die in Beziehung auf K zugeordnete Pole sind. Solche Pole seyen N und N'. Beschreibt man nun zwei Kreise k und k', die beide mit dem Kreise K ein und dieselbe gerade Linie zur Chordalen haben, und von welchen jeder überdiefs durch einen der beiden eben bezeichneten Durchschnitts-Puncte N und N' geht, so sind diese Kreise k und k' offenbar in Beziehung auf K conjugirte Kreise und werden also, nach der vorigen Nummer von γ' unter gleichen Winkeln geschnitten.

Fig. 66. Wir wollen nun sogleich drei Kreise γ, γ' und γ'' betrachten, die, alle drei, einen gegebenen Kreis rechtwinklig schneiden, oder es seyen vielmehr ursprünglich jene drei Kreise gegeben, für welche wir den Orthogonal-Kreis K, der alsdann ein durchaus bestimmter ist, construiren. Zieht man ferner durch den Mittelpunct des letztgenannten Kreises K, oder, mit andern Worten, durch den Chordal-Punct von γ, γ' und γ'', irgend eine gerade Linie, welche einen beliebigen dieser drei Kreise, etwa γ', wie vorhin in N und N' schneidet, und construirt wiederum zwei Kreise k und k', welche mit K irgend eine gerade Linie SS zur gemeinschaftlichen Chordalen haben: so werden k und k' zunächst von γ', dann aber auch von den beiden andern Kreisen γ und γ'' unter gleichen Winkeln geschnitten (212). Wir sehen also hieraus, wie zwei Kreise k und k', welche drei gegebene γ, γ' und γ'' der Ordnung nach unter bestimmten Winkeln ω, ω' und ω'' schneiden, sich so zusammenordnen, dafs sie mit demjenigen Kreise, der die drei gegebenen Kreise alle drei unter rechten Winkeln schneidet, dieselbe Chordale haben, und dafs also ihre Mittelpuncte mit dem Chordal-Puncte in gerader Linie liegen.*)

---

*) Da im Durchschnitte zweier Kreis-Bogen jedesmal Scheitel-Winkel entstehen, so wollen wir, um alle Zweideutigkeit zu vermeiden, für den Durchschnitts-Winkel stets denjenigen nehmen, dessen (krummlinige) Schenkel einander ihre beiden convexen oder ihre beiden concaven Seiten zukehren. Nehmen wir bei dieser Bestimmung die Winkel ω, ω' und ω'' für diejenigen, unter welchen k die Kreise γ, γ' und γ'' schneidet, so schneidet k' (für den Fall der Construction der 66. Figur) dieselben Kreise unter folgenden Winkeln: $(\pi-\omega)$, $(\pi-\omega')$ und $(\pi-\omega'')$. Wenn zwei Kreise sich aufserhalb berühren, so ist der Durchschnitts-Winkel gleich Null; dieser Winkel ist hingegen gleich π, wenn die beiden Kreise sich so berühren, dafs einer den andern umschliefst.

Fig. 67. Wenn die Radien und der Abstand der Mittelpuncte zweier sich schneidender Kreise C und γ bekannt sind, so können wir leicht den Durchschnitts-Winkel derselben NMν, den wir ω nennen wollen, bestimmen. Die Schenkel dieses Winkels, MN und Mν, stehen nemlich auf den Radien beider Kreise, die durch den Durchschnitt M gehen, auf MC und Mγ, senkrecht; mithin ergänzen sich die Winkel ω und CMγ zu π, und ihre Cosinus sind also gleich,

Digitized by Google

214. Wir haben die beiden Kreise k und k', die durch N und N' gehen, in der vo- Fig. 66.
rigen Nummer dadurch näher bestimmt, dafs jeder derselben mit dem Orthogonal-Kreise K irgend eine gerade Linie, die als gegeben betrachtet worden ist, zur Chordalen hat. Wenn wir für diese gerade Linie eine der vier Symmetralen der drei gegebenen Kreise γ, γ' und γ'' nehmen, so werden diese gegebenen Kreise von k und k' unter denselben gleichen Winkeln geschnitten.

Wir wollen, um dieſs darzuthun, zunächst die drei Kreise γ, γ' und γ'' der 65. Figur Fig. 65.
betrachten, und als gemeinschaftliche Chordale die äufsere Symmetrale derselben nehmen, die den Orthogonal-Kreis K in M und M' wirklich schneidet. Wir erhalten also zwei, vorhin durch k und k' bezeichnete Kreise, wenn wir durch jeden zweier Durchschnitte N und N', die wir durch eine beliebige, durch den Chordal-Punct der gegebenen Kreise gehenden, geraden Linie auf γ' bestimmen, einen Kreis legen, der zugleich durch M und M geht.

Beschreiben wir nun irgend einen Kreis, der mit den Kreisen γ und γ' dieselbe Chordale hat, in dem besondern Falle der Figur also durch μ und μ' geht, so wird derselbe von jedem Kreise, der γ und γ' rechtwinklig schneidet, wie der Kreis K es thut, ebenfalls rechtwinklig geschnitten. Ein solcher Kreis ist $\varkappa$, dessen Mittelpunct auf der äufsern Symmetralen, mithin mit M und M' in gerader Linie, liegt. Diese Puncte sind daher in Beziehung auf den Kreis $\varkappa$, der den Kreis K unter rechten Winkeln schneidet, zugeordnete Pole, und jeder Kreis, der durch diese Puncte, durch M und M' geht, schneidet die Kreise γ und γ' unter gleichen Winkeln. Es schneiden sich also γ, γ' und k, k' gegenseitig unter gleichen Winkeln.

Die Puncte M und M' sind ebenfalls zugeordnete Pole in Beziehung auf jeden derjenigen beiden Kreise, die, dem Kreise $\varkappa$ entsprechend, aus den äufsern Symmetral-Puncten von γ und γ'', so wie von γ' und γ'' beschrieben werden und mit den bezüglichen Kreisen dieselbe Chordale haben. Hieraus folgt denn unmittelbar, dafs jeder Kreis, der durch M und M', d. h. durch die Durchschnitts-Puncte des Orthogonal-Kreises mit der äufsern Symmetralen geht, alle drei gegebene Kreise unter gleichen Winkeln schneidet. Es ordnen sich die Kreise, welche durch M und M' gehen, paarweise zusammen, wie k und k', so dafs wenn ein Kreis jedes Paares die drei gegebenen Kreise unter irgend einem Winkel ω schneidet, der andere derselben unter dem Winkel $(\pi-\omega)$ schneidet, und beide Kreise in Beziehung auf den Orthogonal-Kreis zugeordnete Kreise sind.

Wenn die äufsere Symmetrale der drei gegebenen Kreise dem Orthogonal-Kreise K Fig. 68.
nicht begegnet, so brauchen wir die Construction der in Rede stehenden Kreise, nur dahin abzuändern, dafs wir statt Kreise zu beschreiben, die durch M und M' (Puncte, die bei jener Annahme imaginär werden) gehen, nun solche Kreise beschreiben, die mit dem Orthogonal-Kreise die äufsere Symmetrale zur gemeinschaftlichen Chordalen haben. Hiervon überzeugen wir uns auf der Stelle. Wir brauchen zu diesem Ende nur die beiden Kreise γ und γ' zu betrachten und zu zeigen, dafs jeder auf die eben angezeigte Art

---

aber von entgegengesetztem Zeichen. Nennen wir nun die Radien beider Kreise R und ϱ den Abstand ihrer Mittelpuncte von einander $(C\gamma)$ ε, so ist:

$$\cos CM\gamma = \frac{R^2+\varrho^2-\varepsilon^2}{2R\varrho},$$

mithin:

$$\cos\omega = \frac{\varepsilon^2-(R^2+\varrho^2)}{2R\varrho},$$

Digitized by Google

beschriebene Kreis dieselben unter gleichem Winkel schneidet. Construiren wir, gerade wie vorhin, den Kreis $\varkappa$, so schneidet derselbe K rechtwinklig und also auch jeden andern Kreis k oder k', der mit K irgend eine gerade Linie, die durch den Mittelpunct des Kreises $\varkappa$ geht, wie die äufsere Symmetrale es thut, zur Chordalen hat. γ und γ' sind in Beziehung auf $\varkappa$ zugeordnete Kreise, und werden von dem, $\varkappa$ rechtwinklig schneidenden, Kreis k oder k' unter gleichen Winkeln geschnitten. Diese Beweis-Art erstreckt sich auch auf den zuerst betrachteten Fall.

Fig. 69. Wir müssen ferner den Fall unterscheiden, wo der Orthogonal-Kreis imaginär wird, d. h. der Chordal-Punct der drei gegebenen Kreise γ, γ' und γ'' innerhalb dieser Kreise fällt. In diesem Falle, dem die 69. Figur entspricht, sind diejenigen Kreise, welche die drei gegebenen, alle drei, auf dieselbe Weise berühren, immer möglich. Der eine derselben C wird von jedem der gegebenen umhüllt, während der andere C' dieselben alle drei umhüllt. Offenbar schneiden C und C' einander nicht, mithin begegnet diesen Kreisen auch nicht die Chordale derselben, oder die äufsere Symmetrale der Kreise γ, γ' und γ''. Nehmen wir nun beliebig zwei der letztgenannten drei Kreise, etwa γ und γ', so können wir immer, da diese Kreise sich schneiden, zwei Kreise construiren, für welche dieselben zugeordnete Kreise sind; der eine dieser Kreise $\varkappa$ ist aus dem äufsern Symmetral-Punct von γ und γ', als Mittelpunct, beschrieben. Dieser Kreis, dessen Mittelpunct also auch auf der Chordalen der Berührungs-Kreise C und C' liegt, schneidet jeden dieser Berührungs-Kreise unter rechten Winkeln. Dieſs ist sogleich ersichtlich. Denn, nehmen wir z. B. den Kreis C, so berührt derselbe γ und γ' in Q und Q'. Diejenige gerade Linie, welche durch diese Berührungen geht, geht auch durch den äufsern Symmetral-Punct von γ und γ' (171), durch den Mittelpunct des Kreises $\varkappa$. Da γ und γ' in Beziehung auf $\varkappa$ zugeordnete Kreise sind, so sind Q und Q' zugeordnete Pole, und ein Kreis, der wie C durch diese Pole geht, wird von $\varkappa$ rechtwinklig geschnitten. Hiernach schneidet denn ferner jeder andere Kreis (k, k'), der mit C zusammengestellt die äufsere Symmetrale zur Chordalen hat, oder was dasselbe heifst, der mit den beiden Berührungs-Kreisen C und C' dieselbe Chordale hat, den Kreis $\varkappa$ rechtwinklig und mithin (212) die Kreise γ und γ' unter gleichem Winkel.

Fig. 70. Es kann endlich noch der, aus dem äufsern Symmetral-Puncte zweier der gegebenen Kreise γ und γ' zu beschreibende, in dem Obigen $\varkappa$ genannte, Kreis imaginär werden, wenn nemlich einer der gegebenen Kreise γ' innerhalb des andern γ liegt. Wenn nun, bei dieser Voraussetzung, der dritte Kreis γ'' nicht ganz innerhalb des Kreises γ liegt, so können wir γ'' einmal mit γ, das andere Mal mit γ' zusammenstellen, und nach den obigen Verfahrungs-Arten darthun, dafs jeder Kreis, der mit dem Orthogonal-Kreise die äufsere Symmetrale zur Chordalen hat, die gegebenen Kreise γ, γ' und γ'' unter gleichen Winkeln schneidet. Doch wenn auch der dritte Kreis γ'' ganz innerhalb des Kreises γ liegt, so müssen wir in dem Beweise für diesen Fall nothwendig zwei Kreise zusammenstellen, für welche der, oben $\varkappa$ genannte, Kreis imaginär wird, und alsdann können die vorstehenden Beweis-Arten nicht mehr Statt finden. Wir können aber auf folgende Weise verfahren. Die beiden Kreise γ und γ' haben, mit γ'' zusammengestellt, K zum Orthogonal-Kreise. Es erhellt sogleich, dafs dieser Kreis, bei unserer Annahme, immer reell ist, während die bezüglichen Berührungs-Kreise imaginär sind. Der Kreis K begegnet immer der äufsern Symmetralen von γ, γ' und γ'' in zweien Puncten, die durch M und M' bezeichnet sind. (Wir überzeugen uns nemlich leicht, dafs, wenn von zweien Kreisen einer innerhalb des andern liegt, der äufsere Symmetral-Punct derselben immer innerhalb jedes beliebigen Kreises fällt, der die-

Digitized by Google

selben rechtwinklig schneidet, dafs $\gamma\varkappa$ gröfser ist als γO und kleiner als $\gamma O'$.) Wenn wir irgend eine gerade Linie durch $\varkappa$, den äufsern Symmetral-Punct von γ und γ', legen, so schneiden sich die Tangenten in N und N', in welchen Puncten diese Linien den Kreisen γ und γ' begegnet, auf der Chordalen dieser Kreise, im ξ (172). Es läfst sich also durch N und N', ein Kreis ξ legen, der γ und γ' rechtwinklig schneidet, und mithin die Centrale derselben (da nemlich γ und γ' sich nicht schneiden) in denselben Puncten O und O' trifft, in welchen ihr der Orthogonal-Kreis K begegnet. Es ist also, um kurz zu seyn, nach einem bekannten Satze der Elementar-Geometrie:

$$\varkappa O.\ \varkappa O' = \varkappa N.\ \varkappa N',$$
$$\varkappa O.\ \varkappa O' = \varkappa M.\ \varkappa M',$$

und also auch:

$$\varkappa N.\ \varkappa N' = \varkappa M.\ \varkappa M',$$

woraus denn ersichtlich ist, dafs durch die vier Puncte M, M', N und N' sich ein Kreis legen läfst, der, wie überhaupt jeder Kreis, der durch die letztgenannten beiden Puncte geht, die Kreise γ und γ' unter gleichen Winkeln schneidet. Da nun die gerade Linie NN' jede beliebige Richtung haben kann, so ist allgemein bewiesen, dafs jeder Kreis, der durch M und M' geht, γ und γ' und demnach alle drei Kreise γ, γ' und γ'', unter gleichen Winkeln schneidet.

215. Diejenigen Kreise, welche drei gegebene unter gleichen Winkeln schneiden, ordnen sich immer paarweise so zusammen, dafs der Durchschnitts-Winkel für die Kreise jedes Paares gleich sind oder einander zu π ergänzen. Je mehr der Durchschnitts-Winkel sich einem rechten nähert, desto näher rücken einander die beiden Kreise solcher Paare, bis sie endlich im Orthogonal-Kreise zusammenfallen. Als solche Kreis-Paare sind auch die Berührungs-Kreise C und C' der 65. 68. und 69. Figur anzusehen; in der Construction der letztgenannten Figur sind die Durchschnitts-Winkel dieser Kreise beide gleich π, in den andern Constructionen einmal gleich Null, das andere Mal gleich π zu nehmen.

In den Constructionen der 65. und 68. Figur sind die beiden Berührungs-Kreise und zugleich der Orthogonal-Kreis reell und der Mittelpunct des letztern liegt zwischen den Mittelpuncten der beiden erstern. Der Durchschnitts-Winkel kann hier jeder beliebige seyn. In der 69. Figur, wo der Orthogonal-Kreis imaginär wird (der Mittelpunct desselben fällt nicht zwischen C und C'), gibt es offenbar ein Minimum der möglichen Durchschnitts-Winkel, und hierdurch ist ein Kreis bestimmt, in dem zwei jener Schneidungs-Kreise zusammenfallen. Zwei zusammengehörige dieser Kreise sind immer noch als conjugirte Kreise zu betrachten, aber rücksichtlich eines Kreises, der, weil ihr äufserer Symmetral-Punct innerhalb derselben liegt, imaginär wird (184). Je zwei solcher conjugirter Kreise haben denselben Punct K zum äufsern Symmetral-Puncte, und alle haben dieselbe Chordale. Nehmen wir nun als erste Axe die gerade Linie, welche die Mittelpuncte alle derjenigen Kreise enthält, welche die drei gegebenen unter gleichen Winkeln schneiden, und als Anfangs-Punct den Punct K, so haben die Gleichungen zweier conjugirter Kreise, für welche wir C und C' nehmen mögen, folgende Form:

$$\left.\begin{aligned} y^2+(x-\alpha)^2 &= \varrho^2,\\ y^2+(x-\alpha')^2 &= \varrho'^2, \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

und zugleich ist:

$$\alpha\varrho' \pm \alpha'\varrho = 0, \quad (2)$$

wo wir, da K in der Construction der 69. Figur äufserer Symmetral-Punct ist, das negative Zeichen nehmen müssen.

Fig. 65. Wenn wir in der 65. Figur durch K irgend eine gerade Linie legen, die irgend zweien conjugirten Schneidungs-Kreisen k und k' in A und B (Puncte, in denen die Tangenten nicht parallel sind) begegnet, so ist das Product (KA. KB) constant und gleich dem Quadrate des Radius des Orthogonal-Kreises K, wie wir auch die beiden conjugir-
Fig. 69. ten Kreise k und k' nehmen mögen. Für die Construction der 69. Figur, wo wir für die willkührlich durch K gelegte gerade Linie die erste Axe, und für die conjugirten Kreise die beiden Berührungs-Kreise C und C_1 nehmen, ist jenes constante Product negativ, der Orthogonal-Kreis imaginär. Es ist aber, wenn wir die positiven x von A' nach A rechnen:

$$KA.\ KB = (\alpha+\varrho)(\alpha'-\varrho'),$$

und wenn wir entwickeln und zugleich die Bedingungs-Gleichung (2) berücksichtigen:

$$KA.\ KB = \alpha\alpha'-\varrho\varrho'.$$

Statt des Productes (KA. KB) können wir auch das Product (KA'. KB') nehmen und statt beider, jedoch mit negativem Zeichen das Quadrat derjenigen Ordinate KL, welche auf der zweiten Axe durch einen beliebigen der beiden, (in der Figur punctirten) Kreise bestimmt wird, die über AB und A'B' als Durchmesser beschrieben werden können und die ebenfalls von C und C' berührt werden. Wie wir nun zwei conjugirte Kreise nehmen mögen, derjenige Ausdruck, welcher $(\alpha\alpha'-\varrho\varrho')$ ähnlich gebildet wird, ist ein constanter und gleich $(-\overline{KL}^2)$. Sollen die beiden Kreise in einen einzigen zusammenfallen, für dessen Gleichung wir folgende nehmen wollen:

$$y^2+(x-a)^2 = r^2,$$

so entspricht obigem Ausdrucke (a^2-r^2) und wir haben — 2 mithin:

$$r^2-a^2 = \overline{KL}^2.$$

Hieraus ist ersichtlich, dafs der zu bestimmende Kreis, k, die zweite Axe ebenfalls im Puncte L schneidet und mithin durch die Durchschnitts-Puncte der, in der Figur punctirten, Kreise geht, und da er überdiefs mit C und C' die Symmetrale SS zur gemeinschaftlichen Chordalen hat, so ist er leicht zu construiren. Die beiden punctirten Kreise werden, da sie von C und C' berührt werden, von k unter demselben Winkel geschnitten, als die gegebenen γ, γ' und γ''. Wenn wir den Winkel des Durchschnittes jener punctirten Kreise unter sich durch ω bezeichnen, so ergibt sich für das gesuchte *Minimum* der in Rede stehenden Durchschnitts-Winkel: $\left(\frac{\pi+\omega}{2}\right)$.

Fig. 70. Wir wollen nun die Construction der 70. Figur, in der es einen Orthogonal-Kreis, aber keine Berührungs-Kreise gibt, näher betrachten. Zunächst ist offenbar, dafs hier die äufsere Symmetrale SS der drei gegebenen Kreise γ, γ' und γ'' sich, als ein Kreis von immer gröfser werdendem Radius, unter diejenigen Kreise ordnet, welche die gegebenen alle drei unter gleichem Winkel schneiden. Als zugeordneter Kreis ist derjenige Kreis k'' zu betrachten, der durch den Mittelpunct des Orthogonal-Kreises K geht. Dieser Kreis k'' bezeichnet eine Gränze; nehmen wir nemlich den Mittelpunct eines Schneidungs-Kreises, von k'' aus nach derjenigen Seite hin, auf welcher der Mittelpunct des Orthogonal-Kreises K liegt, beliebig an, so fällt der Mittelpunct des conjugirten Kreises nach derselben Seite hin und zwar so, dafs K zwischen den Mittelpuncten der beiden conjugirten Kreise sich befindet und der innere Symmetral-Punct ist. Solche zwei zugeordnete Kreise schneiden also jeden der drei gegebenen unter Winkeln, die sich zu π ergänzen. Das *minimum* des Durchschnitts-Winkels ist der kleinere der Nebenwinkel, unter welchen die Symmetrale SS den gegebenen Kreisen begegnet; diesen Win-

kel wollen wir ω nennen. Nehmen wir den Mittelpunct eines Schneidungs-Kreises von k'' aus, nach derjenigen Seite hin, auf welcher K nicht liegt, beliebig an, so fällt der Mittelpunct des conjugirten Kreises nach derselben Seite hin, so dafs K äufserer Symmetral-Punct wird. Je zwei solcher conjugirter Kreise schneiden mithin jeden der gegebenen unter gleichem Winkel. Solche Kreise sind k und k'. Der Durchschnitts-Winkel wächst, indem wir den Mittelpunct des Schneidungs-Kreises sich immer weiter von K entfernen lassen bis zu einer gewissen Gränze und nimmt dann wieder ab, indem er sich immer mehr $(\pi-\omega)$ nähert. Jenem *Maximum* entsprechen zwei conjugirte Kreise, welche in einen einzigen zusammenfallen. Dieser Kreis, k''', ist offenbar derjenige, welcher den Orthogonal-Kreis K rechtwinklig schneidet, und daher leicht zu construiren; sein Mittelpunct liegt in dem zweiten Durchschnitte des Kreises k'' mit der gemeinschaftlichen Centralen aller Schneidungs-Kreise.

216. Wenn wir in den bisherigen Entwicklungen die äufsere Symmetrale dreier gegebener Kreise mit einer der innern vertauschen, so kommen wir zu ähnlichen Constructionen. Wir brauchen hier nur anzudeuten, und wollen nur einen speciellen Fall hervorheben. In der 65. Figur ist mit den Kreisen γ und γ' ein Kreis γ''' zusammengestellt, der jeden der Berührungs-Kreise C und C' auf entgegengesetzte Weise berührt als die beiden erstgenannten Kreise. Alsdann schneiden sich C und C' und der Orthogonal-Kreis K in denselben beiden Puncten M und M'. Durch diese Puncte geht diejenige innere Symmetrale von γ, γ' und γ''', welche den äufsern Symmetral-Punct von γ und γ' enthält. Der Kreis k' schneidet die beiden Kreise γ und γ' in zwei Puncten N' und N', die mit dem äufsern Symmetral-Puncte dieser Kreise, $\varkappa$, in gerader Linie liegen. Hiernach schneidet k' die Kreise γ und γ' unter gleichem Winkel, den wir ω nennen wollen, während er γ''' unter einem Winkel schneidet, der jenen Winkel ω zu π ergänzt. Der zugeordnete Kreis k schneidet, im besondern Falle der Figur, die Kreise γ und γ' unter einem Winkel $(\pi-\omega)$ und den Kreis γ''' unter einem Winkel ω. Fig. 65.

Bei einer andern Gröfse und gegenseitigen Lage der drei gegebenen Kreise zu einander, können zwei conjugirte Kreise, wie k und k' jeden der gegebenen statt unter Winkeln, die sich zu π ergänzen, unter gleichen Winkeln schneiden.

217. Wir wollen hier nun gleich die Construction folgender Aufgabe anschliefsen: Fig. 71.

Einen Kreis zu beschreiben, der vier gegebene unter gleichem Winkel schneidet.

Seyen γ, γ', γ'' und γ''' die vier gegebenen Kreise; $M'''M_{,,,}$, $M''M_{,,}$, $M'M_{,}$ und MM die äufsern Symmetralen von γ, γ' und γ''; γ, γ' und γ'''; γ, γ'' und γ'''; und von γ' γ'' und γ'''; K''', K'', K', und K die Orthogonal-Kreise jener vier Systeme von drei Kreisen. Die Symmetrale von γ, γ' und γ'' schneide den bezüglichen Orthogonal-Kreis K''' in M''' und $M_{,,,}$: diese Puncte sind alsdann zugeordnete Pole für den, in der Figur punctirten, Kreis $\varkappa$, der aus dem äufsern Symmetral-Puncte von γ und γ' so beschrieben worden ist, dafs er mit diesen Kreisen dieselbe Chordale hat. Die Symmetrale von γ, γ' und γ''' schneide den bezüglichen Orthogonal-Kreis K'' in M'' und $M_{,,}$; diese Puncte sind alsdann, wie eben, zugeordnete Pole für den Kreis $\varkappa$. Durch M''', $M_{,,,}$, M'' und $M_{,,}$ läfst sich also ein Kreis legen: dieser Kreis schneidet die gegebenen alle vier unter gleichem Winkel. Die Construction dieses Kreises, auf die wir später zurückkommen, ergibt sich hiernach auf der Stelle.

Digitized by Google

218. Nachdem wir uns in den letzten Nummern in einem Cyclus von Aufgaben und Constructionen orientirt haben, wollen wir nun den Gegenstand durch Rechnung geradezu angreifen. Zunächst nehmen wir die Aufgabe:

Einen Kreis zu beschreiben, der jeden von drei gegebenen Kreisen unter einem gebenen Winkel schneidet.

Seyen:

$$\begin{aligned}(y-\beta)^2+(x-\alpha)^2 &= \varrho^2,\\ (y-b)^2+(x-a)^2 &= r^2,\\ (y-B)^2+(x-A)^2 &= R^2;\end{aligned} \qquad (1)$$

die Gleichungen der drei gegebenen Kreise, die der Ordnung nach unter den Winkeln ω, ω' und ω'' geschnitten werden sollen. Der Mittelpunct des gesuchten Kreises, dessen unbekannten Radius wir φ nennen wollen, liegt alsdann (214, Anm.) zugleich auf folgenden drei Kreisen:

$$\begin{aligned}(y-\beta)^2+(x-\alpha)^2 &= \varrho^2+\varphi^2+2\varrho\varphi\cos\omega,\\ (y-b)^2+(x-a)^2 &= r^2+\varphi^2+2r\varphi\cos\omega',\\ (y-B)^2+(x-A)^2 &= R^2+\varphi^2+2R\varphi\cos\omega'',\end{aligned} \qquad (2)$$

er ist, mit andern Worten, der Chordal-Punct dieser drei Kreise. Nehmen wir für φ nach einander jeden beliebigen Werth, so stellen die Gleichungen (2) verschiedene Systeme dreier Kreise dar. Die Chordal-Puncte aller dieser verschiedener Systeme liegen in gerader Linie. Um dieſs zu zeigen und zugleich die Gleichung dieser geraden Linie zu entwickeln, wollen wir

$$\varrho^2-(\alpha^2+\beta^2) = r^2-(a^2+b^2) = R^2-(A^2+B^2) \qquad (3)$$

setzen, d. h. den Anfangs-Punct der Coordinaten im Chordal-Puncte der drei gegebenen Kreise (1) annehmen. Ziehen wir nun von der ersten der drei Kreis-Gleichungen (2) nach einander die zweite und dritte ab, so ergibt sich mit Berücksichtigung der Bedingungs-Gleichung (3):

$$\begin{aligned}(b-\beta)y+(a-\alpha)x &= (\varrho\cos\omega-r\cos\omega')\varphi,\\ (B-\beta)y+(A-\alpha)x &= (\varrho\cos\omega-R\cos\omega'')\varphi;\end{aligned}$$

und, wenn wir φ eliminiren, kommt als gesuchte Gleichung:

$$y = -\frac{\varrho(a-A)\cos\omega+r(A-\alpha)\cos\omega'+R(\alpha-a)\cos\omega''}{\varrho(b-B)\cos\omega+r(B-\beta)\cos\omega'+R(\beta-b)\cos\omega''}\,x. \qquad (4)$$

Auf der durch diese Gleichung dargestellten geraden Linie liegt der Mittelponct des gesuchten Kreises. Solcher Kreise sind zwei möglich, nur müssen wir hierbei nicht auſser Acht lassen, daſs einer dieser Kreise oder auch alle beide solche seyn können, welche die gegebenen Kreise unter Winkeln schneiden, die alle drei Winkel ω, ω' und ω'' zu π ergänzen, denn die Gleichung (4) ändert sich nicht, wenn wir zugleich die Zeichen aller Cosinus ändern.

Setzen wir $\omega = \omega' = \omega''$, so verschwinden aus der letzten Gleichung die Winkel-Functionen ganz, und wir erhalten die 5. Gleichung der 153. Nummer, die Gleichung derjenigen geraden Linie, welche die Mittelpuncte zweier Berührungs-Kreise enthält. Diese gerade Linie ist also der geometrische Ort für die Mittelpuncte aller Kreise, welche die drei gegebenen Kreise unter gleichen Winkeln schneiden.

Wenn wir Nenner und Zähler des Coefficienten von x in der Gleichung (4) durch $\cos\omega$ dividiren, so kommen wir zu einer Gleichung, die, rücksichtlich der Winkel-Functionen, nur die Quotienten $\frac{\cos\omega'}{\cos\omega}$ und $\frac{\cos\omega''}{\cos\omega}$ enthält: Hieraus erhellt, daſs die Gleichung dieselbe bleibt, wie wir auch die Winkel ω, ω' und ω'' annehmen mögen, so lange nur

mögen, so lange nur jene Quotienten, die wir durch μ und ν bezeichnen wollen, sich nicht ändern. Die Gleichung (4) ist also der Ort für die Mittelpuncte aller derjenigen Kreise, welche die drei gegebenen Kreise unter Winkeln scheiden, deren Cosinus sich verhalten wie $1 : \mu : \nu$.

219. Wenn wir, ähnlich wie in der 195. Nummer, als erste Axe diejenige gerade Linie nehmen, welche durch die Mittelpuncte der beiden zu construirenden Kreise geht, so sind die Gleichungen dieser Kreise von folgender Form:

$$\begin{aligned} y^2+(x-A)^2 &= R^2, \\ y^2+(x-A')^2 &= R'^2; \end{aligned} \qquad (1)$$

und wenn wir als zweite Axe der Chordale dieser Kreise nehmen, so findet zwischen den Constanten ihrer Gleichungen überdiefs noch folgende Beziehung Statt:

$$R^2-A^2 = R'^2-A'^2. \qquad (2)$$

Es seyen ferner die Gleichungen der drei gegeben Kreise, die wir in der vorigen Nummer durch (1) dargestellt haben, nun folgende:

$$\begin{aligned} (y-\beta)^2+(x-\alpha)^2 &= \varrho^2, \\ (y-\beta')^2+(x-\alpha')^2 &= \varrho'^2, \\ (y-\beta'')^2+(x-\alpha'')^2 &= \varrho''^2. \end{aligned} \qquad (3)$$

Diese drei Kreise werden in einem Falle von beiden Kreisen (1) unter den gegebenen Winkeln ω, ω' und ω'', oder von beiden unter denjenigen Winkeln geschnitten, die die gegebenen zu π ergänzen; im andern Falle werden sie von einem der Kreise (1) unter den gegebenen Winkeln, von dem andern unter den Ergänzungs-Winkeln geschnitten. In dem einen Falle haben wir, wenn wir den ersten der Kreise (3) betrachten:

$$\begin{aligned} \beta^2+(\alpha-A)^2 &= R^2+\varrho^2 \pm 2R\varrho\cos\omega, \\ \beta^2+(\alpha-A')^2 &= R'^2+\varrho^2 \pm 2R'\varrho\cos\omega, \end{aligned}$$

und wenn wir abziehen und auf (2) Rücksicht nehmen, kommt:

$$(A'-A)\alpha = \mp (R'-R)\varrho\cos\omega.$$

In dem andern Falle ergibt sich auf ähnliche Weise:

$$(A'-A)\alpha = \mp (R'+R)\varrho\cos\omega,$$

und wir haben also, indem wir beide Fälle zusammenfassen:

$$\frac{\varrho\cos\omega}{\alpha} = \mp\frac{A'-A}{R'\mp R}.$$

In Beziehung auf den zweiten und dritten der Kreise (3) finden wir für $\frac{\varrho'\cos\omega'}{\alpha'}$ und $\frac{\varrho'\cos\omega''}{\alpha''}$ denselben Ausdruck, so dafs also:

$$\frac{\varrho\cos\omega}{\alpha} = \frac{\varrho'\cos\omega'}{\alpha'} = \frac{\varrho''\cos\omega''}{\alpha''}.$$

Hieraus folgt:

$$\alpha\varrho'\cos\omega' = \alpha'\varrho\cos\omega, \quad \alpha\varrho''\cos\omega'' = \alpha''\varrho\cos\omega, \quad \alpha'\varrho''\cos\omega'' = \alpha''\varrho'\cos\omega',$$

und mithin verschwinden die Ausdrücke:

$$\frac{\alpha\varrho'\cos\omega'-\alpha'\varrho\cos\omega}{\varrho'\cos\omega'-\varrho\cos\omega}, \quad \frac{\alpha\varrho''\cos\omega''-\alpha''\varrho\cos\omega}{\varrho''\cos\omega''-\varrho\cos\omega}, \quad \frac{\alpha'\varrho''\cos\omega''-\alpha''\varrho'\cos\omega'}{\varrho''\cos\omega''-\varrho'\cos\omega'}, \qquad (4)$$

d. h. die Abscissen dreier Symmetral-Puncte derjenigen drei Kreise, die aus den Mittelpuncten der gegebenen mit den Radien $\varrho\cos\omega$, $\varrho'\cos\omega'$ und $\varrho''\cos\omega''$ beschrieben werden können. Diese Symmetral-Puncte liegen also auf der Chordalen der beiden Kreise (1), die mithin eine Symmetrale der eben bezeichneten drei Kreise ist. Im Falle dafs die Winkel ω, ω' und ω'' alle drei gröfser oder alle drei kleiner als $\frac{\pi}{2}$ sind, ist diese Symmetrale eine äufsere, sonst eine der innern, die wir sogleich unterscheiden.

Digitized by Google

Aehnlich wie in der vorigen Nummer, erkennen wir, dafs auch die Ausdrücke (4) dieselben bleiben, so lange das Verhältnifs der Cosinus der Schneidungs-Winkel sich nicht ändert. Dieses Verhältnifs sey:

$$1 : \mu : \nu,$$

so dafs die drei Cosinus durch folgende Werthe dargestellt werden können:

$$\varepsilon, \quad \varepsilon\mu, \quad \varepsilon\nu,$$

indem wir durch ε beliebige Werthe bezeichnen. Nehmen wir ε immer kleiner, so nähert sich der Schneidungs-Kreis immer mehr dem Orthogonal-Kreise, der dem Uebergange von positiven Werthen von ε zu negativen Werthen entspricht. Dieser Kreis hat also mit allen in Rede stehenden Schneidungs-Kreisen die eben näher bestimmte Symmetrale zur gemeinschaftlichen Chordalen. Hiernach ergibt sich folgende Construction der Aufgabe, einen Kreis zu beschreiben, der jeden von drei gegebenen Kreisen unter einem gegebenen Winkel schneidet (wobei auch an die Stelle aller drei gegebenen Winkel die Nebenwinkel derselben treten können):

„Man verkürze den Radius jedes der drei gegebenen Kreise im Verhältnisse von Eins „zum Cosinus desjenigen Winkels, unter welchem derselbe geschnitten werden soll. Für „die drei neuen, auf diese Art bestimmten, Kreise construire man die äufsere Symmetrale, „wenn die gegebenen Winkel alle drei gröfser oder alle drei kleiner sind als $\frac{\pi}{2}$, sonst die„jenige innere Symmetrale, welche durch den äufsern Symmetral-Punct derjenigen beiden „(zuvor verkleinerten) Kreise geht, die unter den beiden der gegebenen Winkel geschnit„ten werden sollen, welche beide kleiner oder beide gröfser sind als $\frac{\pi}{2}$. Man construire „ferner für die drei ursprünglich gegebenen Kreise den Orthogonal-Kreis. Diejenigen bei„den Kreise, welche alsdann mit diesem Orthogonal-Kreise jene Symmetrale zur gemein„schaftlichen Chordalen haben, und überdiefs einen beliebigen der drei gegebenen Kreise „unter dem gegebenen Winkel schneiden, sind die gesuchten."

Die Determination liegt in der Möglichkeit derjenigen Aufgabe, auf welche die ursprüngliche zurückgeführt worden ist. *) Der Orthogonal Kreis kann imaginär werden (sein Radius unter der Form $R\sqrt{-1}$ erscheinen) und doch die Aufgabe möglich bleiben.

---

*) Um uns nicht zu unterbrechen, deute ich die Constructinn dieser Aufgabe nur beiläufig nach der gewöhnlichen analytischen Behandlungs-Weise an. Setzen wir nemlich den Anfangs-Punct der Coordinaten in den Fufs-Punct des vom Chordal-Puncte der gegebenen Kreise auf die im Texte bezeichnete Symmetrale, gefällten Perpendikels und nehmen die Symmetrale selbst zur zweiten Axe, so ist die Gleichung des Orthogonal-Kreises folgende:

$$y^2+(x-A)^2 = R^2,$$

wo A die Abscisse des Chordal-Punctes bezeichnet, und R^2 sich auf bekannte Weise bestimmt, der Orthogonal-Kreis mag reell oder imaginär seyn. (Einmal ist R^2 das Quadrat einer Tangente, das andere Mal $(-R^2)$ das Quadrat einer halben Chorde). Die Gleichung eines Kreises, der mit dem Orthogonal-Kreise die zweite Axe zur Chordalen hat, ist von derselben Form:

$$y^2+(x-a)^2 = r^2, \qquad (a)$$

und zugleich ist, ganz allgemein und auch für den Fall, dafs der Orthogonal-Kreis imaginär wird:

$$R^2-A^2 = r^2-a^2. \qquad (b)$$

220. Wir können die eben behandelte Aufgabe auch dahin ausdehnen, dafs die Durchschnitte des gesuchten Kreises mit den gegebenen, zum Theil oder alle, imaginär werden; indem wir nemlich die Cosinus der gegebenen Durchschnitts-Winkel gröfser als Eins nehmen, ihnen aber immer noch einen bestimmten Werth beilegen. Hierdurch wird eine Beziehung der Lage und Gröfse des verlangten Kreises zu der Lage und Gröfse jedes der gegebenen Kreise angegeben, die wir nach der Note zur 213. Nummer geometrisch leicht näher bezeichnen können. So lange das Verhältnifs der Cosinus, sie mögen alle oder zum Theil auch gröfser als Eins, mithin blofs fictiv seyn, folgendes bleibt:

$$1 : \mu : \nu,$$

so lange liegen die Mittelpuncte der gesuchten Kreise auf der durch die in der 218. Nummer entwickelten Gleichung dargestellten geraden Linie.

In die auf diese Weise erweiterte Reihe von gesuchten Kreisen ordnet sich jedesmal auch die in der vorigen Nummer bezeichnete Symmetrale, und wenn diese den Orthogonal-Kreis nicht schneidet, gehören hierbin auch zwei Puncte.

221. Wir wenden uns schliefslich nun zu folgender Aufgabe:

Einen Kreis zu beschreiben, der vier gegebene Kreise unter Winkeln schneidet, deren Cosinus in einem gegebenen Verhältnisse $1 : \mu : \nu : \varrho$ *stehen.*

Seyen:

$$\begin{aligned}(y-\beta)^2+(x-\alpha)^2 &= \varrho^2,\\ (y-\beta')^2+(x-\alpha')^2 &= \varrho'^2,\\ (y-\beta'')^2+(x-\alpha'')^2 &= \varrho''^2,\\ (y-\beta''')^2+(x-\alpha''')^2 &= \varrho'''^2,\end{aligned}$$

die Gleichungen der vier gegebenen Kreise. Wir wollen ferner den Radius des gesuchten Schneidungs-Kreises durch φ, und die Winkel, für welche das Verhältnifs der Cosinus gegeben ist, durch ω, ω', ω'' und ω''' bezeichnen. Alsdann liegt der Mittelpunct des zu construirenden Kreises zugleich auf folgenden vier Oertern:

$$\begin{aligned}(y-\beta)^2+(x-\alpha)^2 &= \varrho^2+\varphi^2+2\varrho\,\varphi\cos\omega,\\ (y-\beta')^2+(x-\alpha')^2 &= \varrho'^2+\varphi^2+2\varrho'\,\varphi\cos\omega',\\ (y-\beta'')^2+(x-\alpha'')^2 &= \varrho''^2+\varphi^2+2\varrho''\,\varphi\cos\omega'',\\ (y-\beta''')^2+(x-\alpha''')^2 &= \varrho'''^2+\varphi^2+2\varrho'''\,\varphi\cos\omega'''.\end{aligned}$$

Nehmen wir die Differenz je zweier dieser vier Gleichungen, und setzen zugleich der Kürze halber:

$$\varrho^2-(\alpha^2+\beta^2)=\xi,\quad \varrho'^2-(\alpha'^2+\beta'^2)=\xi',\quad \varrho''^2-(\alpha''^2+\beta''^2)=\xi'',\quad \varrho'''^2-(\alpha'''^2+\beta'''^2)=\xi''',$$

so kommen wir zu folgenden sechs linearen Gleichungen:

$$\begin{aligned}2(\beta'-\beta)y+2(\alpha'-\alpha)x+\xi'-\xi &= 2(\varrho\cos\omega-\varrho'\cos\omega')\varphi,\\ 2(\beta''-\beta)y+2(\alpha''-\alpha)x+\xi''-\xi &= 2(\varrho\cos\omega-\varrho''\cos\omega'')\varphi,\\ 2(\beta'''-\beta)y+2(\alpha'''-\alpha)x+\xi'''-\xi &= 2(\varrho\cos\omega-\varrho'''\cos\omega''')\varphi,\\ 2(\beta''-\beta')y+2(\alpha''-\alpha')x+\xi''-\xi' &= 2(\varrho'\cos\omega'-\varrho''\cos\omega'')\varphi,\\ 2(\beta'''-\beta')y+2(\alpha'''-\alpha')x+\xi'''-\xi' &= 2(\varrho'\cos\omega'-\varrho'''\cos\omega''')\varphi,\\ 2(\beta'''-\beta'')y+2(\alpha'''-\alpha'')x+\xi'''-\xi'' &= 2(\varrho''\cos\omega''-\varrho'''\cos\omega''')\varphi.\end{aligned}$$

Soll ferner der durch (a) dargestellte Kreis, den ersten der gegebenen (3) unter dem gegebenen Winkel ω schneiden, so ist:

$$\beta^2+(\alpha-a)^2 = r^2+\varrho^2+2r\varrho\cos\omega. \qquad (c)$$

Die beiden Gleichungen (b) und (c) führen, um r und a zu bestimmen, zu leicht construirbaren quadratischen Gleichungen.

Wir wollen, zum Behuf der Kürze, die Ausdrücke in y, x und gegebenen Gröfsen, die wir für φ aus den letzten sechs Gleichungen erhalten, durch A, A_1, A_2, A_3, A_4 und A_5 darstellen. Diese sechs Symbole können $\frac{6.5}{1.2} = 15$ Mal, paarweise genommen, einander gleich gesetzt werden, und so kommen wir zu folgenden Gleichungen:

$$\begin{array}{lll} A - A_1 = 0, & A - A_2 = 0, & A_1 - A_3 = 0; \\ A - A_2 = 0, & A - A_4 = 0, & A_2 - A_3 = 0; \\ A_1 - A_2 = 0, & A_1 - A_5 = 0, & A_2 - A_5 = 0; \\ A_3 - A_4 = 0, & A_3 - A_5 = 0, & A_4 - A_5 = 0; \\ A - A_5 = 0, & A_1 - A_4 = 0, & A_2 - A_4 = 0. \end{array} \qquad (1)$$

Die in diesem Schema zusammengestellten Gleichungen enthalten nicht mehr φ, sind nicht mehr unmittelbar von den Cosinus der Winkel ω, ω', ω'' und ω''', sondern blofs von den Quotienten je zweier derselben abhängig, und stellen also, da diese Quotienten gegeben sind, construirbare gerade Linien dar.

Die in jeder der vier ersten Reihen des letzten Schema's enthaltenen drei Gleichungen sind identisch und haben, entwickelt, die Form der 4. Gleichung der 218. Nummer. Sie stellen die vier Oerter für die Mittelpuncte derjenigen Kreise dar, welche den ersten, zweiten und dritten; den ersten, zweiten und vierten; den ersten, dritten und vierten; den zweiten, dritten und vierten gegebenen Kreis, der Ordnung nach, unter Winkeln schneiden, deren Cosinus sich verhalten wie:

$$1 : \mu : \nu, \qquad 1 : \mu : \varrho, \qquad 1 : \nu : \varrho, \qquad \mu : \nu : \varrho.$$

Diese vier Oerter, die gerade Linien sind, schneiden sich in demselben Puncte. Dieſs ist sogleich ersichtlich, denn, in folgenden Zusammenstellungen z. B:

$$\begin{array}{lll} A - A_1 = 0, & A - A_2 = 0, & A_1 - A_2 = 0; \\ A - A_3 = 0, & A - A_4 = 0, & A_3 - A_4 = 0; \end{array}$$

bedingen zwei Gleichungen die dritte; es gehen also die bezüglichen geraden Linien, einmal die erste, zweite und dritte; das andere Mal die erste, zweite und vierte, mithin alle vier durch denselben Punct. Dieser Punct ist der Mittelpunct des gesuchten Kreises, der die gegebenen unter Winkeln schneidet, deren Cosinus sich verhalten wie $1 : \mu : \nu : \varrho$. Denn ein Kreis, der aus diesem Puncte, als Mittelpuncte, beschrieben wird und die drei ersten Kreise unter Winkeln schneidet, deren Cosinus sich verhalten wie $1 : \mu : \nu$, schneidet, weil er ebenfalls auf der letzten der vier zusammenlaufenden geraden Linien liegt und schon den zweiten und dritten Kreis unter Winkeln schneidet, deren Verhältnifs $\mu : \nu$ ist, den vierten gegebenen Kreis so, dafs die Cosinus der Schneidungs-Winkel für die letzten drei Kreise sich verhalten wie $\mu : \nu : \varrho$.*)

Der gesuchte Kreis selbst ist hiernach leicht zu construiren, es kommt nur noch darauf an, aus einem bestimmten Puncte derjenigen geraden Linie, welche die Mittelpuncte aller Kreise enthält, welche drei der gegebenen unter Winkeln schneiden, deren Cosinus in gegebenem Verhältnisse stehen, einen dieser Kreise zu beschreiben, und die 219. Nummer führt diese Construction auf folgende zurück: aus einem gegebenen Puncte, als Mittelpuncte, einen Kreis zu beschreiben, der mit einem gegebenen Kreise eine be-

*) Die in der 5. Reihe des Schema's (1) zusammengestellten drei Gleichungen bezeichnen gerade Linien, deren geometrische Bedeutung sogleich erhellt, und die sich leicht, durch Bestimmung von zwei Puncten, construiren lassen. Diese drei Linien gehen ebenfalls durch den Mittelpunct des gesuchten Schneidungs-Kreises.

Digitized by Google

kannte gerade Linie zur Chordalen hat. In der Möglichkeit dieser letzten Construction liegt die Determination unserer Aufgabe. Da wir auf vierfache Weise die vier gegebenen Kreise zu drei zusammenstellen können, so können wir auch vier Kreise bestimmen und vier gerade Linien, welche die Chordalen dieser vier Kreise und des gesuchten Kreises sind. Im Falle lauter wirklicher Durchschnitte können wir also acht Puncte bestimmen, die auf demselben, dem gesuchten, Kreise liegen. Dieser Kreis ist immer reell, wenn auch nur eine einzige jener Chordalen dem bezüglichen Orthogonal-Kreise begegnet.

Wir müssen ferner auch darauf aufmerksam seyn, dafs der gesuchte Kreis reell seyn kann, ohne dafs er den gegebenen allen oder auch nur irgend einem derselben begegnet (220).

In dem Bisherigen liegen die Elemente zu verschiedenfach modificirten Constructionen unserer Aufgabe. Wir heben die folgende hervor:

„Man construire für zweimal irgend drei der gegebenen vier Kreise den Orthogonal-„Kreis; man verkürze ferner, indem man den Radius des ersten gegebenen Kreises beibe-„hält, die Radien des zweiten, dritten und vierten Kreises in den Verhältnissen $1:\mu$, „$1:\nu$ und $1:\varrho$; und construire für die beiden Systeme von drei neuen Kreisen, die den-„jenigen entsprechen, für welche wir eben den Orthogonal-Kreis construirt haben, die „äufsern Symetralen. Derjenige Kreis, welcher alsdann mit den beiden Orthogonal-„Kreisen diese beiden Symetralen zu Chordalen hat, ist der gesuchte."

222. Die in der vorigen Nummer behandelte Aufgabe gestattet nur eine einzige Auflösung, so lange wir die Durchschnitts-Winkel stets auf die früher festgesetzte Weise nehmen. Nehmen wir aber willkührlich jene Durchschnitts-Winkel oder ihre Nebenwinkel, so erhalten wir acht Auflösungen, weil das gegebene Verhältnifs:

$$1 : \mu : \nu : \varrho,$$

durch Zeichenänderung der einzelnen Glieder acht Fälle einschliefst. Einmal können wir nemlich alle Glieder mit demselben Zeichen nehmen, viermal drei mit demselben und das vierte mit verschiedenem Zeichen, und dreimal zwei und zwei mit gleichem Zeichen. Die Modification obiger Construction für die einzelnen Fälle bestehen einzig in der Vertauschung äufserer Symmetralen mit innern.

223. Die Construction der 221. Nummer schliefst, als besondern Fall die Construction desjenigen Kreises in sich, der vier gegebene unter gleichen Winkeln schneidet, und kommt alsdann auf die 217. Nummer hinaus. Hier können wir auch auf folgende Weise verfahren:

„Man construire für jedes zweier Systeme von drei gegebenen, beliebig zusammenge-„stellten, Kreise die beiden bezüglichen Berührungs-Kreise. Der gesuchte Kreis hat als-„dann mit den beiden Berührungs-Kreisen jedes Paares dieselbe Chordale, und ist mit-„hin leicht zu beschreiben."

Die Lage des Mittelpunctes des gesuchten Kreises, rücksichtlich der Mittelpuncte der Berührungs-Kreise jedes beliebigen Paares, bestimmt, ob der Durchschnitts-Winkel ein reeller ist oder nicht.

224. Wenn wir, indem wir bei der Construction der 71. Fig. stehen bleiben, aus dem äufsern Symmetral-Puncte der Kreise γ und γ' einen Kreis $\varkappa$ beschreiben, der mit diesen beiden Kreisen dieselbe Chordale hat, so schneidet derselbe den Orthogonal-Kreis K''' von γ, γ' und γ'' unter rechten Winkeln, und ebenso jeden andern Kreis, der mit K''' Fig. 71.

eine gerade Linie, die, wie $M'''M_{,,,}$, durch jenen Symmetral-Punct geht, zur Chordalen hat, also auch den gesuchten Kreis C. Solcher Kreise, die dem Kreise $\varkappa$ entsprechen, gibt es im Allgemeinen $\frac{4.3}{1.2} = 6$, und diese sechs Kreise können wir auf $\frac{6.5.4}{1.2.3} = 20$ verschiedene Weisen zu drei combiniren. Die drei Kreise von vier dieser Combinationen haben eine gemeinschaftliche Chordale, welche durch den Mittelpunct des gesuchten Kreises geht; für jede der übrigen Combinationen von drei Kreisen, können wir den gesuchten Kreis, als Orthogonal-Kreis, construiren. Nicht auf der Realität des Kreises $\varkappa$ und der entsprechenden, sondern in der Realität des Orthogonal-Kreises, beruht die Möglichkeit der Aufgabe, die sogar immer Statt hat, wenn einer oder mehrere Kreise, die $\varkappa$ entsprechen, imaginär werden. Hieraus ergibt sich folgende Construction eines Kreises, der vier gegebene unter gleichen Winkeln schneidet:

„Aus den äufsern Symmetral-Puncten von drei, beliebig unter den gegebenen Kreisen „zusammengestellten, Paaren, die jedoch alle vier gegebene Kreise enthalten müssen, „beschreibe man drei Kreise, die mit den bezüglichen gegebenen dieselbe Chordale haben. „Der Orthogonal-Kreis des Systems dieser drei Kreise ist alsdann der gesuchte Kreis."

225. Wir können die letzten Constructionen ganz auf dieselbe Weise, wie wir es in Beziehung auf das Problem der Tactionen gethan haben, unmittelbar auf die entsprechenden Aufgaben übertragen, wo Puncte und gerade Linien an die Stelle eines oder mehrerer der gegebenen, unter gleichen Winkeln zu schneidenden, Kreise treten. Wir verweilen hier nicht bei diesen leichten Uebertragungen.

Digitized by Google

Dritter Abschnitt.

Zur Theorie der Linien zweiter Ordnung.

226. Jede einzelne Linie, die durch eine Gleichung vom zweiten Grade zwischen zweien veränderlichen Grösen dargestellt wird, pflegt man mit dem Namen: „Linie des zweiten Grades“ oder „der zweiten Ordnung“ zu bezeichnen. In der analytischen Behandlung können wir daher alle diese einzelnen Linien, die eine besondere Classe von Curven bilden, durch die allgemeine Gleichung vom zweiten Grade zwischen y und x vertreten lassen, also durch folgende Gleichung:

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0,$$

wo A, B, C, D, E und F unbestimmte constante Coefficienten bedeuten, denen wir erst bestimmte Werthe beilegen für eine bestimmte, für eine gegebene Curve. Indem wir nun diese Gleichung behandeln und die Resultate, zu denen wir kommen, geometrisch deuten, gelangen wir zu den Eigenschaften der Linien zweiter Ordnung. Diese Eigenschaften erscheinen unter sehr verschiedenen Modificationen, je nachdem wir die Coefficienten obiger Gleichung bestimmen; da aber alle besondern Gleichungen desselben Grades gewisse characteristische Eigenschaften (was z. B. die Zahl der Wurzeln und die Beziehung derselben zu einander betrifft) gemein haben und diesen Eigenschaften eine geometrische Bedeutung entspricht, so durchblickt man leicht den Grund, warum die Eintheilung der Curven nach dem Grade der Gleichungen, durch welche sie analytisch ausgedrückt werden, eine der Natur der Curven selbst angemessene ist. Diese Eigenschaften der Curven sind unabhängig von irgend einem bestimmten Coordinaten-Systeme, und so ist denn auch aus dem eben Erwähnten a priori ersichtlich, dafs der Grad der Gleichung ein und derselben Curve sich nicht ändern kann, wenn wir dieselbe auf verschiedene Systeme geradliniger Coordinaten-Axen beziehen.

227. Den Eintheilungs-Grund für die Linien des zweiten Grades in Arten wollen wir wiederum in den besondern Formen aufsuchen, unter welche dieselben vermittelst Coordinaten-Umformung gebracht werden können. Diese Methode scheint mir vor allen andern den Vorzug zu behaupten.

Die Verwandlung der Coordinaten zerfällt in zwei wesentlich von einander unabhängige Operationen: in die Verlegung des Anfangs-Punctes der Coordinaten mit Beibehaltung der Richtung der Axen, und in Veränderung der Axen-Richtung, indem der Anfangs-Punct der Coordinaten unverrückt bleibt. Wir wollen also sehen, welche For-

Digitized by Google

men die allgemeine Gleichung des zweiten Grades annehmen kann, vermittelst jener zwiefachen Coordinaten-Veränderung.

Statt der obigen allgemeinen Gleichung des zweiten Grades wollen wir in der Folge uns vorzugsweise der folgenden bedienen:

$$y^2+2\alpha xy+\beta x^2+2\gamma y+2\delta x+\varepsilon = 0,$$

die, indem wir den Coefficienten des ersten Gliedes durch Division fortgeschafft haben, nichts von ihrer Allgemeinheit verloren hat, und in der 2α, β, 2γ, 2δ und ε wiederum unbestimmte Coefficienten sind, wo der Factor 2, wo er vorkommt, nur der Symmetrie in den folgenden Entwicklungen wegen, hinzugefügt worden ist.

§. 1.

Verlegung des Anfangs-Punctes der Coordinaten. Discussion aller einzelnen Fälle, welche die allgemeine Gleichung umfafst.

228. Sey also:

$$y^2+2\alpha xy+\beta x^2+2\gamma y+2\delta x+\varepsilon = 0 \qquad (1)$$

die allgemeine Gleichung der Linien zweiter Ordnung auf irgend ein beliebiges, rechtwinkliges oder schiefwinkliges, Coordinaten-System bezogen. Sind alsdann y' und x' die Coordinaten eines Punctes, über dessen Lage wir einstweilen noch keine nähere Bestimmung machen, so brauchen wir blofs in die Gleichung (1)

$$y+y' \text{ statt } y, \quad \text{und} \quad x+x' \text{ statt } x,$$

zu substituiren, um die bezügliche Curve auf ein neues Coordinaten-System zu beziehen, dessen Axen den frühern parallel bleiben, dessen Anfangs-Punct aber in den Punct (y', x') verlegt ist. Auf diese Weise erhalten wir:

$$y^2+2\alpha xy+\beta x^2+2(y'+\alpha x'+\gamma)y+2(\alpha y'+\beta x'+\delta)x$$
$$+(y'^2+2\alpha x'y'+\beta x'^2+2\gamma y'+2\delta x'+\varepsilon) = 0. \qquad (2)$$

Wir bemerken zuvörderst, dafs diese Anfforderung sich nur auf die Coefficienten von y und x und auf das constante Glied erstreckt. Durch eine schickliche Annahme von y' und x', d. h. indem wir die Lage des neuen Anfangs-Punctes gehörig wählen, können wir im Allgemeinen jene beiden Coefficienten, oder auch jeden einzelnen derselben und das constante Glied verschwinden lassen.

229. Damit die Coefficienten von y und x in der umgeformten Gleichung verschwinden, müssen wir y' und x' so nehmen, dafs die beiden Gleichungen:

$$\begin{aligned} y'+\alpha x'+\gamma &= 0, \\ \alpha y'+\beta x'+\delta &= 0, \end{aligned} \qquad (3)$$

befriedigt werden. Da diese beiden Gleichungen linear sind, so gibt die Elimination niemals imaginäre Werthe für y' und x'; diese Werthe können aber unendlich und unbestimmt werden. Eliminiren wir wirklich, so kommt:

$$y' = \frac{\beta\gamma-\alpha\delta}{\alpha^2-\beta}, \qquad x' = \frac{\delta-\alpha\gamma}{\alpha^2-\beta}. \qquad (4)$$

Weil wir den Coefficienten des ersten Gliedes der allgemeinen Gleichung des zweiten Grades auf Eins gebracht haben, ist nicht sogleich ersichtlich, welche Form die letzten Ausdrücke annehmen, wenn jenes erste Glied fehlt. Für diesen Fall ist die allgemeine

Gleichung, nachdem wiederum alle Glieder derselben durch den Coefficienten von xy dividirt worden, unter folgender Form:

$$xy+\beta x^2+\gamma y+\delta x+\epsilon,$$

die Gleichungen (3) verwandeln sich hiernach in:

$$x'+\gamma = 0, \qquad y'+2\beta x'+\delta = 0,$$

und mithin kommt:

$$x' = -\gamma, \qquad y' = 2\beta\gamma - \delta.$$

Wenn endlich auch β Null ist, also auch das mit x^2 behaftete Glied ausfällt und die Form der Gleichung folgende ist:

$$xy+\gamma y+\delta x+\epsilon = 0,$$

so ergibt sich:

$$x' = -\gamma, \qquad y' = -\delta.$$

230. Für die in der vorigen Nummer bestimmten Werthe von y' und x' verschwinden aus der Gleichung (2) diejenigen beiden Glieder, welche die ersten Potenzen der veränderlichen Gröfsen enthalten. Zugleich bekommt das von denselben unabhängige Glied einen bestimmten Werth, den wir durch die Coefficienten der ursprünglichen Gleichung (1) ausdrücken können. Addiren wir zu diesem Ende die ersten Theile der beiden Gleichungen (3), nachdem wir zuvor die eine mit y', die andere mit x' multiplicirt haben, und ziehen den auf diese Weise erhaltenen Ausdruck von jenem constanten Gliede, nemlich von:

$$y'^2+2\alpha x'y'+\beta x'^2+2\gamma y'+2\delta x'+\epsilon$$

ab, so vereinfacht sich dasselbe, so dafs wir blofs:

$$\gamma y'+\delta x'+\epsilon$$

übrig behalten.

Substituiren wir in diesem Ausdruck die eben entwickelten Werthe von y' und x', so kommt, wenn wir Alles auf gemeinschaftlichen Nenner bringen:

$$\frac{\delta^2-2\alpha\delta\gamma+\beta\gamma^2+(\alpha^2-\beta)\epsilon}{\alpha^2-\beta},$$

und diesem Ausdrucke können wir auch folgende Form geben:

$$\frac{(\delta-\alpha\gamma)^2+(\alpha^2-\beta)(\epsilon-\gamma^2)}{\alpha^2-\beta}.$$

Es verwandelt sich also die Gleichung (1), indem wir den Anfangs-Punct der Coordinaten in den Punct (y', x') verlegen und, der Kürze halber:

$$\frac{(\delta-\alpha\gamma)^2+(\alpha^2-\beta)(\epsilon-\gamma^2)}{\alpha^2-\beta} = \epsilon'$$

setzen, in folgende Gleichung:

$$y^2+2\alpha xy+\beta x^2+\epsilon' = 0. \qquad (5)$$

Diese Umformung kann immer Statt finden und die ungeformte Gleichung dieselbe Curve noch immer wirklich darstellen, wenn die Werthe von y' und x' nicht unendlich werden, und sie kann immer nur auf eine einzige Weise geschehen, wenn diese Werthe nicht unbestimmt werden. Diese beiden Fälle, denen beiden die Bedingung:

$$\alpha^2-\beta = 0,$$

entspricht, wollen wir für den Augenblick ausschliefsen und später besonders betrachten.

231. Ziehen wir durch den neuen Anfangs-Punct der Coordinaten irgend eine gerade Linie, deren Gleichung also von der Form:

$$y = \varkappa x,$$

ist, so finden wir für die gleichnamigen Coordinaten der Durchschnitte dieser geraden Linie mit der Linie zweiter Ordnung gleiche und entgegengesetzte Werthe. Substituiren

wir den Werth von y, den die letzte Gleichung gibt, in die umgeformte Gleichung Curve (5), so finden wir

$$x = \pm\left(\frac{-\epsilon'}{x'+2\alpha x+\beta'}\right)^{\frac{1}{2}},$$

für die Abscissen der Durchschnitts-Puncte, und hieraus die entsprechenden Werthe von y, indem wir mit x multipliciren. Es wird also im Allgemeinen jede, von der Curve begränzte gerade Linie, die durch den neuen Anfangs-Punct der Coordinaten geht, in diesem Puncte halbirt. Dieser Punct, mit andern Worten, ist der Mittelpunct der Curve. Jede gerade Linie, die durch den Mittelpunct geht, heifst ein Durchmesser.

232. Die eben gefundenen beiden gleichen und entgegesetzten Werthe von x sind nicht immer reell. Wir wollen die einzelnen Fälle, denen eben so viele Unterarten von Linien der zweiten Ordnung entsprechen, ausführlicher behandeln. Es kommt hierbei Alles auf das Zeichen des Ausdrucks an, aus dem die Quadrat-Wurzel gezogen werden mufs, und also zunächst auf das Zeichen des Nenners

$$x^2+2\alpha x+\beta,$$

dessen Werth sich ändert, wie wir die Richtung der geraden Linie, die durch x bestimmt wird, sich ändern lassen. Nach einem, aus der Theorie der quadratischen Gleichungen bekanntem, Satze bleibt dieser Ausdruck, wie wir auch x annehmen mögen, immer positiv und kann auch nicht Null werden, wenn die Factoren vom ersten Grade, in die sich derselbe zerlegen läfst, imaginär sind. In seine Factoren zerlegt, nimmt aber dieser Ausdruck folgende Form an:

$$(x+\alpha-\sqrt{\alpha^2-\beta})(x+\alpha+\sqrt{\alpha^2-\beta}),$$

und die Imaginarität der Factoren wird durch die Bedingung:

$$\alpha^2-\beta < 0$$

angezeigt. In diesem Falle entscheidet also blofs das Zeichen des Zählers über die Realität von x. Ist ϵ' positiv, also:

$$(\delta-\alpha\gamma)^2+(\alpha^2-\beta)(\epsilon-\gamma^2) < 0,$$

so begegnet keine einzige gerade Linie, die durch den neuen Anfangs-Punct der Coordinaten geht, der Curve; diese Curve ist also imaginär. Ist ϵ' negativ, also

$$(\delta-\alpha\gamma)^2+(\alpha^2-\beta)(\epsilon-\gamma^2) > 0,$$

so begegnet jeder Durchmesser der Curve, welche Richtung er auch haben mag, und zwar immer, da der Nenner des Werthes von x nicht Null werden kann, in einer endlichen Entfernung. Die auf diesen Fall sich beziehende Curve ist also eine nach allen Seiten hin begränzte, in einem endlichen Raume enthaltene, und heifst Ellipse.

233. Dem andern Falle, dafs die Factoren des quadratischen Ausdrucks:

$$x^2+2\alpha x+\beta$$

reell sind, entspricht die Bedingung:

$$\alpha^2-\beta > 0.$$

Bei dieser Voraussetzung gibt es für x zwei Werthe, nemlich

$$-\alpha+\sqrt{\alpha^2-\beta}, \qquad -\alpha-\sqrt{\alpha^2-\beta},$$

von welchen jeder jenen Ausdruck auf Null reducirt, so dafs also die Abscissen und Ordinaten der bezüglichen Durchschnitte unendlich werden. Nimmt man den Werth von x so an, dafs er zwischen jene beiden eben bezeichneten Werthe fällt, so wird der Nenner im Ausdrucke für x negativ; nimmt man hingegen x entweder kleiner als jene beiden Werthe, oder gröfser als beide, so wird derselbe positiv. Bei der ersten Annahme gibt es reelle Durchschnitte, wenn ϵ' positiv, bei der zweiten Annahme, wenn ϵ' negativ ist.

Digitized by Google

Wir sehen hieraus dafs es zwei gerade Linien gibt, deren Gleichungen, auf den neuen Anfangs-Punct bezogen, in folgender enthalten sind:

$$y+(\alpha\pm\sqrt{\alpha^2-\beta})\,x=0,$$

welche den Uebergang von denjenigen Durchmessern, die der Curve begegnen, zu denjenigen, die ihr nicht begegnen, anzeigen. Dieser Uebergang geschieht, indem die Abstände der Durchschnitte durchs Unendliche gehen. Die so bestimmten beiden geraden Linien heifsen Asymptoten. Aus dem eben Bemerkten ist ferner ersichtlich, dafs für den in Rede stehenden Fall, dafs nemlich:

$$\alpha^2-\beta>0$$

die Curve immer möglich ist, dafs sie ganz in ein und dasselbe Paar der am Durchschnitte der Asymptoten gebildeten Scheitel-Winkel fällt, und zwei ganz von einander abgesonderte, sich ins Unendliche erstreckende, Zweige bildet. Diese Curve heifst Hyperbel. Das Zeichen von ϵ' entscheidet darüber, in welchem jener beiden Paare Scheitel-Winkel die Hyperbel liegt.

234. Wir haben in den beiden letzten Nummern auf den Fall nicht Rücksicht genommen, dafs ϵ' verschwindet, oder, was hiermit gleich viel sagen will, dafs die beiden Gleichungen:

$$y'+\alpha x'+\gamma=0,$$
$$\alpha y'+\beta x'+\delta=0,$$

folgende dritte bedingen:

$$y'^2+2\alpha x'y'+\beta x'^2+2\gamma y'+2\delta x'+\epsilon=0.$$

Die beiden ersten Gleichungen drücken, indem wir y' und x' als veränderliche Gröfsen ansehen, zwei Durchmesser der Curve aus; denn wir haben ja den Mittelpunct derselben eben durch den Durchschnitt dieser beiden Linien analytisch construirt. Wenn wir die letzte Gleichung allein für sich nehmen, und auch hier y' und x' als veränderlich betrachten, so geht dieselbe in die Gleichung der gegebenen Curve selbst über, was leicht *a priori* ersichtlich ist; weil, wenn wir den Anfangs-Punct der Coordinaten auf der Curve selbst nehmen, y und x zu gleicher Zeit verschwinden, und also das von y und x unabhängige Glied in der umgeformten Gleichung fehlen mufs. Aus der Gleichung jeder reellen Curve können wir das constante Glied fortschaffen und, umgekehrt, wenn das constante Glied fehlt oder durch Coordinaten-Verwandlung sich wegbringen läfst, so ist die Curve reell. Dieis findet jedesmal Statt, wenn obige drei Gleichungen zugleich Statt finden sollen, oder wenn mit andern Worten der Mittelpunct der Curve auf der Curve selbst liegt; denn vermittelst der beiden ersten Gleichungen reducirt sich die dritte auf folgende lineare Gleichung:

$$\gamma y'+\delta x'+\epsilon=0,$$

die in Verbindung mit jenen beiden ersten Gleichungen die Bedingungs-Gleichung:

$$(\delta-\alpha\gamma)^2+(\alpha^2-\beta)(\epsilon-\gamma^2)=0,$$

gibt, welche auf die Fälle, die wir eben betrachten wollen, sich bezieht. In diesen Fällen verschwinden also aus der gegebenen Gleichung durch Verlegung des Anfangs-Punctes der Coordinaten in den Punct (y', x') die drei letzten Glieder und es bleibt blofs:

$$y^2+2\alpha xy+\beta x^2=0. \qquad (1)$$

Diese Gleichung läfst sich folgender Gestalt in ihre beiden Factoren vom ersten Grade zerlegen:

$$(y+(\alpha-\sqrt{\alpha^2-\beta})x)(y+(\alpha+\sqrt{\alpha^2-\beta})x)=0, \qquad (2)$$

und drückt also ein System zweier, im neuen Anfangs-Puncte der Coordinaten, d. h.

im Mittelpuncte, sich schneidender, gerader Linien aus. Diese beiden Linien sind nur dann reell und von einander verschieden, wenn:

$$\alpha^2-\beta > 0.$$

Ihre Gleichungen erscheinen hingegen unter imaginärer Form, wenn

$$\alpha^2-\beta < 0,$$

geben alsdann aber, ganz den Bemerkungen im Anfange dieser Nummer gemäfs, einen reellen Punct, denn, wenn wir in der Gleichung (2) x gleich Null setzen, so wird y ebenfalls gleich Null, und wir erhalten also den neuen Anfangs-Punct. (Dieser Punct spielt die Rolle des Mittelpunctes, der immer als reell zu betrachten ist, auch dann, wenn die Curve selbst imaginär wird.) Dafs im zuletzt betrachteten Falle die Gleichung (1) einen Punct darstellt, erhellet sogleich, wenn wir ihr folgende Form geben:

$$(y-\alpha x)^2+(\beta-\alpha^2)x^2 = 0,$$

welche Gleichung nur dann befriedigt wird, wenn

$$x^2 = 0 \quad \text{und} \quad (y-\alpha x)^2 = 0,$$

mithin nur wenn x, und demnach auch y, Null sind.

Für den Fall, auf den wir noch zurückkommen werden, dafs

$$\alpha^2-\beta = 0,$$

fallen die beiden geraden Linien in eine einzige zusammen.

235. Es bleiben uns jetzt nur noch diejenigen Fälle zu betrachten übrig, in welchen

$$\alpha^2-\beta = 0,$$

wohin zunächst derjenige gehört, wo der Mittelpunct unendlich weit liegt, d. h. wo die beiden geraden Linien, durch deren Durchschnitt wir denselben construiren, nemlich die Durchmesser:

$$y+\alpha x+\gamma = 0,$$
$$\alpha y+\beta x+\delta = 0,$$

parallel sind. In diesem Falle können aus der allgemeinen Gleichung die mit y und x behafteten Glieder, beide zugleich nicht mehr verschwinden, wir können aber ein beliebiges derselben, zugleich mit dem constanten Gliede, fortschaffen.

Um überhaupt aus der allgemeinen Gleichung des zweiten Grades das constante Glied zugleich mit demjenigen, in welchem die erste Potenz einer der Veränderlichen, für welche wir hier y nehmen wollen, fortzuschaffen, müssen wir y' und x' vermittelst der beiden Gleichungen:

$$y'^2+2\alpha x'y'+\beta x'^2+2\gamma y'+2\delta x'+\epsilon = 0, \qquad (1)$$
$$y'+\alpha x'+\gamma = 0, \qquad (2)$$

bestimmen. Betrachten wir diese Gleichungen als geometrische Oerter, so mufs, damit die Elimination wirklich Statt finden können, da der zweite derselben, der Durchmesser, immer reell ist, auch der erste, nemlich die gegebene Curve, immer seyn, und überdiefs mufs jener Durchmesser der Curve wirklich begegnen. Die Bedingungen, dafs beides Statt finde, ergehen sich aus der Verbindung jener beiden Gleichungen. Multipliciren wir zu diesem Ende die Gleichung (2) mit 2y' und ziehen alsdann dieselbe von (1) ab, so kommt:

$$-y'^2+\beta x'^2+2\delta x'+\epsilon = 0,$$

und wenn wir in diese Gleichung den aus (2) gezogenen Werth für y' substituiren und ordnen, so kommt:

$$(\beta-\alpha^2)x'^2+2(\delta-\alpha\gamma)x'+(\epsilon-\gamma^2) = 0. \qquad (3)$$

Aus dieser Gleichung ergibt sich sogleich die Bedingung für die Möglichkeit der Umformung der allgemeinen Gleichung des zweiten Grades in eine Gleichung von folgender Form:

$$y^2+2\alpha xy+\beta x^2+2\delta' x = 0, \qquad (4)$$

Digitized by Google

wenn wir, der Kürze wegen:

$$\alpha y'+\beta x'+\delta = \delta' \qquad (5)$$

setzen. Wir erhalten im Allgemeinen aus der Gleichung (3) zwei verschiedene Werthe für x', denen eine zwiefache Weise jener Umformung entspricht. Diese ist immer, aber nur auf eine einzige Weise möglich, wenn die Gleichung (3) sich auf den ersten Grad reducirt, wenn nemlich:

$$\alpha^2-\beta = 0.$$

In diesem Falle können wir der umgeformten Gleichung (4) auch noch folgende Form geben:

$$(y+\alpha x)^2+2\delta' x = 0, \qquad (6)$$

und der Ausdruck, den wir nach allen Reductionen für δ' erhalten, ist:

$$\delta' = \delta-\alpha\gamma.$$

Wenn wir in der Gleichung (6) x gleich Null setzen, d. h. die beiden Durchschnitte der Curve mit der zweiten Axe suchen, so kommt auch y^2 gleich Null, es fallen also jene Durchschnitte im Anfangs-Puncte der Coordinaten zusammen: die Curve wird in diesem Puncte von der zweiten Axe berührt. Weil das erste Glied der besagten Gleichung ein vollständiges Quadrat, mithin nothwendig positiv ist, so mufs, um fernere reelle Werthe für y zu erhalten, das Zeichen von x in Beziehung auf das Zeichen von δ' entgegengesetzt genommen werden. Es gibt also Puncte der Curve immer nur nach einer Seite der x hin, nach der positiven oder negativen, je nachdem δ', umgekehrt, negativ oder positiv ist, d. h. je nachdem:

$$\delta-\alpha\gamma < 0, \quad \text{oder} \quad \delta-\alpha\gamma > 0.$$

Bei dieser Beschränkung kann der Werth von x jeder beliebige seyn: die Curve erstreckt sich nach der einen Seite hin ins Unendliche. Diese Curve heifst Parabel.

Den Fall, dafs

$$\delta-\alpha\gamma = 0,$$

umfafst die folgende Nummer.

236. Es können zuletzt noch die beiden Gleichungen:

$$\begin{aligned} y'+\alpha x'+\gamma &= 0, \\ \alpha y'+\beta x'+\delta &= 0, \end{aligned} \qquad (1)$$

identisch seyn, und also die Durchmesser, welche sie bedeuten, indem wir y' und x' als veränderlich betrachten, in eine einzige gerade Linie zusammenfallen. Alsdann lassen sich aus der allgemeinen Gleichung des zweiten Grades auf unendlich viele Weisen, die mit den ersten Potenzen von y und x behafteten Glieder fortschaffen: die Curve hat unendlich viele Mittelpuncte, deren geometrischer Ort jene beiden zusammenfallenden Durchmesser sind. Für die, diesem Falle entsprechenden, Bedingungs-Gleichungen erhalten wir sogleich aus obigen Gleichungen (1):

$$\alpha^2-\beta = 0, \quad \alpha\gamma-\delta = 0.$$

Der Gleichung, die sich bei der angezeigten Umformung ergibt, können wir, mit Berücksichtigung der ersten dieser Bedingungs-Gleichungen, folgende Form geben:

$$(y-\alpha x)^2+\varepsilon' = 0,$$

woraus wir denn sogleich ersehen, dafs die bezügliche Linie zweiter Ordnung ein System zweier Parallelen ist. Für ε' erhalten wir, wie in der 230. Nummer folgenden Ausdruck:

$$\varepsilon' = \gamma y'+\delta x'+\varepsilon;$$

substituiren wir in denselben den Werth für y', den wir aus einer der beiden Gleichungen

(1) ziehen, so fällt nach der zweiten Bedingungs-Gleichung x' von selbst aus, und es bleibt blofs:

$$\epsilon' = \epsilon - \gamma^2.$$

Je nachdem also dieser Ausdruck negativ, Null oder positiv ist, sind jene beiden Parallelen reell und verschieden, fallen zusammen oder werden imaginär.

§. 2.

Veränderung der Richtung der Coordinaten-Axen. Beziehung der constanten Gröfsen ein und derselben Curve zu einander für verschiedene Systeme.

237. Sey wiederum:

$$y^2+2\alpha xy+\beta x^2+2\gamma y+2\delta x+\epsilon = 0 \qquad (1)$$

die allgemeine Gleichung der Linien zweiter Ordnung, bezogen auf irgend ein beliebiges Axen-System. Wir wollen den Coordinaten Winkel ϑ nennen. Um dieselbe Curve auf ein anderes, ebenfalls beliebiges, Coordinaten-System, dessen Anfangs-Punct derselbe ist, zu beziehen, brauchen wir nur, nach der 90. Nummer:

$$\frac{y\sin\varphi'+x\sin\varphi}{\sin\vartheta} \text{ und } -\frac{y\sin\psi'+x\sin\psi}{\sin\vartheta},$$

an die Stelle von y und x in obige Gleichung zu setzen; wobei wir durch φ und φ' diejenigen Winkel bezeichnen, welche die erste und zweite der neuen Axen mit der ersten ursprünglichen, und durch ψ und ψ' diejenigen Winkel, welche dieselben erstgenannten Axen mit der zweiten ursprünglichen bilden. Durch diese Substitutionen erhalten wir, wenn wir ordnen:

$$\frac{\sin^2\varphi'-2\alpha\sin\varphi'\sin\psi'+\beta\sin^2\psi'}{\sin^2\vartheta}\cdot y^2$$
$$+2\,\frac{\sin\varphi'\sin\varphi-\alpha(\sin\varphi'\sin\psi+\sin\varphi\sin\psi')+\beta\sin\psi\sin\psi'}{\sin^2\vartheta}\cdot xy$$
$$+2\,\frac{\sin^2\varphi-2\alpha\sin\varphi\sin\psi+\beta\sin^2\psi}{\sin^2\vartheta}\cdot x^2$$
$$+2\,\frac{\gamma\sin\varphi'-\delta\sin\psi'}{\sin\vartheta}\,y+2\,\frac{\gamma\sin\varphi-\delta\sin\psi}{\sin\vartheta}\cdot x+\epsilon=0. \qquad (2)$$

Wir wollen die verschiedenen Formen, welche die auf diese Weise umgeformte Gleichung, bei einer schicklichen Bestimmung der Richtung der beiden neuen Axen, annehmen kann, umständlicher erörtern. Diese Discussion scheint auf den ersten Blick nicht ganz einfach zu seyn; sie wird es aber, indem wir auf folgende Art dieselbe angreifen.

Seyen

$$y = ax, \qquad y = a'x \qquad (3)$$

die Gleichungen der ersten und zweiten neuen Coordinaten-Axe, bezogen auf das ursprüngliche System, alsdann ist, nach obiger Bezeichnung:

$$a = \frac{\sin\varphi}{\sin(\vartheta-\varphi)}, \qquad a' = \frac{\sin\varphi'}{\sin(\vartheta-\varphi')},$$

welche Ausdrücke, vermittelst der Gleichung:

$$\vartheta = \varphi-\psi = \varphi'-\psi',$$

in folgende übergehen:

$$a = -\frac{\sin\varphi}{\sin\psi}, \qquad a' = -\frac{\sin\varphi'}{\sin\psi'}.$$

Hiernach können wir nun die Gleichung (2) folgender Gestalt schreiben:

$$\begin{aligned} &\frac{\sin^2\psi'}{\sin^2\vartheta}\,(a'^2+2\alpha a'+\beta).\ y^2 \\ +\ 2\ &\frac{\sin\psi\sin\psi'}{\sin^2\vartheta}\,(aa'+\alpha(a+a')+\beta).\ xy \\ +\ &\frac{\sin^2\psi}{\sin^2\vartheta}\,(a^2+2\alpha a+\beta).\ x^2 \\ -\ 2\ &\frac{\sin\psi'}{\sin\vartheta}\,(a'\gamma+\delta)y - 2\frac{\sin\psi}{\sin\vartheta}\,(a\gamma+\delta).\ x+\varepsilon = 0. \qquad (4) \end{aligned}$$

238. Betrachten wir zuerst den Coefficienten von y^2 und x^2, nemlich:

$$\frac{\sin^2\psi'}{\sin^2\vartheta}\,(a'^2+2\alpha a'+\beta),$$

$$\frac{\sin^2\psi}{\sin^2\vartheta}\,(a^2+2\alpha a+\beta),$$

so hat offenbar eine einzige Gleichung vom zweiten Grade, deren Form folgende ist:

$$z^2+2\alpha z+\beta = 0, \qquad (5)$$

diejenigen Werthe von a und a' zu Wurzeln, für welche jene beiden Coefficienten verschwinden. Nur in dem Falle, dafs die Wurzeln dieser Gleichung reell und verschieden sind, das heifst, wenn:

$$\alpha^2-\beta > 0,$$

lassen sich aus der gegebenen Gleichung (1) die mit y^2 und x^2 behafteten Glieder durch Coordinaten-Verwandlung fortschaffen, so dafs dieselbe folgende Form annimmt:

$$xy+2\gamma'y+2\delta'x+\varepsilon' = 0. \qquad (6)$$

Eine solche Umformung kann, im Falle **imaginärer Wurzeln**, gar nicht Statt finden, und auch im Falle **gleicher** Wurzeln, wird die umgeformte Gleichung illusorisch, denn, dafs a gleich a' wird, heifst, dafs die neuen Coordinaten-Axen in eine einzige zusammenfallen.

Da die Werthe von a und a' Wurzeln ein und derselben quadratischen Gleichung sind, so ist, wenn eines der beiden mit y^2 und x^2 behafteten Glieder verschwinden kann, dadurch zugleich auch die Möglichkeit für das Verschwinden des andern gegeben. Dieſs ist auch *a priori* daraus ersichtlich, dafs wir beliebig die beiden Axen mit einander vertauschen können; und eben hierin finden wir den Grund, warum die beiden Werthe von a und a' Wurzeln ein und derselben Gleichung seyn müssen.

239. Durch Verlegung des Anfangs-Punctes der Coordinaten in den Mittelpunct der Curve, die, weil der Ausdruck $(\alpha^2-\beta)$ einen positiven Werth hat, für unsern Fall eine Hyperbel ist, nimmt die Gleichung (6) folgende Form an:

$$xy+\varepsilon'' = 0, \qquad (7)$$

wo wir durch ε'' eine neue Constante bezeichnen. Aus dieser Gleichung springt der asymptotische Character der Hyperbel sogleich in die Augen; denn, je gröfser wir y nehmen, desto kleiner wird x, und desto mehr nähert sich die Curve der zweiten Axe; je gröfser wir x nehmen, desto mehr nähert sie sich der ersten Axe. Die Gleichung (9) ist die **Gleichung einer, auf ihre Asymptoten bezogenen, Hyperbel.** Je nachdem ε''

negativ oder positiv wird, liegen die beiden Hyperbel-Zweige in dem ersten und dritten, oder in dem zweiten und vierten Coordinaten-Winkel. Die Gleichung (6) ist die Gleichung einer Hyperbel, deren Asymtoten den Coordinaten-Axen parallel sind.

Wenn wir nur für einen der beiden Ausdrücke a und a' eine Wurzel der Gleichung (5) nehmen, während wir den andern beliebig bestimmen, so verschwindet nur x^2 oder y^2 aus der umgeformten Gleichung (4): nur eine der neuen Coordinaten-Axen ist einer der Asymptoten parallel. Wenn schon in der ursprünglichen Gleichung β Null ist, so reducirt sich die Gleichung (5) auf den ersten Grad, oder mit andern Worten, eine ihrer Wurzeln ist gleich Null, d. h. eine der neuen Axen, und mithin eine der beiden Asymptoten, mufs der ersten der ursprünglichen Axen parallel seyn. Nehmen wir in der so bezeichneten Gleichung:

$$y^2+2\alpha xy+2\gamma y+2\delta x+\varepsilon = 0,$$

für y irgend einen constanten Werth, so erhalten wir nur einen einzigen entsprechenden Werth für x, d. h. jede der ersten Axe, oder einer der beiden Asymptoten, parallel gezogene gerade Linie schneidet die Curve nur in einem einzigen Punete. Für den in Rede stehenden Fall sind die Gleichungen (3) der neuen, den Asymptoten parallelen, Axen folgende:

$$y = 0, \quad y = a'x.$$

240. Der Winkel, welchen die beiden Asymptoten einschliefsen, der Asymptoten-Winkel, ist demjenigen Winkel, welchen die neuen Axen, deren Gleichungen im Allgemeinen folgende sind:

$$y = ax, \quad y = a'x,$$

mit einander bilden, gleich. Bezeichnen wir daher diesen Winkel durch η, so gibt die 17. Nummer:

$$tang\ \eta = \frac{(a'-a)\sin\vartheta}{1+(a+a')\cos\vartheta+aa'}.$$

Wir erhalten aber, nach der Gleichung (5), deren Wurzeln a und a' sind folgende Ausdrücke:

$$a+a' = -2\alpha, \quad aa' = \beta,$$

und hiernach:

$$a'-a = \pm 2\sqrt{\alpha^2-\beta},$$

$$tang\ \eta = \frac{\pm 2\sqrt{\alpha^2-\beta}.\ \sin\vartheta}{1-2\alpha\cos\vartheta+\beta}. \qquad (8)$$

Wenn das ursprüngliche Coordinaten-System ein rechtwinkliges, also $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ ist, so erhalten wir:

$$tang\ \eta = \frac{\pm 2\sqrt{\alpha^2-\beta}}{1\pm\beta}. \qquad (9)$$

241. Wenn der Asymptoten-Winkel ein rechter ist, so heifst die Hyperbel eine gleichseitige. Alsdann ist, für beliebige Coordinaten:

$$1-2\alpha\cos\vartheta+\beta = 0,$$

und für den besondern Fall eines rechtwinkligen Systems:

$$\beta = -1.$$

Hiernach erkennen wir also in der allgemeinen Gleichung des zweiten Grades sogleich den Fall wieder, wo dieselbe eine gleichseitige Hyperbel darstellt. Bei der Annahme rechtwinkliger Coordinaten müssen die Coefficienten von y^2 und x^2 gleich seyn, aber mit entgegengesetztem Zeichen vorkommen.

Digitized by Google

Die Gleichung:

$$xy+2\gamma'y+2\delta'x+\epsilon' = 0$$

ist nach der 239. Nummer die Gleichung einer Hyperbel, bezogen auf Coordinaten-Axen, die den Asymptoten derselben parallel sind. Hätten wir statt der allgemeinen Gleichung des zweiten Grades (t) diejenige Gleichung betrachtet, die wir erhalten, indem wir blofs die drei ersten Glieder derselben nehmen, und gleich Null setzen, mithin folgende Gleichung:

$$y^2+2\alpha xy+\beta x^2 = 0, \qquad (11)$$

so hätte diese bei derselben Coordinaten-Umformung folgende Form:

$$xy = 0,$$

angenommen, und bedeutet also das System der neuen Axen, die den Asymptoten parallel sind. Jene Gleichung (11) stellt also, auf die ursprünglichen Axen bezogen, ein System zweier geraden Linien dar, die den Asymptoten der Curve parallel sind und durch den Anfangs-Punct der Coordinaten gehen. Dieſs ist in Uebereinstimmung mit den Entwicklungen der 233. Nummer.

Wir erhalten hiernach für das Asymptoten-System selbst folgende Gleichung:

$$(y-y')^2+2\alpha(y-y')(x-x')+\beta(x-x')^2 = 0, \qquad (12)$$

wenn wir, wie in dem Frühern, den Mittelpunct der Curve durch (y', x') bezeichnen. Setzen wir an die Stelle von y' und x' die in der 229. Nummer entwickelten Werthe:

$$y' = \frac{\beta\gamma-\alpha\delta}{\alpha^2-\beta}, \qquad x' = \frac{\delta-\alpha\gamma}{\alpha^2-\beta},$$

so kommt nach allen Reductionen:

$$y^2+2\alpha xy+\beta x^2+2\gamma y+2\delta x+\lambda = 0, \qquad (13)$$

wenn wir, der Kürze halber:

$$-\frac{\delta^2-2\alpha\delta\gamma+\beta\gamma^2}{\alpha^2-\beta} = \lambda \qquad (14)$$

schreiben. Die so erhaltene Gleichung (13), die das System der beiden Asymptoten ausdrückt, ist durchaus unabhängig von ϵ, dem constanten Gliede in der allgemeinen Gleichung des zweiten Grades. Alle verschiedenen Curven also, welche diese Gleichung:

$$y^2+2\alpha xy+\beta x^2+2\gamma y+2\delta x+\epsilon = 0,$$

darstellt, indem wir ϵ nach einander alle möglichen Werthe geben; α, β, γ und δ aber als ein für alle Mal bestimmt ansehen, haben dieselben Asymptoten. Nehmen wir ϵ gleich λ, so erhalten wir die Asymptoten selbst, und durch diese Bestimmung von ϵ ist der Uebergang von denjenigen Hyperbeln, welche in einem Paare der von den Asymptoten gebildeten Scheitel-Winkel liegen zu denjenigen, welche von dem andern Paare dieser Scheitel-Winkel eingeschlossen werden, bezeichnet. Stimmen die Gleichungen mehrerer Hyperbeln nur in den drei ersten Gliedern überein, so sind ihre Asymptoten blofs parallel.

Für den Fall der Ellipse reduciren sich die Asymptoten auf einen Punct, den Mittelpunct der Curve, für den Fall der Parabel sind die beiden Asymptoten parallel, liegen aber unendlich weit entfernt. Die Richtung derselben ist zugleich die Richtung der beiden, leicht aus der allgemeinen Gleichung zu bestimmenden, Durchmesser:

$$y+\alpha x+\gamma = 0 \qquad y+\frac{\beta}{\alpha}x+\frac{\delta}{\alpha} = 0$$

und demnach aller andern, da, wie wir sogleich noch bestimmter zeigen werden, alle Durchmesser der Parabel unter einander parallel sind. Diese Folgerungen, die unmittelbar aus der Gleichung (12) sich ergeben, und überhaupt alle ähnlichen Betrachtungen sind nur in sofern von Bedeutung, als sie Eigenschaften der verschiedenen einzelnen Li-

nien zweiter Ordnung in Verbindung bringen. So ergibt sich zum Beispiel aus der zweiten der eben gemachten Bemerkungen folgende Analogie zwischen Hyperbel und Parabel. Alle Eigenschaften der erstern Curve, welche sich auf Linien, die einer der Asymptoten parallel sind, beziehen und welche eine Folge von eben diesem Parallelismus sind, lassen sich auch unmittelbar auf die Parabel übertragen, indem wir einen Durchmesser derselben, an die Stelle jener Linie setzen, die, für den Fall der Hyperbel, einer der beiden Asymptoten parallel ist. *)

242. Wir gehen weiter. Wenn aus der umgeformten allgemeinen Gleichung des zweiten Grades das mit xy behaftete Glied verschwinden soll, so müssen wir, was aus der 4. Gleichung der 237. Nummer erhellet, die Richtung der beiden neuen Axen vermittelst folgender Gleichung:

$$aa' + \alpha(a+a') + \beta = 0, \qquad (15)$$

bestimmen. Was für Constante in der allgemeinen, ursprünglich gegebenen, Gleichung des zweiten Grades auch vorkommen mögen, diese Gleichung kann immer auf unendlichmalig verschiedene Weise befriedigt werden, und zwar so, dafs wir die Richtung einer der beiden neuen Axen beliebig annehmen, und alsdann die Richtung der andern vermittelst der letzten Gleichung bestimmen können. Betrachten wir nun die zweite der neuen Axen, mithin a', als gegeben, so erhalten wir, nach der letzten Gleichung für a folgenden Ausdruck:

$$a = -\frac{\beta+\alpha a'}{\alpha+a'}, \qquad (16)$$

und indem wir demgemäfs die Richtung der ersten Axe nehmen, nimmt die umgeformte allgemeine Gleichung folgende Form an:

$$y^2+\beta' x^2+2\gamma' y+2\delta' x+\varepsilon' = 0. \qquad (17)$$

Für den Coefficienten von x^2 haben wir, nach (4), allgemein folgenden Ausdruck:

$$\beta' = \frac{\sin^2\psi}{\sin^2\psi'}\cdot\frac{a^2+2\alpha a+\beta}{a'^2+2\alpha a'+\beta},$$

und wenn wir für a seinen Werth in a' substituiren, so kommt nach einer leichten Reduction:

$$\beta' = -\frac{\sin^2\psi}{\sin^2\psi'}\cdot\frac{\alpha^2+\beta}{(\alpha+a')^2}. \qquad (18)$$

Diese Gleichung zeigt, wie das Zeichen von β' einzig vom Zeichen des Ausdruckes $(\alpha^2-\beta)$ abhängt, und dafs, wenn dieser Ausdruck Null ist, auch β' verschwindet. In diesem Falle fällt also, durch die Fortschaffung des zweiten Gliedes aus der allgemeinen Gleichung des zweiten Grades, das mit dem Quadrate von x behaftete Glied von selbst aus, so dafs diese Gleichung folgende Form annimmt:

$$y^2+2\gamma' y+2\delta' x+\varepsilon' = 0. \qquad (19)$$

*) Dieselbe Analogie zwischen Hyperbel und Parabel stellt sich auch dar, indem wir in dem Sinne der alten Geometer verfahren und wie Hamilton (Lehre von den Kegel-Schnitten, übersetzt von J. G. Feldhoff, mit einer Vorrede von C. D. von Münchow. Coblenz, 1825.) von der Kegel-Fläche ausgehen. Die Asymptoten der Hyperbel sind nemlich, so wie die Durchmesser der Parabel, Seiten des Kegels, aus dem diese Curven geschnitten werden können, parallel. Ein Beleg für das im Texte Ausgesprochene ist zum Beispiel der 55. Satz des 1. Buches der eben angezogenen Schrift.

Digitized by Google

Durch Verlegung des Anfangs-Punctes der Coordinaten können wir endlich noch der Gleichung (17) folgende:

$$y^2+\beta''x^2+\epsilon'' = 0, \qquad (20)$$

und der Gleichung (19) folgende Gestalt geben:

$$y^2+2\delta''x = 0. \qquad (21)$$

243. Da in der Gleichung (20) nur die Quadrate der veränderlichen Gröfsen vorkommen, so entsprechen einem beliebigen Werthe jeder derselben zwei gleiche und entgegengesetzte Werthe der andern; d. h. geometrisch gedeutet, jede von der Curve begränzte gerade Linie, die einer der Coordinaten-Axen parallel ist, wird von der andern halbirt Man sagt in diesem Falle, die Gleichung der Curve sey auf conjugirte oder zugeordnete Durchmesser bezogen. Ueberhaupt sind, wenn das mit xy behaftete Glied in der allgemeinen Gleichung des zweiten Grades fehlt, die Coordinaten-Axen irgend zweien zugeordneten Durchmessern parallel. Es giht unendlich viele Systeme zugeordneter Durchmesser; jedem beliebigen Durchmesser entspricht ein conjugirter. Legen wir in den Puncten, in welchen irgend ein Durchmesser die Curve schneidet, zwei gerade Linien dem conjugirten desselben parallel, so berühren diese geraden Linien die Curve: die beiden Durchschnitte fallen, bevor sie imaginär werden, in einen einzigen Punct zusammen. Setzen wir nach einander y und x in (20) gleich Null, so erhalten wir die halben zugeordneten Durchmesser, die wir uns immer, wenn von ihrer Gröfse die Rede ist, von der Curve begränzt denken. Bezeichnen wir diese halben Durchmesser durch A und B, so ist:

$$B^2 = -\epsilon'', \qquad \beta''A^2 = -\epsilon''$$

mithin:

$$\beta'' = \frac{B^2}{A^2},$$

und hiernach geht die Gleichung (20) in folgende über:

$$A^2y^2+B^2x^2 = A^2B^2.$$

Für den Fall der Hyperbel, wo β'' negativ ist, wird immer, entweder der Werth für A, oder der Werth für B, imaginär, d. h. von zweien zugeordneten Durchmessern begegnet immer nur einer der Curve. Vertauschen wir in diesem Falle A mit $A\sqrt{-1}$ oder B mit $\sqrt{-1}$, je nachdem der eine oder der andere dieser Ausdrücke imaginär wird, so geht die letzte Gleichung in folgende über:

$$A^2y^2-B^2x^2 = \pm A^2B^2.$$

Das positive und négative Zeichen des zweiten Theiles dieser Gleichung bezieht sich darauf, ob der zweite oder erste Durchmesser d. h. derjenige, der in die zweite oder erste Axe fällt, der Curve wirklich begegnet. Für die Gröfse des, die Curve nicht schneidenden, Durchmessers, nehmen wir, wie's der Gebrauch ist, stets den reellen Werth, so dafs, wenn wir uns auf die letzte Gleichung beziehen, durch A und B die beiden halben zugeordneten Durchmesser der Hyperbel gegeben sind.

Den eben hergeleiteten Gleichungen für Ellipse und Hyperbel können wir auch folgende, für manche Entwicklungen bequemere, Form geben:

$$\frac{y^2}{B^2}+\frac{x^2}{A^2} = 1, \qquad \frac{y^2}{B^2}-\frac{x^2}{A^2} = \pm 1.$$

Indem wir endlich noch x mit $(x\pm A)$ in diesen Gleichungen vertauschen, verlegen wir wir den Anfangs-Punct der Coordinaten aus dem Mittelpuncte in einen der beiden Schei-

tel des ersten Durchmessers, d. h. in einen derjenigen beiden Puncte, in welchen derselbe der Curve begegnet. Auf diese Weise kommt:

$$\frac{y^2}{B^2} + \frac{x^2+2Ax}{A^2} = 0, \qquad \frac{y^2}{B^2} - \frac{x^2+2Ax}{A^2} = 0.$$

Für den Fall der Hyperbel setzen wir hier voraus, dafs der erste Durchmesser derselben begegnet. Dem positiven und negativen Zeichen in jeder Gleichung entspricht, dafs der erste Durchmesser einmal in die negative, das andere Mal in die positive Seite der Axe der x fällt. Die zweite Axe berührt die Curve.

Wenn wir in der Gleichung (21), die eine Parabel darstellt, $-p$ statt δ'' schreiben, so wird dieselbe folgende:

$$y^2 = 2px,$$

unter welcher Form wir uns derselben vorzugsweise bedienen werden. Jede gerade Linie, welche der Abscissen-Axe parallel gezogen wird, begegnet der Curve nur in einem einzigen Puncte; jede gerade Linie ferner, welche der Ordinaten-Axe parallel ist, und also die Curve in zwei Puncten schneidet, wird von der ersten Axe halbirt. Setzen wir $x = 0$, so kommt $y = \pm 0$, d. h. die Curve wird von der zweiten Axe in demjenigen Puncte berührt, in welchem sie von der ersten Axe, die ein Durchmesser derselben ist, geschnitten wird: die Gleichung der Parabel ist auf einen ihrer Durchmesser und die Tangente im Scheitel desselben bezogen. $2p$ heifst der Parameter des Durchmessers. Den zweiten, conjugirten, Durchmesser können wir uns als unendlich weit entfernt denken, jedoch so dafs die Richtung desselben durch obige Tangente bestimmt ist.

244. Wenn die Richtung irgend eines Durchmessers gegeben ist, so können wir den conjugirten Durchmesser leicht bestimmen. Nach der Gleichung (16) erhalten wir nemlich, wenn die Richtung des erstern durch die Gleichung:

$$y = a'x$$

gegeben ist, und wir zugleich den Mittelpunct der Curve durch (y', x') bezeichnen,

$$y - y' + \frac{\beta + \alpha a'}{\alpha + a'}(x - x') = 0:$$

für die Gleichung des gesuchten Durchmessers. Substituiren wir in diese Gleichung die bekannten Werthe für y' und x':

$$y' = \frac{\beta\gamma - \alpha\delta}{\alpha^2 - \beta}, \qquad x' = \frac{\delta - \alpha\gamma}{\alpha^2 - \beta},$$

so kommt, wenn wir reduciren:

$$(\alpha + a')y + (\beta + \alpha a')x + (\delta + \gamma a') = 0.^*) \qquad (1)$$

---

*) Zu einer entsprechenden Gleichung gelangt Herr Gergonne auf andere Art, indem er zwischen der allgemeinen Gleichung der Linie zweiter Ordnung und der linearen Gleichung:

$$y = mx + g, \qquad (a)$$

y eliminirt; in der resultirenden quadratischen Gleichung gibt der Coefficient der ersten Potenz von x sogleich die Abscisse für die Mitte der interceptirten Chorde, wonach denn durch die Gleichung (a) die Ordinate leicht bestimmt wird. In dem Ausdrucke für Abscisse und Ordinate kommt g vor, durch Elimination von g zwischen beiden Ausdrücken, erhalten wir eine lineare Beziehung zwischen den Coordinaten der Mitte jener Chorde, und indem wir dieselben als veränderliche Gröfsen betrachten, die Gleichung desjenigen Durchmessers der alle

Für den Fall der Parabel, wo $\alpha^2 = \beta$, haben wir:

$$a = -\frac{\beta+\alpha a'}{\alpha+a'} = -\alpha,$$

wie wir auch a' annehmen mögen: wir erhalten für a immer denselben Werth: alle Durchmesser der Parabel sind unter einander parallel.

Im Allgemeinen haben wir:

$$a = -\frac{\beta+\alpha a'}{\alpha+a'} = -\alpha + \frac{\alpha^2-\beta}{\alpha+a'},$$

mithin ergibt sich:

$$(a+\alpha)(a'+\alpha) = \alpha^2-\beta, \qquad (2)$$

wobei wir noch, zum Behuf der geometrischen Interpretation des ersten Theiles dieser Gleichung, bemerken können, dafs durch α die Richtung desjenigen Durchmessers gegeben ist, der alle der zweiten Axe parallele Chorden halbirt.

245. Zwei zugeordnete Durchmesser einer Linie zweiter Ordnung, die auf einander senkrecht stehen, heifsen die Axen derselben. Zur Bestimmung ihrer Richtung aus der allgemeinen Gleichung müssen wir die Gleichung:

$$aa'+\alpha(a+a')+\beta = 0, \qquad (3)$$

mit der Gleichung:

$$aa'+(a+a')\cos\vartheta+1 = 0, \qquad (4)$$

in der ϑ den Coordinaten-Winkel bezeichnet, verbinden. Da diese beiden Gleichungen in Beziehung auf a und a' symmetrisch sind, so mufs die quadratische Gleichung, zu welcher wir durch Elimination des einen Werthes gelangen, beide Werthe zugleich zu Wurzeln haben. Eliminiren wir a', so kommt:

$$a^2+\frac{\beta-1}{\alpha-\cos\vartheta}a-\frac{\alpha-\beta\cos\vartheta}{\alpha-\cos\vartheta} = 0, \qquad (5)$$

für die in Rede stehende quadratische Gleichung.

Wenn $\beta = 1$, so reducirt diese Gleichung sich auf

$$a^2-1 = 0,$$

mithin sind die Axen durch Gleichungen von folgenden Formen:

$$y = x+q, \quad y = -x+q',$$

gegeben, und jede derselben schneidet also die beiden Coordinaten-Axen unter gleichen Winkeln. Wenn daher in der allgemeinen, auf ein beliebiges System bezogene, Gleichung des zweiten Grades β gleich Eins ist, so bilden die Coordinaten-Axen mit jeder Axe der Curve gleiche Winkel und umgekehrt, wenn die Coordinaten-Axen so genommen werden, dafs sie mit einer der Axen der Curve gleiche Winkel bilden, so werden in der Gleichung der Curve die Coefficienten von y^2 und x^2 einander gleich.

Nach der 9t. Nummer ist:

$$(y-y')^2+2(y-y')(x-x')\cos\vartheta+(x-x')^2 = R^2,$$

die Gleichung eines Kreises, dessen Radius R und dessen Mittelpuncts-Coordinaten y' und x' sind. Soll daher die allgemeine Gleichung des zweiten Grades:

$$y^2+2\alpha xy+\beta x^2+2\gamma y+2\delta x+\varepsilon = 0,$$

---

der geraden Linie (2) parallele Chorden halbirt. An diese Entwicklung knüpft Herr Gergonne die Discussion der allgemeinen Gleichung des zweiten Grades.

Essai d'un nouveau mode de discusion de l'équation générale des lignes et celle des surfaces du second ordre. Par M. Gergonne. Ann. V. 81—87.

einen Kreis darstellen, so haben wir:

$$\beta = 1, \qquad \alpha = \cos\vartheta. \tag{6}$$

Substituiren wir diese Ausdrücke in (5), so verschwindet der Coefficient von a nicht mehr, sondern nimmt die unbestimmte, nicht reducirbare Form $\frac{0}{0}$ an, d. h. wir können jeden Durchmesser des Kreises zu einer der Axen nehmen. Die Gleichungen (3) und (4) sind, bei diesen Bestimmungen, identisch.

Die Gleichung (5) reducirt sich auf den ersten Grad, wenn

$$\cos\vartheta = \frac{\alpha}{\beta}; \tag{7}$$

in diesem Falle ist eine der Coordinaten-Axen einer der Axen der Linie zweiter Ordnung parallel.

Wenn wir die allgemeine Gleichung des zweiten Grades auf ein rechtwinkliches System beziehen, mithin $\cos\vartheta = 0$ setzen, so geht die Gleichung (5) in folgende über:

$$a^2 + \frac{\beta-1}{\alpha}\, a - 1 = 0, \tag{8}$$

deren Wurzeln die trigonometrischen Tangenten derjenigen beiden Winkel ω und ω' geben, welche die beiden Axen der Curve mit der Axe der x bilden. Wir kommen zu einfachen Ausdrücken, wenn wir statt dieser Winkel die doppelten Winkel 2ω und $2\omega'$ einführen, weil alsdann:

$$tang\, 2\omega' = tang\, 2\left(\omega + \frac{\pi}{2}\right) = tang\, 2\omega.$$

Nun ist aber:

$$tang\, 2\omega = \frac{2\, tang\,\omega}{1 - tang^2\omega} = \frac{2a}{1-a^2},$$

und indem wir in diesen Ausdruck für a^2 den aus (8) gezogenen Werth:

$$a^2 = 1 - \frac{\beta-1}{\alpha}\, a,$$

substituiren, fällt die erste Potenz von a ebenfalls aus, und wir erhalten:

$$tang\, 2\omega = \frac{2\alpha}{\beta-1} = tang\, 2\omega'. \tag{9}$$

246. Der Winkel, welchen zwei conjugirte Durchmesser mit einander bilden sollen, sey irgend ein gegebener, den wir durch ξ bezeichnen, so dafs, wenn wir, wie vorhin, die Winkel, welche die beiden Durchmesser mit der ersten Coordinaten-Axe bilden, ω und ω' nennen, wir $\xi = (\omega' - \omega)$ erhalten. Hiernach ergibt sich:

$$tang\,\omega' = \frac{tang\,\omega + tang\,\xi}{1 - tang\,\omega\, tang\,\xi}. \tag{10}$$

Wir wollen ferner, der gröfsern Einfachheit wegen, wiederum die Voraussetzung rechtwinkliger Coordinaten machen: alsdann reducirt sich die Bedingungs-Gleichung (15) der 242. Nummer auf:

$$tang\,\omega\, tang\,\omega' + \alpha(tang\,\omega + tang\,\omega') + \beta = 0. \tag{11}$$

Eliminiren wir aus dieser Gleichung vermittelst der vorigen $tang\,\omega'$, so kommt folgende quadratische Gleichung zur Bestimmung der Werthe von ω:

$$tang^2\omega + \frac{2\alpha + (1-\beta)\, tang\,\xi}{1 - \alpha\, tang\,\xi}\, tang\,\omega + \frac{\beta + \alpha\, tang\,\xi}{1 - \alpha\, tang\,\xi} = 0. \tag{12}$$

Die beiden Wurzeln dieser Gleichung sind in folgendem Ausdrucke enthalten:

$$tang\,\omega = \frac{-(2\alpha + (1-\beta)\, tang\,\xi) \pm ((1+\beta)^2\, tang^2\xi + 4((\alpha^2-\beta)(1+tang^2\xi))^{\frac{1}{2}}}{2(1 - \alpha\, tang\,\xi)}. \tag{13}$$

Digitized by Google

Diesen beiden Werthen von *tang* ω entsprechen zwei Werthe von *tang* ω', die wir unmittelbar erhalten, indem wir in dem letzten Ausdrucke das Zeichen von *tang* ξ entgegengesetzt nehmen. Hiervon überzeugen wir uns auf der Stelle, wenn wir erwägen, dafs (tt) in Beziehung auf *tang* ω und *tang* ω' symmetrisch ist, und

$$tang\,\omega = \frac{tang\,\omega' - tang\,\xi}{1 + tang\,\omega'\,tang\,\xi},$$

wonach wir denn in der Gleichung (t2), wenn die Wurzeln derselben uns die Werthe von *tang* ω' geben sollen, nur *tang* ξ mit entgegengesetztem Zeichen zu nehmen brauchen. Es gibt also im Allgemeinen zwei Systeme zugeordneter Durchmesser, die einen gegebenen Winkel mit einander bilden. Man findet nur ein einziges System, oder, wenn man lieber will, die beiden Systeme fallen in ein einziges zusammen, wenn:

$$(1+\beta)^2\,tang^2\,\xi + 4(\alpha^2-\beta)(1+tang^2\,\xi) = 0,$$

oder wenn:

$$sin^2\,\xi = -\frac{4(\alpha^2-\beta)}{(1+\beta)^2}. \qquad (14)$$

Zugleich bezeichnet dieser Ausdruck das Minimum für den Winkel zugeordneter Durchmesser. Es gibt ein solches nur für den Fall der Ellipse; für den Fall der Parabel und Hyperbel können zugeordnete Durchmesser jeden beliebigen Winkel mit einander bilden; für den besondern Fall des Kreises reducirt sich der Werth von $sin^2\,\xi$ auf Eins, mithin gibt es nur rechtwinklige Systeme zugeordneter Durchmesser.

Die Bedingungen für die Realität der letzten Gleichung knüpfen sich blofs an das Zeichen von $(\alpha^2-\beta)$; $sin^2\,\xi$ kann niemals gröfser werden als die Einheit, denn:

$$(1+\beta)^2 + 4(\alpha^2-\beta) = (1-\beta)^2 + 4\alpha^2 > 0.$$

247. Wir wollen wiederum von der allgemeinen Gleichung:

$$y^2 + 2\alpha xy + \beta x^2 + 2\gamma y + 2\delta x + \epsilon = 0, \qquad (1)$$

bezogen auf ein rechtwinkliches Coordinaten-System ausgehen. Um die durch diese Gleichung dargestellte Curve auf neue Coordinaten-Axen zu beziehen, von denen die erste einen Winkel ω, die zweite einen Winkel ω' mit der ersten der ursprünglichen Axen bildet, so dafs mithin $(\omega'-\omega)$ Coordinaten-Winkel wird, bedienen wir uns der Formeln:

$$y = x_{,}\,sin\,\omega + y_{,}\,sin\,\omega', \qquad x = x_{,}\,cos\,\omega + y_{,}\,cos\,\omega',$$

indem wir die neuen Coordinaten durch unten angehängte Accente unterscheiden. Wir kommen auf diese Weise, wie in der 237. Nummer zu einer Gleichung von folgender Form:

$$\mu y_{,}^2 + 2\alpha' x_{,} y_{,} + \beta' x_{,}^2 + 2\gamma' y_{,} + 2\delta' x_{,} + \epsilon = 0, \qquad (2)$$

wo das von den veränderlichen Gröfsen unabhängige Glied dasselbe geblieben ist. Wenn wir von dieser Gleichung wieder zu der ursprünglichen rückwärts gehen wollen, so müssen wir uns der Formeln:

$$y_{,} = \frac{y\,cos\,\omega - x\,sin\,\omega}{sin\,\vartheta}, \qquad x_{,} = -\frac{y\,cos\,\omega' - x\,sin\,\omega'}{sin\,\vartheta},$$

in denen wir ϑ für $(\omega'-\omega)$ schreiben, bedienen. Durch Ausführung der angezeigten Substitutionen erhalten wir folgende sechs Gleichungen zur gegenseitigen Bestimmung der Coefficienten der drei ersten Glieder der beiden Gleichungen (1) und (2):

$$sin^2\omega' + 2\alpha\,sin\omega'\,cos\omega' + \beta\,cos^2\omega' = \mu, \qquad (3)$$

$$sin^2\omega + 2\alpha\,sin\,\omega\,cos\,\omega + \beta\,cos^2\omega = \beta', \qquad (4)$$

$$sin\omega\,sin\omega' + \alpha(sin\,\omega\,cos\,\omega' + sin\,\omega'\,cos\,\omega) + \beta\,cos\,\omega\,cos\,\omega' = \alpha', \qquad (5)$$

Digitized by Google

$$\frac{\mu\cos^2\omega - 2\alpha'\cos\omega\cos\omega' + \beta'\cos^2\omega'}{\sin^2\vartheta} = 1, \qquad (6)$$

$$\frac{\mu\sin^2\omega - 2\alpha'\sin\omega\sin\omega' + \beta'\sin^2\omega'}{\sin^2\vartheta} = \beta, \qquad (7)$$

$$-\frac{\mu\sin\omega\cos\omega - \alpha'(\sin\omega\cos\omega' + \sin\omega'\cos\omega) + \beta'\sin\omega'\cos\omega'}{\sin^2\vartheta} = \alpha. \qquad (8)$$

248. Wenn wir die Gleichungen (6) und (7) addiren, und bemerken, dafs

$$\cos\omega\cos\omega' + \sin\omega\sin\omega' = \cos(\omega' - \omega) = \cos\vartheta,$$

so erhalten wir folgenden Aosdruck:

$$\frac{\mu - 2\alpha'\cos\vartheta + \beta'}{\sin^2\vartheta} = 1 + \beta. \qquad (9)$$

Aus den Gleichungen (3) (4) und (5) ergibt sich nach einigen trigonometrischeo Umformungen:

$$\alpha'^2 - \mu\beta' = (\alpha'^2 - \beta)\sin^2\vartheta,$$

mithin:

$$\frac{\alpha'^2 - \mu\beta'}{\sin^2\vartheta} = \alpha^2 - \beta. \qquad (10)$$

Wir erkennen aus den Gleichungen (9) und (10), dafs die Ausdrücke

$$\frac{\mu - 2\alpha'\cos\vartheta + \beta'}{\sin^2\vartheta}, \qquad \frac{\alpha'^2 - \mu\beta'}{\sin^2\vartheta},$$

in allen möglichen verschiedenen Gleichungen constant sind, die wir erhalten indem wir ein und dieselbe Linie zweiter Ordnung aof irgend ein beliebiges Axen-System beziehen, dessen jedesmaliger Coordinaten-Winkel durch ϑ bezeichnet ist. Behalten wir dasselbe Coordinaten-System bei und geben der Curve verschiedene, durchaus beliebige, Lagen, so sind dieselben Ausdrücke offenbar wiederum constant, und mithin da ϑ sich nicht ändert, auch folgende Ausdrücke:

$$\mu - 2\alpha'\cos\vartheta + \beta', \qquad \alpha'^2 - \mu\beta',$$

wobei überall die Voraussetzung gemacht wird, dafs das von den veränderlichen Gröfsen unabhängie Glied nicht verschwindet und was immer möglich ist, auf denselben Werth reducirt wird. Sind die Coordinaten-Systeme, aof welche wir ein und dieselbe Curve beziehen alle rechtwinklig, so sind die Aosdrücke:

$$\mu + \beta', \qquad \alpha'^2 - \mu\beta',$$

constant; sind die Coordinaten-Axen immer zweien zogeordneten Durchmessern parallel, so haben, weil alsdann α verschwindet, die Aosdrücke:

$$\frac{\mu + \beta'}{\sin^2\vartheta}, \qquad \frac{\mu\beta'}{\sin^2\vartheta}, \qquad (11)$$

constante Werthe.

249. Die Deotung des letzten Resultats führt zo bekannten Sätzen. Seyen nemlich:

$$\frac{y^2}{B^2} + \frac{x^2}{A^2} = 1 \qquad \frac{y^2}{B'^2} + \frac{x^2}{A'^2} = 1$$

die Gleichongen derselben Ellipse, aof zwei verschiedene Systeme zugeordneter Durchmesser bezogen, alsdann gibt der letzte der Ausdrücke (11):

$$\frac{1}{A^2B^2\sin^2\vartheta} = \frac{1}{A'^2B'^2\sin^2\vartheta'}$$

wobei wir die Winkel, welche die Durchmesser jedes Systems mit einander bilden, ϑ und ϑ' nennen. Hieraus folgt:

$$AB \sin\vartheta = A'B' \sin\vartheta'. \qquad (12)$$

Wenn man durch die End-Puncte jedes von zweien zugeordneten Durchmessern dem andern gerade Linien parallel zieht, so wird die Curve von diesen Linien berührt, und es entsteht ein um dieselbe beschriebenes Parallelogramm. Die beiden Theile der letzten Gleichung geben den vierten Theil des Inhaltes solcher Parallelogramme. Also:

Alle um die Ellipse beschriebenen Parallelogramme, deren Seiten zweien zugeordneten Durchmessern parallel sind, haben gleichen Inhalt.

Für den Fall der Hyperbel ergibt sich die Modification dieses Satzes von selbst.

250. Der erste der Ausdrücke (11) auf die Gleichungen obiger beiden Ellipsen übertragen, gibt:

$$\left(\frac{1}{A^2} + \frac{1}{B^2}\right)\frac{1}{\sin^2\vartheta} = \left(\frac{1}{A'^2} + \frac{1}{B'^2}\right)\frac{1}{\sin^2\vartheta'},$$

und hieraus folgt, wenn wir zugleich die Gleichung (12) berücksichtigen:

$$A^2 + B^2 = A'^2 + B'^2,$$

eine Gleichung, die für den Fall der Hyperbel in folgende übergeht:

$$A^2 - B^2 = A'^2 - B'^2.$$

Hieraus erhellet, dafs bei der Ellipse die Summe, bei der Hyperbel der Unterschied der Quadrate je zweier zugeordneten Durchmesser eine constante Gröfse ist.

251. Wenn die, auf ein beliebiges System bezogene, allgemeine Gleichung:

$$y^2 + 2\alpha xy + \beta x^2 + 2\gamma y + 2\delta x + \epsilon = 0, \qquad (1)$$

eine Curve darstellt, die einen Mittelpunct hat, so können wir, indem wir in diesen Punct den Anfangs-Punct der Coordinaten verlegen, und das constante Glied durch Division auf Eins bringen, dieser Gleichung folgende Form geben:

$$\mu y^2 + 2\mu\alpha xy + \mu\beta x^2 + 1 = 0, \qquad (2)$$

wo nach der 230. Nummer:

$$\mu = \frac{\alpha^2 - \beta}{(\delta - \alpha\gamma)^2 + (\alpha^2 - \beta)(\epsilon - \gamma^2)}.$$

Aus der Gleichung (2) können wir endlich noch das, mit xy behaftete, Glied fortschaffen, und sie alsdann unter folgender Gestalt schreiben:

$$\frac{y^2}{q} + \frac{x^2}{p} + 1 = 0, \qquad (3)$$

Nennen wir nun den Coordinaten-Winkel des ursprünglichen Systems ϑ, und denjenigen, beliebig angenommenen, Winkel, welchen die zugeordneten Durchmesser, auf welche die Gleichung (3) bezogen ist, mit einander bilden, ξ: so gibt die Nebeneinander-Stellung der Gleichungen (2) und (3):

$$-\frac{1}{pq\sin^2\xi} = \frac{\mu^2(\alpha^2-\beta)}{\sin^2\vartheta}, \quad \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right)\frac{1}{\sin^2\xi} = \mu.\frac{1-2\alpha\cos\vartheta+\beta}{\sin^2\vartheta};$$

und hiernach erhält man:

$$pq = -\frac{\sin^2\vartheta}{\sin^2\xi}\cdot\frac{1}{\mu^2(\alpha^2-\beta)}, \qquad p+q = -\frac{1-2\alpha\cos\vartheta+\beta}{\mu(\alpha^2-\beta)},$$

woraus dann ersichtlich ist, dafs p und q Wurzeln ein und derselben quadratischen Gleichung sind, für welche wir folgende erhalten:

$$z^2 + \frac{1-2\alpha\cos\vartheta+\beta}{\mu(\alpha^2-\beta)}z - \frac{\sin^2\vartheta}{\sin^2\xi}\cdot\frac{1}{\mu^2(\alpha^2-\beta)} = 0, \qquad (4)$$

Wenn die Wurzeln dieser Gleichung, p und q, dasselbe Zeichen haben, wofür uns das letzte Glied derselben sogleich die Bedingung $(\alpha^2-\beta)<0$ gibt, so stellt die Gleichung (3) eine Ellipse dar, $(-p)$ und $(-q)$ sind die Quadrate derjenigen beiden halben zugeordneten Durchmesser, die den gegebenen Winkel ξ mit einander bilden. Ist die Ellipse reell, so sind die Werthe von p und q beide negativ, sonst beide positiv. Die Ellipse reducirt sich auf einen Punct, wenn beide Werthe verschwinden. Wir erkennen ohne alle Mühe, und in Uebereinstimmung mit frühern Entwicklungen, aus der letzten Gleichung (4), dafs diese verschiedenen Fälle sich einzig durch das Zeichen von:

$$\mu = \frac{\alpha^2-\beta}{(\delta-\alpha\gamma)^2+(\alpha^2-\beta)(\varepsilon-\gamma^2}$$

bestimmen. Wenn wir für p und q Werthe mit entgegengesetztem Zeichen erhalten, in welchem Falle: $(\alpha^2-\beta)>0$, so ist die Curve eine Hyperbel und immer reell; wenn alsdann p und q Null werden, so geht dieselbe in ein System zweier geraden Linien über, und alsdann ist $\frac{1}{\mu}=0$. Die Gleichung (4) gibt für z gleiche und entgegengesetzte Werthe, wenn:

$$1-2\alpha\cos\vartheta+\beta=0,$$

alsdann ist die Curve nach der 241. Nummer eine gleichseitige Hyperbel; in dieser sind also je zwei zugeordnete Durchmesser einander gleich. Lösen wir die Gleichung (4) wirklich auf, so ergeben sich für p und q folgende Ausdrücke:

$$-\frac{(1-2\alpha\cos\vartheta+\beta)\sin^2\xi \pm ((1-2\alpha\cos\vartheta+\beta)^2\sin^2\xi+4(\alpha^2-\beta)\sin^2\vartheta))^{1/2}}{2\mu(\alpha^2-\beta)\sin^2\xi} \qquad (5)$$

Die Werthe von p und q sind nur dann reell, wenn:

$$\sin^2\xi > -\frac{4(\alpha^2-\beta)\sin^2\vartheta}{1-2\alpha\cos\vartheta+\beta}. \qquad (6)$$

Diese Gränze der Realität bezieht sich auf die Bestimmung des Winkels ξ, nicht auf die Möglichkeit der Curve. Für den Fall der Ellipse gibt es ein Minimum des Winkels ξ, worauf wir schon in der 146. Nummer geführt worden sind. Wir sehen zugleich, dafs diesem Minimum gleiche zugeordnete Durchmesser entsprechen.

Wenn wir annehmen, die allgemeine Gleichung (1) sey auf rechtwinkliche Coordinaten bezogen, so ist $\vartheta=\frac{\pi}{2}$; wollen wir, bei dieser Annahme, die Gröfse der Axen bestimmen, so ist auch $\xi=\frac{\pi}{2}$, und wir erhalten demnach für die Quadrate ihrer Hälften, aus dem Ausdrucke (5), indem wir zugleich das Zeichen desselben ändern:

$$\frac{(1+\beta)\pm(4\alpha^2+(1-\beta)^2)^{1/2}}{2\mu(\alpha^2-\beta)}. \qquad (7)$$

252. Wenn die allgemeine, auf ein beliebiges System bezogene, Gleichung des zweiten Grades:

$$y^2+2\alpha xy+\beta x^2+2\gamma y+2\delta x+\varepsilon = 0, \qquad (1)$$

insbesondere eine Parabel darstellt, so können wir derselben durch blofse Verlegung des Anfangs-Punctes der Coordinaten, immer und nur auf eine einzige Weise, folgende Form geben:

$$y^2+2\alpha xy+\beta x^2+2\delta' x = 0. \qquad (2)$$

Alsdann berührt die zweite neue Axe die Curve im Anfangs-Puncte der Coordinaten, und nach der 235. Nummer ist:

$$\delta' = \delta-\alpha\gamma. \qquad (3)$$

Digitized by Google

Wir können ferner aus dieser Gleichung das mit xy behaftete Glied fortschaffen, indem wir blofs der ersten Axe eine andere Richtung geben. Alsdann haben wir nach der Bezeichnung der 237. Nummer: $\psi' = 0$ und φ' gleich dem Coordinaten-Winkel ϑ. Hiernach wird die Gleichung (2) der eben angezogenen Nummer, auf die letzte Gleichung der Parabel übertragen, folgende:

$$y^2 + 2\,\frac{\sin\varphi - \alpha\sin\psi}{\sin\vartheta}\,xy + \frac{\sin^2\varphi - 2\alpha\sin\varphi\sin\psi + \beta\sin\psi^2}{\sin^2\vartheta}\,x^2 - 2\,\frac{\delta'\sin\psi}{\sin\vartheta}\,x = 0. \quad (4)$$

Nehmen wir nun $\frac{\sin\varphi}{\sin\psi} = \alpha$, so fällt aus dieser Gleichung das zweite und dritte Glied aus, und sie reducirt sich auf:

$$y^2 - 2\,\frac{\delta'\sin\psi}{\sin\vartheta}\,x = 0. \quad (5)$$

Wenn wir endlich den, vermittelst der beiden Gleichungen:

$$\psi = \varphi - \vartheta, \qquad \sin\varphi = \alpha\sin\psi,$$

sich ergebenden Werth von $\sin\psi$:

$$\sin\psi = \pm\,\frac{\sin\vartheta}{(\alpha^2 - 2\alpha\cos\vartheta + 1)^{1/2}}, \quad (6)$$

in den Coefficienten von x substituiren, so wird derselbe, wenn wir zugleich wieder $\delta - \alpha\gamma$ für δ' schreiben:

$$\frac{\pm 2(\delta - \alpha\gamma)}{(\alpha^2 - 2\alpha\cos\vartheta + 1)^{1/2}}. \quad (7)$$

Dieser Ausdruck gibt also den Werth für den Parameter desjenigen Durchmessers, der alle der zweiten Axe parallele Chorden halbirt. Der Coordinaten-Winkel ist $(-\psi)$. Um den Parameter der Axe zu bestimmen, brauchen wir blos den Parameter eines beliebigen Durchmessers mit dem Quadrate des Sinus des Coordinaten-Winkels zu multipliciren. Diefs ergibt sich zugleich, indem wir die auf die Axe bezogene Gleichung der Parabel:

$$y = 2px,$$

in eine Gleichung von derselben Form, bezogen auf einen andern Durchmesser, umwandeln. Wir erhalten also für den Parameter der Axe der, durch (1) dargestellten, Parabel folgenden Ausdruck:

$$\frac{\pm 2(\delta - \alpha\gamma)\sin^2\vartheta}{(\alpha^2 - 2\alpha\cos\vartheta + 1)^{3/2}}.$$

§. 3.

Geometrische Bedeutung der einzelnen Constanten in der allgemeinen Gleichung des zweiten Grades zwischen zweien veränderlichen Gröfsen.

253. Wir wollen wieder, wie früher, folgende Gleichung: Fig. 1.

$$y^2 + 2\alpha xy + \beta x^2 + 2\gamma y + 2\delta x + \varepsilon = 0,$$

für die allgemeine Gleichung des zweiten Grades nehmen, und dieselbe auf ein beliebiges Coordinaten-System beziehen. Setzen wir für x in diese Gleichung irgend einen bestimmten, übrigens aber willkührlichen Werth, x', so erhalten wir die Ordinaten derjenigen

Puncte, in welchen die Curve von der durch x' bestimmten, der zweiten Coordinaten-Axe parallelen, geraden Linie geschnitten wird. Wenn wir nun die allgemeine Gleichung folgendermafsen schreiben:

$$y^2+2(\alpha x+\gamma)y+\beta x^2+2\delta x+\epsilon = 0,$$

und jene Ordinaten y' und $y_,$ nennen, so ergibt sich sogleich:

$$y'+y_, = -2(\alpha x'+\gamma). \qquad (1)$$

Für die Summe der Ordinaten, die den Durchschnitten einer andern, der zweiten Axe parallelen, geraden Linie mit der Curve entsprechen, erhalten wir bei einer analogen Bezeichnung:

$$y''+y_{,,} = -2(\alpha x''+\gamma).$$

Wenn wir die Differenz der letzten beiden Gleichungen nehmen, so fällt γ aus und es kommt:

$$y''-y'+y_{,,}-y_, = -2\alpha(x''-x'),$$

mithin:

$$\frac{y''-y'+y_{,,}-y_,}{x''-x'} = -2\alpha. \qquad (2)$$

Sind also, um dieses Resultat zu construiren, P'M' und P''M'' die beiden durch:

$$x = x', \qquad x = x''$$

dargestellten Parallelen und sind überdiefs M'N'' und $M_,N_{,,}$ der ersten Axe parallel gezogen, so gibt die Gleichung (2):

$$\frac{M''N''+M_,N_{,,}}{P'P''} = -2\alpha.$$

Wie wir auch die beiden geraden Linien P'M' und P''M'' parallel mit sich selbst verrücken mögen, der erste Theil dieser Gleichung behält immer ein und denselben Werth. Ueber die Richtung der Coordinaten-Axen ist durchaus keine Bestimmung gemacht worden, mithin können wir auch die Richtung der Schneidenden, P'M' und P''M'', so wie die Richtung von P'P'' beliebig annehmen. Diese Eigenschaft der Linien zweiter Ordnung gibt Euler im 5. Kap. des 2. Theiles seiner „*Introduction ad analysin infinitorum*," und bezeichnet dieselbe mit Grund als eine der beiden allgemeinsten Eigenschaften dieser Linien.

Die in Rede stehende Eigenschaft bezieht sich unmittelbar auch auf den besondern Fall, wo die allgemeine Gleichung ein System zweier geraden Linien darstellt.

Die Gleichung (2) besteht auch dann noch, wenn die, der zweiten Axe parallel gezogenen, geraden Linien der Curve nicht mehr begegnen, denn auch für den Fall imaginärer Wurzeln einer quadratischen Gleichung, bleibt die Summe derselben reell. Die geometrische Deutung fällt hier natürlich weg.

Fig. 2. 254. Wir können die Gleichung (2) für besondere Fälle noch vereinfachen, z. B. indem wir die beiden Schneidenden so bestimmen, dafs

$$y_{,,} = y_,.$$

Wir brauchen zu diesem Ende nur irgend eine gerade Linie $M_,M_{,,}$ der ersten Axe parallel und durch die Durchschnitte derselben mit der Curve, wie früher, zwei gerade Linien $M_,M'$ und $M_{,,}M''$ parallel mit der zweiten Axe zu ziehen. Hiernach reducirt sich die Gleichung (2) auf:

$$\frac{y''-y'}{x''-x'} = -2\alpha,$$

also ist mit Beziehung auf die Construction:

$$\frac{M''N''}{M'N'} = -2\alpha.$$

Es folgt hieraus, dafs, wie wir auch die gerade Linie M_0M_0 parallel mit sich selbst verrücken mögen, die gerade Linie $M'M''$, welche durch die beiden Puncte (y'', x'') und (y', x') geht, sich ebenfalls parallel mit sich selbst verrückt.

Nach dieser Nummer erhalten wir also, für eine gegebene Linie zweiter Ordnung und für ein gegebenes Coordinaten-System, sogleich den Werth des Coefficienten des zweiten Gliedes in der Gleichung der Curve. Wenn wir nemlich irgend eine der Curve begegnende gerade Linie der ersten Axe parallel ziehen und durch die beiden Durchschnitts-Puncte zwei andere gerade Linien, der Axe der y parallel legen, ist jener Coefficient gleich dem Quotienten des, auf der ersten geraden Linie von der Curve interceptirten, Stückes in die Differenz der auf den beiden andern geraden Linien interceptirten Stücke. Ueber das Zeichen dieses Quotienten kann in jedem besondern Falle kein Zweifel obwalten.

255. Die Gleichung (1) der 253. Nummer gibt:

$$\frac{y'+y_0}{2} = -(\alpha x'+\gamma).$$

Der erste Theil dieser Gleichung bezeichnet die Ordinate der Mitte des von der Corve interceptirten Stückes der geraden Linie $(x=x')$; nennen wir diese Ordinate y, und lassen zugleich den Accent von x fort, so kommt:

$$y+\alpha x+\gamma = 0.$$

Diese Gleichung bezeichnet, indem wir y und x als veränderliche Gröfsen betrachten, den Ort aller jener Mitten, indem wir die schneidende gerade Linie parallel mit sich selbst und der zweiten Axe verrücken. Dieser Ort, der (234) ein Durchmesser ist, halbirt also alle der zweiten Axe parallele Chorden. Da wir über die Richtung der zweiten Axe durchaus nichts bestimmt haben, so folgen allgemein folgende Sätze:

Wenn man in einer Linie zweiter Ordnung nach irgend einer beliebigen Richtung parallele Chorden zieht, so liegen die Mitten derselben auf einer geraden Linie, auf einem Durchmesser.

Die den parallelen Chorden parallele Tangenten bezeichnen den Uebergang, wo die Durchschnitte imaginär werden; der Durchmesser, der jene Chorden halbirt, geht auch durch die Berührungs-Puncte, und, umgekehrt, diejenige gerade Linie, welche durch zwei Puncte geht, in welchen zwei parallelen Tangenten eine Linie zweiter Ordnung berühren, ist ein Durchmesser derselben.

Man überzeugt sich leicht, dafs der schon früher bezeichnete Durchmesser:

$$\alpha y+\beta x+\delta = 0,$$

alle der ersten Coordinaten-Axe parallele Chorden halbirt.

256. Wenn wir in der allgemeinen Gleichung: Fig. 3.

$$y^2+2\alpha xy+\beta x^2+2\gamma y+2\delta x+\varepsilon = 0,$$

um die Durchschnitte der ersten und zweiten Axe mit der Curve zu bestimmen, nach einander y und x gleich Null setzen, so kommt:

$$\beta x^2+2\delta x+\varepsilon = 0, \quad y^2+2\gamma y+\varepsilon = 0,$$

also ist, wenn wir die Wurzeln der ersten Gleichung durch x' und x'', die Wurzeln der zweiten durch y' und y'' bezeichnen:

$$x'x'' = \frac{\varepsilon}{\beta}, \quad y'y'' = \varepsilon.$$

Digitized by Google

und die Zusammenstellung dieser Gleichungen gibt:

$$\frac{y'y''}{x'x''} = \beta,$$

also mit Beziehung auf die 3. Figur:

$$\frac{OQ.\ OQ'}{OP.\ OP'} = \beta.$$

Da in der allgemeinen Gleichung der Werth von β derselbe bleibt, wie wir auch den Anfangs-Punct der Coordinaten O, mit Beibehaltung der Axen-Richtung, verlegen mögen, so bleibt der Quotient der beiden Producte OQ. OQ' und OP. OP' derselbe für alle beliebigen Puncte, durch die wir nach bestimmter Richtung zwei gerade Linien OY und OX legen. Diese Beziehung nennt Euler die zweite allgemeine Eigenschaft der Linien zweiter Ordnung. Der von ihm gegebene Beweis hat mit dem obigen Aehnlichkeit.

Nach dieser Nummer können wir also für eine gegebene Linie zweiter Ordnung und ein gegebenes Coordinaten-System, auf welche die Gleichung derselben bezogen werden soll, den Coefficienten β dieser Gleichung geometrisch construiren. Wir haben ferner, wenn OY die zweite Axe ist:

$$OQ.\ OQ' = \varepsilon,$$

und hiernach ergibt sich auch die Construction des letzten Coefficienten der allgemeinen Gleichung, für den Fall, dafs die erste Axe der Curve wirklich begegnet.

257. Im Falle, dafs die zweite Axe der Curve nicht begegnet, gibt die Gleichung:

$$y^2 + 2\gamma y + \varepsilon = 0$$

imaginäre Wurzeln, deren Product immer positiv ist. Wenn hingegen die zweite Axe die Curve schneidet, so ist ε positiv, wenn die beiden Durchschnitte auf derselben Seite des Anfangs-Punctes liegen, negativ im entgegesetzten Falle. Für Ellipse und Parabel ist also ε positiv oder negativ, je nachdem der Anfangs-Punct aufserhalb oder innerhalb angenommen wird. Für die Hyperbel ist, wenn der Anfangs-Punct aufserhalb liegt, ε positiv, wenn die zweite Axe der Curve nicht begegnet, oder nur einem Zweige derselben, negativ, wenn beide Zweige geschnitten werden; wenn der Anfangs-Punct innerhalb liegt, ist ε positiv oder negativ, je nachdem die zweite Axe beide Zweige oder nur einen Zweig schneidet.

Das Zeichen von β hängt davon ab, ob die Producte der auf beiden Axen bestimmten Segmente OQ. OQ' und OP. OP' von gleichem oder entgegengesetztem Zeichen sind. Für Ellipse und Parabel ist hiernach β immer positiv; für die Hyperbel ist β dann negativ, wenn eine der beiden Coordinaten-Axe beiden Zweigen begegnet und die andere nur einem Zweige, oder überhaupt die Curve gar nicht schneidet, in den übrigen Fällen ist β positiv. Der Uebergang von positiven zu negativen Werthen für β geht durch Null oder durchs Unendliche, d. h. geometrisch genommen, indem wir der einen oder andern Axe eine solche Richtung geben, dafs sie mit einer der Asymptoten parallel wird.

258. Wenn in der allgemeinen Gleichung β gleich Eins ist, so ist:

$$OQ.\ OQ' = OP.\ OP',$$

wo wir auch den Punct O, durch den wir zwei gerade Linien parallel mit den beiden Axen ziehen, annehmen mögen. Dieser Fall tritt da ein, wo eine Axe der Curve die beiden Coordinaten-Axen unter gleichen Winkeln schneidet (245.). Also:

Digitized by Google

Wenn wir in irgend einer Linie zweiter Ordnung irgend zwei gerade Linien ziehen, die eine Axe derselben unter gleichen Winkeln schneiden, so sind diejenigen beiden Rechtecke gleich, die unter denjenigen Segmenten jeder dieser Linien, welche zwischen dem Durchschnitte derselben und den Durchschnitten mit der Curve liegen, enthalten sind. Der Durchschnitt der beiden geraden Linien unter sich kann sowol ausserhalb als innerhalb der Curve Statt haben.

Für den Kreis ist immer, wie wir auch die Coordinaten-Axen bestimmen mögen, $\beta=1$, wir können also die beiden sich schneidenden geraden Linien durchaus beliebig annehmen.

Wir erhalten ebenfalls gleiche Rechtecke wenn $\beta=-1$ ist, was zunächst für den Fall der gleichseitigen, auf rechtwinkliche Coordinaten bezogenen Hyperbel Statt findet. Also:

Wenn eine gleichseitige Hyperbel gegeben ist und man zieht durch irgend einen beliebigen Punct zwei, auf einander senkrechte, gerade Linien, so sind die Rechtecke, welche unter denjenigen Segmenten jeder der beiden geraden Linien, die zwischen jenem Punete und der Hyperbel liegen, enthalten sind, einander gleich.

An die Stelle der gleichseitigen Hyperbel können wir ein System zweier sich rechtwinklich schneidenden geraden Linien setzen.

Wir verweilen nicht dabei, für eine nicht gleichseitige Hyperbel solche Linien-Paare zu bestimmen, für welche die in Rede stehenden Rechtecke gleich sind.

259. Wir haben folgende Gleichung zur Bestimmung der Durchschnitts-Puncte der zweiten Axe mit der Curve:

$$y^2+2\gamma y+\epsilon = 0,$$

und hienach, wenn wir die Ordinaten dieser Puncte durch y' und y'' unterscheiden:

$$\gamma = -\frac{y'+y''}{2}.$$

Wir können also in dem Falle, dafs die zweite Axe die Linie zweiter Ordnung wirklich schneidet, den Werth von γ leicht in der Construction nachweisen: γ ist nemlich gleich dem mit entgegesetztem Zeichen genommenen Abstande der Mitte, der auf jener Axe von der Curve interceptirten, Chorde von dem Anfangs-Puncte der Coordinaten.

Die Gleichung:

$$\beta x^2+2\delta x+\epsilon = 0,$$

gibt auf ähnliche Weise $\left(-\frac{\delta}{\beta}\right)$ für die Abscisse der Mitte der, auf der ersten Axe interceptirten, Chorde.

Für den Fall, dafs die zweite Axe der Curve nicht begegnet, müssen wir γ auf andere Weise bestimmen. Wir gelangen dazu vermittelst des Durchmessers, der alle der zweiten Axe parallele Chorden halbirt, und dessen Gleichung folgende ist:

$$y+\alpha x+\gamma = 0, \qquad (1)$$

in der γ die Ordinate des Durchschnittes dieses Durchmessers mit der zweiten Axe, mit entgegengesetztem Zeichen genommen, bedeutet. Ziehen wir daher irgend zwei der zweiten Axe parallele Chorden, so bestimmt diejenige gerade Linie, welche diese Chorden halbirt, auf jener Axe eine Ordinate, die gleich ist $(-\gamma)$. Die Abscisse des Durchschnittes dieses Durchmessers mit der ersten Axe ist gleich $\left(-\frac{\gamma}{\alpha}\right)$.

Digitized by Google

Nehmen wir die Gleichung des andern Durchmessers, der alle der ersten Axe parallele Chorden halbirt, nemlich die Gleichung:

$$\alpha y+\beta x+\delta = 0, \qquad (2)$$

so finden wir für die Durchschnitte dieses Durchmessers mit der ersten und zweiten Axe:

$$x = -\frac{\delta}{\beta}, \qquad y = -\frac{\delta}{\alpha}.$$

Fig. 3. In der 3. Figur sind BC und AD die beiden durch (1) und (2) dargestellten Durchmesser, mithin ist:

$$OC = -\gamma, \quad OA = -\frac{\delta}{\beta}, \quad OB = -\frac{\gamma}{\alpha}, \quad OD = -\frac{\delta}{\alpha}.$$

Es ergibt sich hieraus ferner:

$$\frac{OB}{OD} = \frac{\gamma}{\delta},$$

wonach wir zur Bestimmung von δ folgende Gleichung erhalten:

$$\delta = -\frac{OD.\,OC}{OB}.$$

Wenn wir den Werth von δ nicht geradezu als das vierte Glied einer geometrischen Proportion construiren wollen, so können wir auch durch die drei Puncte B, C und D einen Kreis legen, der alsdann die erste Axe in einem Puncte schneidet, dessen Abscisse gleich ist $(-\delta)$. (253).

Wenn $\beta = \pm 1$ ist, so kommt:

$$\delta = \mp OA;$$

der eben construirte Kreis geht alsdann durch den Punct A.

260. Wenn wir in der allgemeinen Gleichung:

$$y^2+2\alpha xy+\alpha y+\beta x^2+2\gamma y+2\delta x+\varepsilon = 0,$$

für x irgend einen besondern Werth x' substituiren, so ist das Product der beiden entsprechenden Werthe für y, die wir durch y' und y'' unterscheiden wollen, gleich dem von y unabängigen Gliede; es ist:

$$y'y'' = \beta x'^2+2\delta x'+\varepsilon.$$

Aehnlich erhalten wir, indem wir eine Abscisse $(-x')$ nehmen, und die entsprechenden Ordinaten $y_,$ und $y_{,,}$ nennen:

$$y_,y_{,,} = \beta x'^2-2\delta x'+\varepsilon,$$

und wenn wir die letzten beiden Gleichungen von einander abziehen:

$$y'y''-y_,y_{,,} = 4\delta x'.$$

Fig. 4. Nehmen wir in der 4. Figur OM für x', so verschwindet offenbar das Product y'y'' und wir erhalten:

$$-y_,y_{,,} = 4\delta x',$$

also wenn wir in der Construction $O\mu$ gleich $(-x')$, d. h. abgesehen vom Zeichen, gleich OM nehmen:

$$-2\delta = \frac{y_,y_{,,}}{2x'} = \frac{\mu Q.\mu Q'}{\mu M}.$$

Wir können also auch auf diese Weise den Werth des Coefficienten von x in der allgemeinen Gleichung construiren, für den Fall, dafs die zweite Axe der Curve begegnet.

Da der Abstand der Mitte von MM' vom Puncte O gleich ist $\left(-\frac{\delta}{\beta}\right)$, so erhalten wir eine neue Bestimmung von β, nachdem wir δ zuvor construirt haben.

261. Wenn wir in der allgemeinen Gleichung: Fig. 5.

$$y^2+2\alpha xy+\beta x^2+2\gamma y+2\delta x+\varepsilon = 0,$$

die drei ersten Glieder, für sich allein genommen, gleich Null setzen, so erhalten wir (241):

$$y^2+2\alpha xy+\beta x^2 = 0, \qquad (1)$$

die Gleichung eines Systems von zweien geraden Linien, OM und OM', die durch den Anfangs-Punct der Coordinaten gehen und den Asymptoten der Curve parallel sind. Ziehen wir diese Gleichung von der allgemeinen ab, so bleibt:

$$2\gamma y+2\delta x+\varepsilon = 0, \qquad (2)$$

die Gleichung einer geraden Linie, die durch die Durchschnitte der Curve mit jenem Systeme von zweien geraden Linien geht; woraus wir denn beiläufig sehen, dafs es nur zwei solcher Durchschnitte, M und M', gibt.

Für den Fall der Parabel stellt die Gleichung (1) zwei zusammenfallende, durch den Fig. 6. Anfangs-Punct der Coordinaten, durch O gehende Durchmesser derselben dar. Die Gleichung (2) bezeichnet also die Tangente MS im Scheitel dieser Durchmesser.

Für den Fall der Ellipse wird jenes System von zwei geraden Linien (1) imaginär; die Gleichung (2) bezeichnet immer noch eine bestimmte gerade Linie, die aber mit der Curve keinen Punct mehr gemein haben kann.

262. Wir haben früher die geometrische Bedeutung von ε in der Voraussetzung nachgewiesen, dafs die zweite Axe der Curve wirklich begegnet; für den Fall der Hyperbel und Parabel, erhalten wir, nach der vorigen Nummer, eine allgemeinere Construction dieses Werthes. Lassen wir nemlich in der Gleichung (2) x verschwinden, so ergibt sich für den Durchschnitt der bezüglichen geraden Linie mit der zweiten Axe:

$$\varepsilon = -2\gamma y$$

also, mit Beziehung auf die 5. und 6. Figur, wo OS die zweite Axe, μ die Mitte der, auf ihr von der Curve interceptirten, Chorde QQ', und O der Anfangs-Punct ist:

$$\varepsilon = -2\mathrm{OS}.\mathrm{O}\mu.$$

Indem wir die in dieser und in der 256. Nummer für ε construirten Werthe gleich setzen, erhalten wir, abgesehn vom Zeichen, folgenden Ausdruck:

$$2.\mathrm{OS}.\mathrm{O}\mu = \mathrm{OQ}.\mathrm{OQ}'.$$

Wir können auch auf ähnliche Weise ε vermittelst der Gleichung:

$$\gamma y+\delta x+\varepsilon = 0,$$

deren geometrische Deutung wir im nächsten Paragraphen geben werden, construiren, und diese Construction ist keiner Beschränkung unterworfen.

263. Die beiden Gleichungen:

$$y^2+2\gamma y+\varepsilon = 0, \qquad \beta x^2+2\delta x+\varepsilon = 0,$$

geben reelle, gleiche oder imaginäre Wurzeln, je nachdem die Ausdrücke $(\gamma^2-\varepsilon)$ und $(\delta^2-\beta\varepsilon)$ positiv, Null oder negativ sind. Hieran erkennen wir also, ob die erste und zweite Coordinaten-Axe der Curve begegnen oder nicht.

264. Wenn für verschiedene durch die allgemeine Gleichung:

$$y^2+2\alpha xy+\beta x^2+2\gamma y+2\delta x+\varepsilon = 0 \qquad (1)$$

dargestellten Curven, ε und γ dieselben Werthe haben, so gibt die Gleichung:

$$y^2+2\gamma y+\varepsilon = 0, \qquad (2)$$

gleiche Wurzeln; alle einzelnen Curven schneiden also die zweite Axe in denselben beiden Puncten. Und, umgekehrt, in den Gleichungen aller Linien

Digitized by Google

zweiter Ordnung, die sich in zweien festen Puncten schneiden, behalten das constante Glied und der Coefficient von y immer denselben Werth, wenn wir die zweite Axe durch jene beiden festen Puncte legen.

Auf entsprechende Weise schneiden verschiedene Curven die erste Axe in denselben beiden Puncten, wenn folgende Gleichung:

$$\beta x^2 + 2\delta x + \epsilon = 0, \qquad (4)$$

immer dieselben Wurzeln gibt, wenn nemlich $\frac{\delta}{\beta}$ und $\frac{\epsilon}{\beta}$ sich nicht ändern.

Wenn verschiedene Linien zweiter Ordnung sich in denselben vier Puncten schneiden, und wir legen durch diese vier Puncte, paarweise genommen, was auf dreifache Weise geschehen kann, die beiden Axen, so müssen beide Gleichungen (2) und (3) gleiche Wurzeln geben, mithin die vier Coefficienten β, γ, δ und ϵ in den Gleichungen aller einzelnen Curven dieselben Werthe haben, so dafs wir also alle diese Curven durch die Gleichung (1) darstellen können, indem wir in derselben einzig nur dem Coefficienten von xy einen unbestimmten Werth, der von einer Curve zur andern sich ändert, beilegen.

Zu demselben Resultate kommen wir unmittelbar auf folgende Weise. Die Gleichung irgend einer Curve zweiter Ordnung sey:

$$y^2 + 2\alpha xy + \beta x^2 + 2\gamma y + 2\delta x + \epsilon = 0,$$

und da

$$xy = 0$$

die Gleichung des Systems der beiden Coordinaten-Axen ist, so erhalten wir durch Verbindung der beiden Gleichungen jede beliebige Curve, welche die beiden Axen in denselben Puncten schneidet. Soll die resultirende Gleichung wiederum vom zweiten Grade seyn, so behält sie offenbar die Form der gegebenen Curve, und nur der Coefficient des zweiten Gliedes kann seinen Werth ändern.

Es ist, um den Beweis umzukehren, eben so augenfällig, dafs die Gleichungen zweier Curven:

$$y^2 + 2\alpha xy + \beta x^2 + 2\gamma y + 2\delta x + \epsilon = 0,$$
$$y^2 + 2axy + bx^2 + 2cy + 2dx + e = 0,$$

sich nur dann zu der Gleichung des Axen-Systems:

$$xy = 0$$

verbinden lassen (indem wir nemlich abziehen und durch $(\alpha - a)$ dividiren), wenn:

$$b = \beta, \quad c = \gamma, \quad d = \delta, \quad e = \epsilon.$$

265. Wir wollen wieder, indem wir $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ und ϵ als unbestimmte Coefficienten betrachten,

$$y^2 + 2\alpha xy + \beta x^2 + 2\gamma y + 2\delta x + \epsilon = 0$$

für die allgemeine Gleichung der Linien zweiter Ordnung nehmen. Alsdann sind:

$$y + \alpha x + \gamma = 0,$$
$$\alpha y + \beta x + \delta = 0, \qquad (1)$$

die Gleichungen der beiden Durchmesser, welche die den beiden Coordinaten-Axen parallelen Chorden halbiren. Soll die Richtung dieser beiden Durchmesser für verschiedene Curven sich nicht ändern, so müssen α und β constant seyn. Wenn in den Gleichungen verschiedener Linien zweiter Ordnung, auf irgend ein beliebiges System bezogen, diese Coefficienten dieselben sind, so bleiben sie auch gleich nach jeder beliebigen Coordinaten-

Digitized by Google

Umformung, und von solchen Curven sagen wir, sie seyen ähnlich und von ähnlicher Lage.

Wenn also zwei oder mehrere Curven zwei Paare paralleler zugeordneten Durchmesser haben, so sind dieselben ähnlich und haben ähnliche Lage; wenn man ferner in denselben in beliebiger Richtung parallele Durchmesser zieht, so sind auch die denselben zugeordneten Durchmesser unter einander parallel.

Sollen die Gleichungen (1) zwei, durchaus onveränderliche, gerade Linien darstellen, so müssen die Coefficienten α, β, γ und δ alle vier constant seyn, und wir können nor ε in der allgemeinen Gleichong willkührlich bestimmen. Alsdann stellt diese Gleichung nur solche Curven dar, welche ähnlich sind, und ähnliche Lage und denselben Mittelponct haben.

266. Characteristisch für die verschiedenen Linien zweiter Ordnong ist das Zeichen des Werthes von $(\alpha^2-\beta)$; in der geometrischen Deutung hiervon liegt dann natürlich auch die allgemeinste Unterscheidung der drei Haopt-Classen dieser Linien. Wir können hierbei aof folgende Weise verfahren. Sey $M_{,}M_{,,}$ irgend eine, der ersten Coordinaten-Axe parallel gezogene, gerade Linie, die der Curve in $M_{,}$ und $M_{,,}$ begegnet; dorch diese Durchschnitts-Puncte seyen $M_{,}M'$ und $M_{,,}M''$ parallel gelegt mit der zweiten Axe, und endlich durch M', den zweiten Dorchschnitt der ersten dieser Linien mit der Curve, $M'M$ wiederum parallel mit $M_{,}M_{,,}$ und der ersten Axe. Alsdann ist nach der 254. und 256. Nommer: Fig. 2.

$$\frac{N''M''}{2\,N''M'} = -\alpha, \qquad \frac{N''M''.N''M_{,,}}{N''M'.N''M} = \beta,$$

und also:

$$\alpha^2-\beta = \frac{N''M''^2}{4N''M'^2} - \frac{N''M''.N''M_{,,}}{N''M'.N''M} = \frac{N''M''}{N''M'}\cdot\frac{N''M''.N''M-4\,N''M_{,,}.N''M'}{4\,N''M'.N''M}.$$

Für den Fall der Parabel, wo $(\alpha^2-\beta)$ Null wird, erhalten wir:

$$N''M''.N''M = 4\,N''M_{,,}.N''M',$$

mithin ist das Parallelogramm $M'M$ gleich dem Vierfachen des Parallelogrammes $M''M_{,,}$. Da wir über die Richtong der beiden Coordinaten-Axen, denen die Seiten dieser Parallelogramme parallel sind, durchaus keine Bestimmung getroffen haben, so haben wir einen allgemeinen Satz für die Parabel bewiesen, bei dessen Aussage wir hier nicht verweilen. Derselbe Satz verificirt sich direct für ein System zweier Parallellinien.

Bei der Interpretation des Ausdruckes von $(\alpha^2-\beta)$ für den Fall der Ellipse und Hyperbel müssen wir auf die, durch die Lage des Punctes N'' bedingten Vorzeichen der verschiedenen Linien-Segmente Rücksicht nehmen. Liegt jener Punct, ähnlich wie in der Constroction der 2. Figur, so sind die beiden Ausdrücke:

$$(\alpha^2-\beta), \qquad (N''M''.N''M - 4\,N''M_{,,}.N''M'),$$

von entgegengesetztem Zeichen. Je nachdem also $(\alpha^2-\beta)$ positiv oder negativ, d. h. die gegebene Curve eine Hyperbel oder Ellipse ist, ist das Parallelogramm $M'M$ kleiner oder gröfser als das Parallelogramm $M''M_{,,}$.

Umgekehrt ist ferner ersichtlich, dafs diejenige Linie zweiter Ordnung, welche durch die fünf Puncte M', M'', M, $M_{,,}$ und $M_{,}$ sich legen läfst, und in der Construction eine Parabel ist, in eine Hyperbel übergeht, wenn der Ponct M sich aof der geraden Linie $M'M$ weiter vom Puncte N'' entfernt, in eine Ellipse hingegen, wenn er sich diesem Puncte nähert, und endlich wieder in eine Hyperbel, wenn M über N'' hinaos, nach M' hin, fortrückt. —

Digitized by Google

Weiter dürfen wir hier den, in diesem Paragraphen eingeleiteten, Gang der Untersuchung nicht verfolgen.

§. 4.

Ueber Berührung zwischen einer Linie zweiter Ordnung und geraden Linien.

267. Jede directe Tangenten-Methode ist eine Umschreibung desjenigen Verfahrens nach, welchem vermittelst Differential-Rechnung die Gleichung der Tangente hergeleitet wird. Wir wollen dieses Verfahren, angewandt auf Linien zweiter Ordnung, geradezu hier nachbilden.

Sey:

$$y^2+2\alpha xy+\beta x^2+2\gamma y+2\delta x+\epsilon = 0, \qquad (1)$$

die Gleichung der gegebenen Curve und (y'',x'') ein gegebener Punct derselben, in welchem wir die Tangente construiren wollen. Zwischen y'' und x'' findet die Gleichung (1) Statt, es ist:

$$y''^2+2\alpha x''y''+\beta x''^2+2\gamma y''+2\delta x''+\epsilon = 0,$$

und hiernach wird die Gleichung der Curve, indem wir abziehn, um ϵ zu eliminiren:

$$(y^2-y''^2)+2\alpha(xy-x''y'')+\beta(x^2-x''^2)+2\gamma(y-y'')+2\delta(x-x'') = 0. \qquad (2)$$

Weil die Tangente ebenfalls durch den Punct (y'',x'') geht, so hat ihre Gleichung folgende Form:

$$y-y'' = \varkappa(x-x''). \qquad (3)$$

So lange $\varkappa$ unbestimmt bleibt, kann die letzte Gleichung jede beliebige gerade Linie bezeichnen, welche durch den Punct (y'',x'') geht. Im Allgemeinen wird eine solche Linie der Curve noch in einem zweiten Punete begegnen. Bezeichnen wir die Coordinaten dieses zweiten Punctes durch $(y''+k)$ und $(x''+h)$, so müssen diese Werthe für y und x, in (2) und (3) substituirt, diese Gleichungen beide befriedigen. Hiernach erhalten wir:

$$\varkappa^2+2\alpha kh+\beta h^2+2(y''+\alpha x''+\gamma)k+2(\alpha y''+\beta x''+\delta)h = 0,$$

$$k = \varkappa h.$$

Eliminiren wir aus der ersten dieser Gleichungen k vermittelst der zweiten, so kommt, wenn wir zugleich durch h dividiren:

$$\varkappa^2h+2\alpha\varkappa h+\beta h+2(y''+\alpha x''+\gamma)\varkappa+2(\alpha y''+\beta x''+\delta) = 0. \qquad (4)$$

Wenn wir für h einen beliebigen Werth annehmen, so gibt diese Gleichung für $\varkappa$ zwei Werthe; wenn wir $h = 0$ setzen, so wird einer dieser Werthe unendlich und, indem wir von diesem Werthe abstrahiren, reducirt sich die letzte Gleichung auf ihre beiden letzten Glieder und es ergibt sich:

$$\varkappa = -\frac{\alpha y''+\beta x''+\delta}{y''+\alpha x''+\gamma}.$$

Dieser Werth von $\varkappa$ gehört offenbar der gesuchten Tangente an. Denn den beiden Werthen von $\varkappa$, welche die Gleichung (4) für ein bestimmtes h gibt, entsprechen zwei durch den Punct (y'',x'') gehende Sekanten, von welchen, wenn h Null wird, die eine mit der Ordinate des Punctes (y'',x'') zusammenfällt, wo also das entsprechende $\varkappa$ unendlich wird, während die andere in die Tangente übergeht, und dieser entspricht nothwendig der

Digitized by Google

andere Werth von x. Substituiren wir denselben in ihre Gleichung (3), so kommt, nach einer einfachen Reduction:

$$(y''+\alpha x''+\gamma)y+(\alpha y''+\beta x''+\delta)x+\gamma y''+\delta x''+\epsilon = 0.\ ^{*}) \qquad (5)$$

Die Form der Coefficienten von y nnd x in dieser Gleichung rechtfertigt sich leicht *a priori*.

268. Die End-Gleichung der vorigen Nommer ist symmetrisch in Beziehung auf y'', x'' nnd y, x, so dafs wir ihr also auch folgende Form geben können:

$$(y+\alpha x+\gamma)y''+(\alpha y+\beta x+\delta)x''+\gamma y+\delta x+\epsilon = 0.$$

Wenn wir die Coordinaten irgend eines Punctes der dorch diese Gleichung dargestellten Tangente kennen nnd diese Coordinaten-Werthe in die letzte Gleichung für y und x als constante Gröfsen sobstituiren, während wir y'' und x'' als veränderliche Gröfsen betrachten, nnd deshalb die Accente nnterdrücken, so stellt die Gleichung:

$$(y'+\alpha x'+\gamma)y+(\alpha y'+\beta x'+\delta)x+\gamma y'+\delta x'+\epsilon = 0, \qquad (6)$$

eine gerade Linie dar, welche den, eben durch (y'',x'') hezeichneten, Berührungs-Punct enthält. Eine solche gerade Linie hegegnet der Curve noch in einem zweiten Puncte, in welchem die andere durch den Punct (y',x') gehende Tangente die Curve herührt. Wenn der Punct (y',x') auf der Curve selbst liegt, fällt diese Linie mit der Tangente znsammen nnd hierdorch ist der Uebergang angezeigt, wo dieselbe zwar immer construirbar bleibt, aber der Curve nicht mehr hegegnet, weil vom Puncte (y',x') sich keine Tangenten an dieselbe legen lassen. Die durch (6) dargestellte gerade Linie, bei deren geometrischer Bedeutung wir in den folgenden Paragraphen länger verweilen werden, heifst die Polare des Punctes (y',x').

Dadurch, dafs für einen Punct der Curve die Polare mit der Tangente in diesem Puncte znsammenfällt, wird die oben erwähnte Symmetrie der Gleichung (5) bedingt.

Es ist gut, schon hier zu bemerken, dafs auch von Polaren für imaginäre Linien zweiter Ordnung die Rede seyn kann.

Wir sehen ferner nicht sogleich, welche geometrische Bedeutung die Polare eines gegebenen Punctes in dem Falle hat, wo wir statt der Curve ein System zweier ge-

---

*) Die Gleichung (4) enthält ebenfalls die Bestimmung der Richtung der beiden Asymptoten; wir brauchen zu diesem Ende nur $h = \frac{1}{0}$ zu setzen. Wir erhalten nemlich, indem wir alle Glieder durch h dividiren, nnd alsdann alle diejenigen, in welchen h als Divisor vorkommt, vernachlässigen:

$$x^2+2\alpha x+\beta = 0,$$

mithin, indem wir $\frac{y}{x}$ für x schreiben:

$$y^2+2\alpha xy+\beta y^2 = 0,$$

für die Gleichung des Systems zweier geraden Linien, die durch den Anfangs-Punct der Coordinaten gehen nnd den Asymptoten parallel sind.

Es erhellt auf diese Weise ganz allgemein, dafs man für eine Curve des m. Grades, ein System von m geraden Linien erhält, die den m Asymptoten der Curve parallel sind nnd durch den Anfangs-Punct der Coordinaten gehen, indem man die mit der höchsten Potenz der veränderlichen Gröfsen behafteten Glieder in der Gleichung der Curve, für sich allein genommen, gleich Null setzt. Es versteht sich hierbei von selbst, dafs die Asymptoten nnd die ihnen parallelen geraden Linien alle oder zum Theil imaginär seyn können.

Digitized by Google

raden Linien nehmen. Sey (y', x') wiederum der gegebene Punct, und jenes Linien-System das System der Axen selbst, und folglich dessen Gleichung:

$$xy = 0.$$

Für diese Annahme verwandelt sich die Gleichung (6) in folgende:

$$x'y + y'x = 0.$$

Die Polare geht also durch den Anfangs-Punct der Coordinaten, und ferner ist leicht ersichtlich, dafs jede durch den Punct (y', x') gehende gerade Linie von den beiden Linien des Systems und der Polaren harmonisch geschnitten wird (36, 49), denn gehen wir der letzten Gleichung und derjenigen, welche die durch den Anfangs-Punct der Coordinaten und den Punct (y', x') gehende gerade Linie darstellt, folgende Formen:

$$y = \varkappa x, \quad y = \varkappa' x,$$

so ist offenbar:

$$\varkappa + \varkappa' = 0.$$

269. Wenn wir in der Gleichung (5) $y' = 0$ und $x' = 0$ setzen, so erhalten wir:

$$\gamma y + \delta x + \epsilon = 0, \qquad (7)$$

für die Polare des Anfangs-Punctes der Coordinaten. Stellen wir diese Gleichung mit derjenigen geraden Linie zusammen, welche durch die Durchschnitts-Puncte zweier, den Asymptoten parallelen und durch den Anfangs-Punct gehenden, geraden Linien mit der Curve geht (Asymptoten-Chorde), also (261) mit der Gleichung:

$$2\gamma y + 2\delta x + \epsilon = 0,$$

so ist ersichtlich, dafs die bezüglichen Linien parallel sind und überdiefs der Anfangs-Punct von der erstern (7) noch einmal so weit absteht als von der letztern. Zunächst bezieht sich dieses Resultat auf die Hyperbel, und da wir über den Anfangs-Punct der Coordinaten keine nähere Bestimmung getroffen haben, so ist allgemein folgender Satz bewiesen:

Für jeden beliebigen Punct in der Ebene einer Hyperbel ist die Polare parallel der Asymptoten-Chorde und steht doppelt so weit von jenem Puncte ab als diese.

Fig. 7. In der 7. Figur, wo der beliebig angenommene Punct, O, aufserhalb liegt ist MM' die Asymptoten-Chorde und die Berührungs-Chorde NN' ist die Polare.

Wir können nach diesem Satze auf eine leichte Weise an eine gegebene Hyperbel, deren Asymptoten bekannt sind, von einem gegebenen Puncte aus Tangenten legen.

Die Deutung des obigen Resultats für den Fall der Parabel gibt folgende bekannten Sätze:

Wenn man von irgend einem Puncte in der Ebene einer Parabel Tangenten an dieselbe zieht, und durch denselben Punct einen Durchmesser legt, so ist die Berührungs-Chorde parallel der Tangente im Scheitel des Durchmessers, und also auch den zugeordneten Ordinaten desselben. Das zwischen dem beliebigen Puncte und der Berührungs-Chorde liegende Stück des Durchmessers wird im Durchschnitte mit der Curve halbirt.

Auch für die Ellipse kann von einer Asymptoten-Chorde die Rede seyn, welche wir nach dieser Nummer leicht construiren können.

270. Im vorigen Paragraphen sind wir die geometrische Construction des, von y und x unabhängigen, Gliedes der allgemeinen Gleichung des zweiten Grades für den Fall noch schuldig geblieben, wo die bezügliche Curve keine Asymp-

Digitized by Google

toten hat und die zweite Axe derselben nicht begegnet. Folgende Bestimmung dieses Coefficienten ist keiner Beschränkung unterworfen. Setzen wir nemlich in der Gleichung:

$$\gamma y + \delta x + \epsilon = 0,$$

$x = 0$, so kommt:

$$\epsilon = -\gamma y,$$

also in Beziehung auf die 8. Figur, wo O der Anfangs-Punct der Coordinaten, OY die zweite Axe, und μ die Mitte der auf ihr interceptirten Chorde QQ' ist: Fig. 8.

$$\epsilon = O\mu . Ox. \qquad (1)$$

Wir haben hiernach ferner (256), welche Lage die durch den Punct O gehende gerade Linie auch haben mag:

$$OQ.OQ' = O\mu . Ox. \qquad (2)$$

nach welcher Gleichung wir, wenn die Puncte O, Q und Q' gegeben sind, sogleich den Punct x finden, d. h. wenn zwei Puncte einer Linie zweiter Ordnung bekannt sind, so können wir auf derjenigen geraden Linie, welche durch diese beiden Puncte geht, leicht den Punct bestimmen, in welchem dieselbe, von der Polaren jedes, beliebig auf ihr angenommenen, dritten Punctes geschnitten wird.

Wir können also auch, wenn irgend vier Puncte einer Linie zweiter Ordnung gegeben sind, die Polare jedes derjenigen drei Puncte bestimmen, in welchen die dreimal zwei geraden Linien, welche durch jene vier Puncte gehen, sich schneiden, z. B. wenn Q, Q', K, und K' die gegebenen Puncte sind, die Polare von O, des Durchschnittes von QQ' und KK'.

Wir können endlich, wenn fünf Puncte gegeben sind, beliebig viele Puncte derjenigen Linie zweiter Ordnung finden, die durch jene fünf Puncte geht. Wir erhalten z. B., wenn Q, Q', K, K' und G die gegebenen Puncte sind, einen sechsten Punct, wenn wir für O, den Durchschnitt von QQ' und KK', die Polare suchen, durch O und G eine gerade Linie legen, welche von jener Polaren in γ geschnitten wird, und endlich auf dieser geraden Linie einen Punct G' vermittelst folgender Gleichung:

$$OG\ OG' = O\nu . O\gamma,$$

welche der Gleichung (2) entspricht, construiren. ν bezeichnet die Mitte zwischen dem gegebenen Puncte G und dem gesuchten G'. Auf ähnliche Weise können wir so viele Puncte bestimmen, als wir wollen; wir brauchen hierzu im Ganzen nur zwei Polaren zu construiren.

Die angezeigte Construction erleidet nur unbedeutende Modificationen, wenn statt zwei oder vier der gegebenen fünf Puncte eine oder zwei Tangenten und auf denselben die Berührungs-Puncte gegeben sind.

171. Wir wollen in dieser Nummer die Bedingungs-Gleichung entwickeln, die Statt finden muſs, wenn eine gegebene Linie zweiter Ordnung:

$$y^2 + 2\alpha xy + \beta x^2 + 2\gamma y + 2\delta x + \epsilon = 0, \qquad (1)$$

von einer gegebenen geraden Linie:

$$y = ax + b, \qquad (2)$$

berührt werden soll. Die Gleichung der geraden Linie muſs, bei dieser Voraussetzung, die Form der 5. Gleichung der 267 Nummer:

$$(y'' + \alpha x'' + \gamma)y + (\alpha y'' + \beta x'' + \delta)x + \gamma y'' + \delta x'' + \epsilon = 0,$$

Digitized by Google

in der (y'',x'') einen Punct der Curve bezeichnet, annehmen können. Dieſs gibt uns folgende Gleichungen:

$$y''^2+2\alpha x''y''+\beta x''^2+2\gamma y''+2\delta x''+\epsilon = 0,$$

$$-a = \frac{\alpha y''+\beta x''+\delta}{y''+\alpha x''+\gamma}, \qquad -b = \frac{\gamma y''+\delta x''+\epsilon}{y''+\alpha x''+\gamma},$$

und wenn wir zwiseben diesen drei Gleichungen die nnbekannten Gröfsen y'' und x'' eliminiren, so erhalten wir die gesuchte Bedingungs-Gleichung.

Zu derselben Gleichung kommen wir leichter anf fulgendem Wege. Wenn wir nemlich die Gleichuug der Curve nnd der geraden Linie xusammenstellen, su erhalten wir im Allgemeinen zwei Werthe für jede der veränderlichen Gröfsen, die den beiden Durchschnitts-Puncten entsprechen. Die Werthe für x giht z. B. fulgende Gleichung:

$$(a^2+2a\alpha+\beta)x^2+2(ab+a\alpha b+a\gamma+\delta)x+b^2+2\gamma b+\epsilon = 0,$$

die wir erhalten indem wir den ans (2) genommenen Werth von y in (1) substituiren. Für den Fall der Berührung mufs diese Gleichung gleiche Wnrzeln haben; dieſs gibt uns folgende Bedingnngs-Gleichnng:

$$(ab+\alpha b+a\gamma+\delta)^2-(b^2+2\gamma b+\epsilon)(a^2+2a\alpha+\beta) = 0,$$

oder, wenn wir entwickeln, fulgende:

$$(\alpha^2-\beta)b^2+2(\delta-a\gamma)ab+2(a\delta-\beta\gamma)b+(\gamma^2-\epsilon)a^2+2(\gamma\delta-a\epsilon)a+(\delta^2-\beta\epsilon) = 0. \qquad (3)$$

272. Die letzte Gleicnng der vorigen Nummer verwandelt sich für den Fall, dafs die gerade Linie durch fulgende Gleichung gegeben ist:

$$pq+qx = pq,$$

in nachstehende Gleichnng:

$$(\alpha^2-\beta)p^2q^2-2(\delta-a\gamma)pq^2+2(a\delta-\beta\gamma)p^2q+(\gamma^2-\epsilon)q^2-2(\gamma\delta-a\epsilon)pq+(\delta^2-\beta\epsilon)p^2 = 0, \quad (4)$$

indem wir q für b nnd $\left(-\frac{q}{p}\right)$ für a substituiren und mit p^2 multipliciren.

Die Gleichung (4) stellt, indem wir q nnd p als veränderliche Gröfsen betrachten, im Allgemeinen eine Linie der vierten Ordnnng dar; diese Gleichnng reducirt aber anf den zweiten Grad, wenn folgende beiden Gleichungen zugleich Statt finden:

$$\gamma^2-\epsilon = 0, \qquad \delta^2-\beta\epsilon = 0, \qquad (5)$$

d. h. wenn die gegebene Curve von den beiden Coordinaten-Axen berührt wird (263). Alsdann erhalten wir nemlich, indem wir alle Glieder durch pq dividiren, und q nnd p mit y und x vertauschen:

$$(\alpha^2-\beta)xy-2(\delta-a\gamma)y+2(a\delta-\beta\gamma)x-2(\gamma\delta-a\epsilon) = 0: \qquad (6)$$

die Gleichnng einer Hyperbel, deren Asymptuten den beiden (die gegebene Curve berührenden) Coordinaten-Axen parallel sind. Die letzte Geichung geht in eine älnliche über, wenn wir in dieselbe $\frac{Y}{n}$ für y nnd $\frac{x}{1-n}$ für x substituiren (14). Wenn die gegebene Curve eine Hyperbel ist nnd wir dieselbe auf ihre Asymptoten beziehen und dem entsprechend:

$$xy+\epsilon = 0,$$

für ihre Gleichung nehmen, so verwandelt sich (6) in folgende Gleichnng:

$$xy+4\epsilon = 0,$$

und wenn wir $\frac{Y}{n}$ für y nnd $\frac{x}{1-n}$ für x substituiren, und $n=\frac{1}{2}$ nehmen, in die Gleichung der gegebenen Curve selbst, in:

$$xy+\epsilon = 0.$$

Digitized by Google

Alle diese Resultate sind leicht geometrisch zu deuten, das letzte z. B. heifst anders nichts als dafs jede von den beiden Asymptoten begränzte, die Hyperbel berührende, gerade Linie im Berührungs-Puncte halbirt wird.

273. Ist die gegebene Curve eine Parabel und also: Fig. 9.

$$\alpha^2-\beta=0, \qquad (7)$$

so geht die Gleichung (6) in eine lineare über, nemlich in folgende:

$$(\delta-\alpha\gamma)y-(\alpha\delta-\beta\gamma)x+\gamma\delta-\alpha\varepsilon=0.$$

Diese Gleichung ist da nach (5) und (7):

$$\frac{\alpha\delta-\beta\gamma}{\delta-\alpha\gamma}=\alpha, \qquad \frac{\gamma\delta-\alpha\varepsilon}{\delta-\alpha\gamma}=\gamma,$$

gleichbedeutend mit folgender:

$$y-\alpha x+\gamma=0, \qquad (8)$$

und da wiederum:

$$\alpha=\pm\frac{\delta}{\gamma}, \quad \gamma=\frac{\varepsilon}{\gamma},$$

und wir im Ausdrucke für α das negative Zeichen nehmen müssen, gleichviel ob wir vom Durchschnitte der Tangenten an, auf welche wir die Parabel beziehen, nach den Berührungen hin die positiven oder negativen y und x rechnen; so ist die 8. Gleichung identisch mit folgender:

$$\gamma y+\delta x+\varepsilon=0, \qquad (9)$$

mit der Gleichung der Polaren des Anfangs-Punctes der Coordinaten, d. h. der Berührungs-Chorde QP. Nehmen wir daher für die gerade Linie:

$$py+qx=pq,$$

die beliebige dritte Tangente MN, so liegt der vierte Winkel-Punct, S, desjenigen Parallelogrammes, dessen drei Winkel-Puncte in O, M und N fallen, auf der Berührungs-Chorde QP. Also:

Wenn eine Parabel und zwei feste an dieselbe gelegten Tangenten gegeben sind, so ist der Ort für die vierten Winkel-Puncte aller derjenigen Parallelogramme, deren drei Winkel-Puncte durch die Durchschnitte der beiden festen Tangenten unter sich und mit einer dritten beweglichen Tangente gegeben sind, eine gerade Linie; diejenige nemlich, welche die beiden Puncte, in welchen die Parabel von den festen Tangenten berührt wird, verbindet.

Wir können nach diesem Satze, wenn zwei gerade Linien gegeben sind, und auf jeder derselben ein Punct, beliebig viele Tangenten derjenigen Parabel bestimmen, welche die beiden gegebenen geraden Linien in den beiden gegebenen Puncten berührt.

Wenn drei Tangenten OP, OQ und MN gegeben sind, so können wir ferner für je zwei derselben einen Punct der Berührungs-Chorde, für OP und OQ z. B. den Punct S bestimmen, und diese Linie ist also bekannt, wenn überdiefs ein anderer Punct derselben gegeben ist.

Wenn vier gerade Linien gegeben sind, so können wir endlich beliebig viele Tangenten derjenigen Parabel, welche jene vier geraden Linien berührt, und auf diesen Tangenten die Berührungs-Puncte bestimmen. Seyen OP, OQ, MN und M'N' die vier gegebenen geraden Linien; alsdann können wir z. B. diejenigen Puncte finden, in welchen die beiden ersten derselben von der in

stehenden Parabel berührt werden, indem wir die beiden Puncte S und S', durch welche die Berührungs-Chorde geht, construiren. Nachdem diese beiden Berührungs-Puncte bestimmt sind, können wir beliebig viele Tangenten, und, ähnlich wie eben, auf jeder derselben den Berührungs-Punct bestimmen.

Fig. 10. 274. Wenn wir in der Gleichung (9) $2y$ für y und $2x$ für x substituiren, so geht dieselbe in folgende über:

$$2\gamma y+2\delta x+\varepsilon = 0,$$

also in die Gleichung der Tangente in demjenigen Puncte, in welchem die Parabel von dem durch den Anfangs-Punct der Coordinaten, d. h. durch den Durchschnitt der beiden festen Tangenten, gehenden Durchmesser geschnitten wird (261). Diese Tangente ist also (14) der geometrische Ort der Mitten der von den beiden festen Tangenten intercceptirten Stücke aller übrigen geraden Linien, welche die Parabel berühren.

Hiernach können wir wiederum, wenn vier gerade Linien gegeben sind, beliebig viele Tangenten derjenigen Parabel construiren, welche von den gegebenen Linien berührt wird. Sind OM, ON, MN und M'N' die vier gegebenen geraden Linien, so erhalten wir z. B. eine fünfte Tangente, indem wir eine gerade Linie durch die Mitten R und R' von MN und M'N' legen; und auf diese Weise können wir beliebig fortfahren, Tangenten zu construiren.

Beiläufig bemerken wir hier noch, dafs, für den Fall der Parabel, die Gleichung (4) sich auf den zweiten Grad reducirt, wenn eine der beiden Coordinaten-Axen die Parabel berührt, während die andere eine durchaus beliebige Lage hat.

275. Die Gleichung der Parabel nimmt eine symmetrische, bemerkenswerthe, Form an, wenn wir dieselbe auf irgend zwei ihrer Tangenten, als Coordinaten-Axen, beziehen. Zunächst geht nemlich die allgemeine Gleichung:

$$y^2+2\alpha xy+\beta x^2+2\gamma y+2\delta x+\varepsilon = 0,$$

vermittelst der drei Bedingungs-Gleichungen:

$$\alpha^2-\beta = 0, \quad \gamma^2-\varepsilon = 0, \quad \delta^2-\beta\varepsilon = 0,$$

in folgende über:

$$y^2-2\frac{\delta}{\gamma}xy+\frac{\delta^2}{\gamma^2}x^2+2\gamma y+2\delta x+\gamma^2 = 0.$$

(Wir nehmen hier wieder, wie in der 273. Nummer, $\left(-\frac{\delta}{\gamma}\right)$ für den Werth von α; $\frac{\delta}{\gamma} = \alpha$ entspricht einem Systeme zweier zusammenfallenden geraden Linien). Der letzten Gleichung können wir folgende Form geben:

$$(y+\frac{\delta}{\gamma}x+\gamma)^2 = 4\frac{\delta}{\gamma}xy,$$

und indem wir aus beiden Theilen derselben die Quadrat-Wurzel ziehen:

$$y+\frac{\delta}{\gamma}x+\gamma = 2\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}.$$

Diese Gleichung können wir folgendermaafsen schreiben:

$$y+2\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}+\frac{\delta}{\gamma}x = -\gamma,$$

Digitized by Google

und indem wir wiederum die Quadrat-Wurzel ausziehen:

$$y^{\frac{1}{2}}+\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}=(-\gamma)^{\frac{1}{2}},$$

Um diese Gleichung in Beziehung auf die Constanten symmetrisch zu machen, brauchen wir nur, was auch leicht *a priori* ersichtlich ist, statt δ die Abscisse des Berührungs-Punctes auf der ersten Axe einzuführen. Bezeichnen wir diese Abscisse, negativ genommen, durch ξ, so ist:

$$\xi=\frac{\delta}{\beta}=\frac{\gamma^2}{\delta},\qquad \text{mithin: } \delta=\frac{\gamma^2}{\xi}.$$

Hiernach verwandelt sich die letzte Gleichung in folgende:

$$y^{\frac{1}{2}}+\left(\frac{\gamma}{\xi}\right)^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}=(-\gamma)^{\frac{1}{2}},$$

und diese Gleichung können wir endlich noch unter folgenden beiden Formen schreiben:

$$(\xi y)^{\frac{1}{2}}+(\gamma x)^{\frac{1}{2}}=(-\gamma\xi)^{\frac{1}{2}},$$

$$\left(\frac{y}{\gamma}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\frac{x}{\xi}\right)^{\frac{1}{2}}=(-1)^{\frac{1}{2}}.$$

Damit der letzten Gleichung Genüge geschehen könne, müssen die beiden Glieder ihres ersten Theiles beide imaginär, also y und γ und x und ξ von entgegengesetzten Zeichen seyn, und hiernach bestimmt sich, in welchen der vier Coordinaten-Winkel die Parabel fällt. Wenn wir durch γ und ξ die Abstände der beiden Berührungs-Puncte vom Anfangs-Puncte, mit den ihnen zugehörigen Zeichen bestimmen, so erhalten wir statt der letzten beiden Gleichungen folgende:

$$(\xi y)^{\frac{1}{2}}+(\gamma x)^{\frac{1}{2}}=(\gamma\xi)^{\frac{1}{2}},$$

$$\left(\frac{y}{\gamma}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\frac{x}{\xi}\right)^{\frac{1}{2}}=1.$$

Hier ist nicht der Ort, an die Form dieser Gleichungen Entwicklungen anzuknüpfen. Für die Gleichung der Tangente in einem gegebenen Puncte der Curve, (y'',x''), erhalten wir, indem wir die letzten Gleichungen ähnlich behandeln, wie wir zu Anfang dieses Paragraphen die allgemeine Gleichung behandelt haben, folgende:

$$y-y''=\left(\frac{\xi y''}{\gamma x''}\right)^{\frac{1}{2}}(x-x'').$$

276. Wenn eine Linie zweiter Ordnung gegeben ist, so können wir, im Allgemeinen, zwei Tangenten an dieselbe legen, die einer gegebenen geraden Linie parallel sind. Diese beiden Tangenten sind durch die Richtung, welche dieselben haben sollen, und durch die Natur der Linie zweiter Ordnung, vollständig bestimmt und wir können daher offenbar das System derselben durch eine Gleichung des zweiten Grades ausdrücken, in welcher, als Constante, einzig die auf die gegebene Richtung sich beziehende Constante und die Constanten der Curve vorkommen, für deren Gleichung wir wieder folgende nehmen wollen:

$$y^2+2\alpha xy+\beta x^2+2\gamma y+2\delta x+\varepsilon=0.$$

Die Form der gesuchten Gleichung des Tangenten-Systems ist folgende:

$$(y-ax-b')(y-ax-b'')=0,$$

oder wenn wir entwickeln:

$$(y-ax)^2-(b'+b'')(y-ax)+b'b''=0. \qquad (1)$$

In diesen Gleichungen ist a als gegeben anzusehen, während b' und b'' noch zu bestim-

mende Grölsen sind. Die Gleichung (3) der 271. Nummer gibt unmittelbar zur Bestimmung derselben:

$$-(b'+b'') = 2\,\frac{(\delta-\alpha\gamma)a+(\alpha\delta-\beta\gamma)}{\alpha^2-\beta},$$

$$b'b'' = \frac{(\gamma^2-\epsilon)a^2+2(\gamma\delta-\alpha\epsilon)a+(\delta^2-\beta\epsilon)}{\alpha^2-\beta};$$

und hiernach verwandelt sich die Gleichung (1) in folgende:

$$(\alpha^2-\beta)(y-ax)^2+2((\delta-\alpha\gamma)a+(\alpha\delta-\beta\gamma))(y-ax)+((\gamma^2-\epsilon)a^2+2(\gamma\delta-\alpha\epsilon)a+(\delta^2-\beta\epsilon)) = 0. \quad (2)$$

Diefs ist also die gesuchte Gleichung des Systems zweier parallelen Tangenten, deren Richtung durch a gegeben ist. Diese Gleichung schliefst die Bedingung für die Möglichkeit der in Rede stehenden Tangenten in sich ein, die, im Allgemeinen, von der Möglichkeit der Curve und von der gegebenen Richtung abhängt. Für den Fall der Parabel reducirt sich der Grad der eben angezogenen Gleichung (2) der 271. Nummer in Beziehung auf b, es gibt nicht zwei parallele geraden Linien, welche die Parabel berühren. Wir erhalten:

$$2b = -\frac{(\gamma^2-\epsilon)a^2+2(\gamma\delta-\alpha\epsilon)a+(\delta^2-\beta\epsilon)}{(\delta-\alpha\gamma)a+(\alpha\delta-\beta\gamma)},$$

und mithin für die Gleichung der Tangente:

$$2((\delta-\alpha\gamma)a+(\alpha\delta-\beta\gamma))(y-ax)+((\gamma^2-\epsilon)a^2+2(\gamma\delta-\alpha\epsilon)a+(\delta^2-\beta\epsilon)) = 0. \quad (3)$$

Wenn die Gleichung der Parabel unter folgender Form erscheint:

$$y^2 = 2px,$$

so geht die Gleichung (271 (3)) in folgende über:

$$ab = \frac{p}{2},$$

Resultat, dessen geometrische Deutung einen bekannten Satz gibt. Der Gleichung (3) entspricht für diesen Fall folgende:

$$y = ax + \frac{p}{2a}. \quad (4)$$

277. Wir wollen uns in dieser Nummer damit beschäftigen, die Gleichung des Systems derjenigen beiden Tangenten, die an eine gegebene Linie zweiter Ordnung, von irgend einem gegebenen Puncte aus, gezogen werden können, zu entwickeln. Die Form der gesuchten Gleichung ist folgende:

$$((y-y')-a'(x-x'))((y-y')-a''(x-x')) = 0, \quad (5)$$

wo (y', x') der gegebene Punkt ist, und a' und a'' noch zu bestimmen übrig bleiben. Zu diesem Behufe wollen wir wieder zu der End-Gleichung der 271. Nummer zurückgehen. Wenn wir nemlich für die Form der gegebenen geraden Linie, welche die gegebene Curve berühren soll, folgende nehmen:

$$y-y' = a(x-x'),$$

so geht die eben erwähnte Gleichung, indem wir (y'+ax') für b substituiren, in folgende über:

$$((\alpha^2-\beta)x'^2-2(\delta-\alpha\gamma)x'+(\gamma^2-\epsilon))a^2+2(-(\alpha^2-\beta)x'y'+(\delta-\alpha\gamma)y'-(\alpha\delta-\beta\gamma)x'+(\gamma\delta-\alpha\epsilon))a$$
$$+((\alpha^2-\beta)y'^2+2(\alpha\delta-\beta\gamma)y'+(\delta^2-\beta\epsilon)) = 0. \quad (6)$$

Bezeichnen wir die Wurzeln dieser Gleichung durch a' und a'', so haben wir:

$$-(a'+a'') = 2\,\frac{-(\alpha^2-\beta)x'y'+(\delta-\alpha\gamma)y'-(\alpha\delta-\beta\gamma)x'+(\gamma\delta-\alpha\epsilon)}{(\alpha^2-\beta)x'^2-2(\delta-\alpha\gamma)x'+(\gamma^2-\epsilon)},$$

$$a'a'' = \frac{(\alpha^2-\beta)y'^2+2(\alpha\delta-\beta\gamma)y'+(\delta^2-\beta\epsilon)}{(\alpha^2-\beta)x'^2-2(\delta-\alpha\gamma)x'+(\gamma^2-\epsilon)},$$

Digitized by Google

Die Gleichung (5) hat, entwickelt, folgende Form:

$$(y-y')^2-(a'+a'')(x-x')(y-y')+a'a''(x-x')^2=0,$$

und wenn wir für $(a'+a'')$ und $a'a''$ die eben gefundenen Werthe substituiren, so erhalten wir als gesuchte Gleichung folgende:

$$((\alpha^2-\beta)x'^2-2(\delta-\alpha\gamma)x'+(\gamma^2-\varepsilon))(y-y')^2+2(-(\alpha^2-\beta)x'y'+(\delta-\alpha\gamma)y'-(\alpha\delta-\beta\gamma)x'+(\gamma\delta-\alpha\varepsilon))$$
$$.(x-x')(y-y')+((\alpha^2-\beta)y'^2+2(\alpha\delta-\beta\gamma)y'+(\delta^2-\beta\varepsilon))(x-x')^2=0,$$

die wir auch folgendermaafsen ordnen können:

$$(\gamma^2-\varepsilon)(y-y')^2+(\alpha^2-\beta)(xy'-x'y)^2+2(\delta-\alpha\gamma)(y-y')(xy'-x'y)+2(\alpha\delta-\beta\gamma)(x-x')(xy'-x'y)$$
$$+2(\gamma\delta-\alpha\varepsilon)(x-x')(y-y')+(\delta^2-\beta\varepsilon)(x-x')^2=0. \quad (7)$$

Für die Fälle, wo die allgemeine Gleichung der Linien zweiter Ordnung unter folgenden speciellen Formen erscheint:

$$A^2y^2+B^2x^2=A^2B^2,$$
$$A^2y^2-B^2x^2=\pm A^2B^2,$$
$$y^2=2px,$$

leiten wir aus der Gleichung (7) folgende Gleichungen her:

$$A^2(y-y')^2-(xy'-xy')^2+B^2(x-x')^2=0, \quad (8)$$
$$\mp A^2(y-y')^2-(xy'-x'y)^2\pm B^2(x-x')^2=0, \quad (9)$$
$$2(y-y')(xy'-x'y)-p(x-x')^2=0. \quad (10)$$

Der Vortheil, den wir aus diesen Entwicklungen ziehen können, wird später recht augenscheinlich werden.

Wir hätten unmittelbar aus der Gleichung (6) zu den Gleichungen (2) und (7) übergehen können; wir erhalten nemlich die Gleichung des Systems zweier parallelen Tangenten, deren Richtung durch a angezeigt wird, indem wir blofs in (6) y' und x' als veränderliche Gröfsen betrachten; die Gleichungen (2) und (6) sind, abgesehen von den Accenten, identisch. Wir erhalten die Gleichung des Systems zweier Tangenten, die durch einen gegebenen Punct (y', x') gehen, mithin die Gleichung (7), indem wir in (6) für a substituiren:

$$\frac{y-y'}{x-x'}.$$

278. Wir knüpfen an diesen Paragraphen schliefslich noch folgende Entwicklung. Wenn wir voraussetzen, dafs die Gleichung irgend einer Linie zweiter Ordnung:

$$y^2+2\alpha xy+\beta x^2+2\gamma y+2\delta x+\varepsilon=0, \quad (1)$$

auf zwei Tangenten als Coordinaten-Axen bezogen sey, und die beiden Gleichungen:

$$py+qx=pq, \quad (2)$$
$$p'y+q'x=p'q',$$

eine dritte und vierte Tangente darstellen sollen, so haben wir folgende beiden Bedingungs-Gleichungen:

$$(\alpha^2-\beta)pq-2(\delta-\alpha\gamma)q+2(\alpha\delta-\beta\gamma)p-2(\gamma\delta-\alpha\varepsilon)=0,$$
$$(\alpha^2-\beta)p'q'-2(\delta-\alpha\gamma)q'+2(\alpha\delta-\beta\gamma)p'-2(\gamma\delta-\alpha\varepsilon)=0.$$

Ziehen wir diese beiden Gleichungen von einander ab, so kommt:

$$(\alpha^2-\beta)(pq-p'q')-2(\delta-\alpha\gamma)(q-q')+2(\alpha\delta-\beta\gamma)(p-p')=0,$$

und wenn wir alle Glieder dieser Gleichung durch $(\alpha^2-\beta)$ dividiren, und

$$\frac{\delta-\alpha\gamma}{\alpha^2-\beta}=x,\quad \frac{\alpha\delta-\beta\gamma}{\alpha^2-\beta}=y,$$

setzen, so ergibt sich:

$$2(p-p')y-2(q-q')x+pq-p'q'=0. \quad (3)$$

(y, x) bedeutet den Mittelpunkt der durch (1) dargestellten Linie zweiter Ordnung, und da in der letzten Gleichung die Constanten der Gleichung (1) nicht mehr vorkommen, so bezeichnet dieselbe, indem wir y und x als veränderliche Gröfsen betrachten, den geometrischen Ort für die Mittelpuncte aller Linien zweiter Ordnung, welche von den beiden, zu Coordinaten-Axen genommenen, und den beiden durch (2) dargestellten geraden Linien berührt werden. Dieser Ort ist also eine gerade Linie. Wir sehen sogleich aus der Form der Gleichung (3), dafs die bezügliche gerade Linie durch die beiden Puncte:

$$\left(\frac{\mathfrak{P}}{2}, \frac{\mathfrak{P}'}{2}\right) \text{ und } \left(\frac{\mathfrak{P}'}{2}, \frac{\mathfrak{P}}{2}\right)$$

geht. Diese Punkte sind aber offenbar die Mitten zweier Diagonalen der, von den vier Tangenten gebildeten, vollständigen vierseitigen Figur. Wir können also leicht die in Rede stehende gerade Linie construiren; und es ist hierbei einerlei, welche beiden der drei Diagonalen der vierseitigen Figur wir nehmen (eine schickliche Wahl zweier andern Tangenten zu Coordinaten-Axen hätte uns zu zweien andern Diagonalen geführt); woraus denn folgt, dafs die Mitten der drei Diagonalen jeder vollständigen vierseitigen Figur in gerader Linie liegen, und somit haben wir folgenden, von Newton herrührenden, Satz bewiesen:

Die Mittelpunkte aller Linien zweiter Ordnung, welche vier feste gerade Linien berühren, liegen auf derjenigen geraden Linie, welche durch die Mitten der Diagonalen der, von den festen geraden Linien gebildeten, vollständigen vierseitigen Figur geht.

Es ist offenbar, dafs die Gleichung (3) der eben construirten geraden Linie auch ein Durchmesser derjenigen Parabel ist, welche die vier festen geraden Linien berührt.

Nach dem eben bewiesenen Satze können wir, wenn fünf gerade Linien gegeben sind, den Mittelpunct derjenigen Curve zweiter Ordnung finden, welche die gegebenen fünf geraden Linien berührt. Durch diese Linien sind nemlich fünf verschiedene vierseitige Figuren bestimmt, und wir können also fünf gerade Linien construiren, die alle fünf sich im gesuchten Mittelpunkte vereinigen.

§. 5.

Zusammenstellung ähnlicher Linien zweiter Ordnung.

279. Wir haben schon in dem Früheren solche Linien zweiter Ordnung, die, auf dasselbe Coordinaten-System bezogen, durch Gleichungen dargestellt werden, in denen die drei ersten Glieder übereinstimmend sind, ähnliche und ähnlich liegende genannt. Der Kürze des Ausdrucks halber, wollen wir in diesem Paragraphe unter „ähnlichen Curven" durchgehends solche verstehen, die zugleich eine ähnliche Lage haben. Zwei Gleichungen von folgender Form:

$$y^2 + 2\alpha xy + \beta x^2 + 2\gamma y + 2\delta x + \varepsilon = 0, \qquad (1)$$
$$y^2 + 2\alpha xy + \beta x^2 + 2\gamma' y + 2\delta' x + \varepsilon' = 0,$$

bezeichnen nach unserer Definition, wie wir auch γ, δ, ε und γ', δ', ε' bestimmen mögen, ähnliche Curven. Es ordnen sich demgemäfs ein Punct und imaginäre Curven mit ähnlichen Ellipsen zusammen. Alle solche Hyperbeln, deren Asymptoten parallel

Digitized by Google

sind, sind unter einander ähnlich, und ein System irgend zweier den Asymptoten parallelen geraden Linien, ist als eine ähnliche Hyperbel anzusehen. Da wir aus der allgemeinen Gleichung des zweiten Grades für den besondern Fall, dafs dieselbe eine Parabel darstellt, immer das zweite und dritte Glied zugleich durch Aenderung der Coordinaten-Richtung wegbringen können, so kommt bei der Aehnlichkeit der Parabeln Alles nur auf die Lage derselben an; Parabeln sind ähnlich, sobald die Richtung der Durchmesser dieselbe ist. Mit ähnlichen Parabeln gehören Systeme irgend zweier Durchmesser derselben, die auch zusammenfallen und imaginär werden können, als ähnliche Linien zweiter Ordnung zusammen.

Wenn wir die beiden Gleichungen (1), durch welche wir irgend zwei beliebige ähnliche Curven — diese Curven mögen reell seyn oder nicht — darstellen, von einander abziehen, so erhalten wir:

$$(\gamma-\gamma')y+(\delta-\delta')x+(\varepsilon-\varepsilon')=0: \qquad (3)$$

die Gleichung einer geraden Linie, die wir leicht construiren können. Dieser geraden Linie geben wir, ganz allgemein, den Namen: Chordale der beiden ähnlichen Linien zweiter Ordnung. Im Falle reeller Durchschnitte der Curven, deren es, der linearen Form der Gleichung (2) wegen, nur zwei geben kann, ist die Chordale der beiden Curven ihre gemeinschaftliche Chorde.

Auf diese Weise ist eine Reihe von Beziehungen angedeutet, die denjenigen entsprechen, bei welchen wir im zweiten Abschnitte umständlich verweilt haben: denn auch alle beliebige Kreise in derselben Ebene sind als ähnliche Curven anzusehen. In den nächsten Erörterungen wollen wir nur Einzelnes hervorheben und auch hier möglichst kurz seyn.

280. Die folgenden beiden Gleichungen bezeichnen zwei ähnliche Linien zweiter Ordnung:

$$y^2+2\alpha xy+\beta x^2+2\gamma y+2\delta x+\varepsilon=0, \qquad (1)$$

$$(y-y')^2+2\alpha(x-x')(y-y')+\beta(x-x')^2=0, \qquad (2)$$

wo wir durch (y', x') irgend einen gegebenen Punkt bezeichnen. Für die Chordale erhalten wir durch Abziehen folgende Gleichung:

$$2(y'+\alpha x'+\gamma)y+2(\alpha y'+\beta x'+\delta)x-y'^2-2\alpha x'y'-\beta x'^2+\varepsilon=0. \qquad (3)$$

Wenn die Gleichung (1) eine Hyperbel darstellt, so bezeichnet (2) ein System zweier geraden Linien, die den Asymptoten der Hyperbel parallel sind, und durch den Punct (y', x') gehen. Nehmen wir in der 5. Figur O für diesen Punct, so sind durch (2) die beiden geraden Linien OM und OM' gegeben und MM' ist also die durch (3) dargestellte Chordale. Wenn der Punkt O der Curve immer näher rückt, indem er etwa immer auf OM bleibt, so nähert sich M', der Durchschnitt der zweiten geraden Linie OM' mit der Hyperbel, immer mehr dem Puncte M, und wenn endlich der Punct O oder (y', x') auf der Hyperbel selbst angenommen wird, so geht die Chordale MM' in die Tangente im Puncte (y', x') über, und diese Tangente wird alsdann durch die Gleichung (3) dargestellt. Fig. 5.

Wenn die Gleichung (1) eine Parabel darstellt, so bezeichnet (2) ein System zweier zusammenfallenden Durchmesser, die durch den gegebenen, beliebigen Punct (y', x') gehen, und (3) stellt also die Tangente in demjenigen Puncte dar, wo die Curve von diesen Durchmessern geschnitten wird. Wir erhalten allgemein die Gleichung einer geraden Linie, die in irgend zweien gegebenen Puncten, M und M', eine gegebene Parabel schnei- Fig. 6.

Digitized by Google

det, wenn wir die Gleichung des Systems derjenigen beiden Durchmesser, die durch die Puncte M und M' gehen, von der Gleichung der Parabel abziehen. Für die Gleichung eines solchen Systems von zwei Durchmessern können wir folgende nehmen:

$$(y-y')(y-y'')+\alpha((x-x')(y-y'')+(x-x'')(y-y'))+\beta(x-x')(x-x'')=0,$$

wo (y',x') und (y'',x'') irgend zwei Puncte der beiden Durchmesser bedeuten. Die letzte Gleichung geht in die Gleichung (2) über, wenn wir $y''=y'$ und $x''=x'$ nehmen, und dem entsprechend geht die Secante MM' über in die Tangente in M, wenn auf dem, durch diesen Punct gehenden, Durchmesser der Punct (y',x') liegt.

Wenn die Gleichung (1) eine Ellipse darstellt, so bezeichnet (2) den einzelnen Punct (y',x'). Liegt dieser Punct auf der Ellipse, so muſs die durch (3) dargestellte gerade Linie nothwendig durch diesen Punct gehen, eben weil derselbe zugleich ein Punct der Ellipse ist, darf aber mit dieser letztern weiter keinen Punct mehr gemein haben: diese Linie ist also wiederum eine Tangente im gegebenen Puncte (y',x').

Wenn der Punct (y',x') auf der durch (1) gegebenen Curve liegt, so ergibt sich folgende Bedingungs-Gleichung zwischen y' und x':

$$y'^2+2\alpha x'y'+\beta x'^2+2\gamma y'+2\delta x'+\varepsilon=0,$$

und hiernach reducirt sich die Gleichung (3), wenn wir zugleich, um den Fall, wo der Punct (y',x') auf der Curve liegt, zu unterscheiden, denselben durch (y'',x'') bezeichnen, auf folgende Gleichung:

$$(y''+\alpha x''+\gamma)y+(\alpha y''+\beta x''+\delta)x+\gamma y''+\delta x''+\varepsilon=0:$$

dieselbe Gleichung, die wir früher schon für die Gleichung der Tangente im Puncte (y'',x'') gefunden haben (267). *)

---

*) Die im Texte entwickelte Tangenten-Methode für Linien zweiter Ordnung erleidet Modificationen, wenn wir sie auf Linien höherer Ordnung ausdehnen wollen. Sey

$$y^3+\alpha xy^2+\beta x^2y+\gamma x^3+\delta y^2+\varepsilon xy+\varkappa x^2+\lambda y+\xi x+\tau=0, \qquad (a)$$

die allgemeine Gleichung des dritten Grades. Wir wollen, um kurz zu seyn und um zugleich die Ideen zu fixiren, annehmen, die drei Asymptoten der Curve seyen alle drei reell. Alsdann stellt (267, Note) folgende Gleichung:

$$(y-y')^3+\alpha(x-x')(y-y')^2+\beta(x-x')^2(y-y')+\gamma(x-x')^3=0, \qquad (b)$$

das System dreier geraden Linien dar, die den Asymptoten parallel sind und durch irgend einen beliebig angenommenen Punct (y',x') gehen. Ziehen wir die beiden Gleichungen (a) und (b) von einander ab, so erhalten wir eine Gleichung des zweiten Grades. Wir sehen hieraus, daſs die beiden durch (a) und (b) dargestellten geometrischen Oerter sich im Allgemeinen in $2.3=6$ Puncten schneiden, und daſs diese sechs Puncte auf derselben Linie zweiter Ordnung liegen. Wird der Punct (y',x') auf der Curve (a) angenommen, so vereinigen sich drei der sechs Durchschnitts-Puncte in einen einzigen: die durch die resultirende Gleichung des zweiten Grades dargestellte Curve oskulirt die gegebene Curve des dritten Grades.

Wenn wir die allgemeine Gleichung des m. Grades betrachten, deren mit der höchsten Potenz behafteten Glieder folgende seyn mögen:

$$y^m+\alpha xy^{m-1}+\beta x^2y^{m-2}+\ldots+\varkappa x^{m-1}y+\lambda x^m, \qquad (c)$$

so erhalten wir eine Gleichung des $(m-1)$. Grades, wenn wir von derselben folgende Gleichung:

$$(y-y')^m+\alpha(x-x')(y-y')^{m-1}+\beta(x-x')^2(y-y')^{m-2}+\ldots+\varkappa(x-x')^{m-1}(y-y')+\lambda(x-x')^m=0.$$

231. Wenn die Gleichungen irgend zweier ähnlichen Curven zweiter Ordnung gegeben sind, so erhalten wir alle möglichen Curven, welche mit diesen dieselbe Chordale haben, indem wir ihre Gleichungen auf beliebige Weise zu einer Gleichung desselben Grades verbinden. Zu diesem Ende brauchen wir nur die beiden gegebenen Gleichungen, für welche wir folgende nehmen wollen:

$$y^2+2\alpha xy+\beta x^2+2\gamma y+2\delta x+\varepsilon = 0, \qquad (1)$$
$$y^2+2\alpha xy+\beta x^2+2\gamma' y+2\delta' x+\varepsilon' = 0,$$

zu addiren, nachdem wir eine derselben, etwa die zweite, mit einem unbestimmten Factor μ multiplicirt haben. Auf diese Weise erhalten wir, indem wir zugleich durch $(1+\mu)$ alle Glieder dividiren:

$$y^2+2\alpha xy+\beta x^2+2\frac{\gamma+\mu\gamma'}{1+\mu}y+2\frac{\delta+\mu\delta'}{1+\mu}x+\frac{\varepsilon+\mu\varepsilon'}{1+\mu} = 0. \qquad (2)$$

Statt die Gleichungen der beiden Curven zu verbinden, hätten wir auf gleiche Weise auch die Gleichung einer derselben mit der Gleichung ihrer Chordalen:

$$2(\gamma-\gamma')y+2(\delta-\delta')x+(\varepsilon-\varepsilon') = 0, \qquad (3)$$

---

abzieht. Diese letzte Gleichung stellt ein System von m geraden Linien dar, die den Asymptoten der Curve des m. Grades parallel sind, und alle im Puncte (y', x') sich vereinigen. Diese m geraden Linien schneiden die Curve des m. Grades im Allgemeinen in $m(m-1)$ Puncten und diese $m(m-1)$ Puncte liegen auf ein und derselben Linie der $(m-1)$. Ordnung, deren Gleichung man durch Abziehen erhält. In dem Falle, wo der Punct (y', x') auf der Curve des m. Grades selbst angenommen wird, wird dieselbe von der eben bestimmten Curve des $(m-1)$. Grades $(m-1)$ punctig oscolirt, und überdiefs noch in $(m-1)^2$ Punkten geschnitten; diese Durchschnitts-Puncte können sich zu neuen Osculations-Puncten verschiedener Ordnung vereinigen, was z. B. in dem Falle geschieht, dafs der Ausdruck (r) sich in mehrere gleiche Factoren des ersten Grades zerlegen läfst.

Wir wollen noch die Gleichung eines beliebigen Grades betrachten, in welcher das constante Glied fehlt, und dieselbe kurz auf folgende Weise bezeichnen:

$$A_m+A_{m-1}+A_{m-2}+\ldots\ldots+A_3+A_2+A_1 = 0, \qquad (d)$$

indem wir uns in A_m alle Glieder zusammengezogen denken, in denen y und x in der m. Potenz vorkommen, in A_{m-1} alle Glieder, in welchen diese Gröfsen in der $(m-1)$. Potenz vorkommen, und so fort. Alsdann wird die Curve (d) von folgender:

$$A_{m-1}+A_{m-2}+\ldots\ldots+A_3+A_2+A_1 = 0, \qquad (e)$$

$(m-1)$ punctig osculirt; (d) und (e) werden von:

$$A_{m-2}+\ldots\ldots+A_3+A_2+A_1 = 0, \qquad (f)$$

$(m-2)$ punctig osculirt und so fort. (d), (e), (f) und alle vorhergehenden werden von:

$$A_3+A_2+A_1 = 0, \qquad (g)$$

4punctig; (d), (e), (f) . . . (g) von:

$$A_2+A_1 = 0, \qquad (h)$$

3punctig osculirt und endlich (d), (e), (f) . . (g) und (h) von der geraden Linie:

$$A_1 = 0,$$

einfach berührt.

verbinden können. Wir sehen aus der Form der Gleichung (2) — in welcher das mit der ersten Potenz von x oder y behaftete Glied verschwindet, wenn das entsprechende Glied in den ursprünglich gegebenen Gleichungen (1) fehlt — dafs die Mittelpuncte aller, in Rede stehenden, Curven in gerader Linie liegen. Diese gerade Linie wollen wir als zweite Axe nehmen, und überdiefs die Richtung der ersten Axe so bestimmen, dafs α verschwindet. Alsdann erhalten die Gleichungen (1) folgende Form:

$$y^2+\beta x^2+2\gamma y+\epsilon = 0, \qquad (4)$$
$$y^2+\beta x^2+2\gamma' y+\epsilon' = 0,$$

und für die Gleichung der Chordalen erhalten wir nachstehende:

$$2(\gamma-\gamma')y+(\epsilon-\epsilon') = 0; \qquad (5)$$

woraus wir zunächst sehen, dafs die Chordale denjenigen Durchmessern der gegebenen Curven parallel ist, deren zugeordnete in die zweite Axe fallen. Wenn wir die Chordale selbst zur ersten Axe nehmen, so gibt uns die letzte Gleichung folgende Bedingungs-Gleichung zwischen den Constanten:

$$\epsilon - \epsilon' = 0.$$

Bei einer solchen Axen-Bestimmung geht die Gleichung (2) in folgende über:

$$y^2+\beta x^2+2\frac{\gamma+\mu\gamma'}{1+\mu}y+\epsilon' = 0. \qquad (6)$$

Soll diese Gleichung ein System zweier geraden Linien ausdrücken, so mufs dieselbe, durch eine schickliche Annahme des unbestimmten Coefficienten μ, folgende Form annehmen können:

$$(y-y')^2+\beta x^2 = 0,$$

wo zugleich das Zeichen von β bestimmt, ob wir wirklich zwei reelle gerade Linien erhalten, die sich im Puncte $(y', 0)$ schneiden, oder nur einen Punct $(y', 0)$. Die Vergleichung der letzten beiden Gleichungen gibt:

$$\frac{\gamma+\mu\gamma'}{1+\mu} = -y', \quad \epsilon = y'^2, \qquad (7)$$

und hieraus erhalten wir zur Bestimmung von μ folgende Gleichung:

$$(y'^2-\epsilon)\mu^2+2\mu(\gamma\gamma'-\epsilon)+(\gamma^2-\epsilon) = 0. \qquad (8)$$

Diese Gleichung gibt, im Allgemeinen, zwei Werthe für μ, die, wie die Werthe von y', nur dann reell sind, wenn ϵ positiv ist. Ob ϵ positiv oder negativ ist, wird durch die Lage des Anfangs-Punctes der Coordinaten und die Richtung der zweiten Axe bestimmt. Wenn die beiden Gleichungen (4) Ellipsen darstellen, so liegt, wenn ϵ und ϵ' positiv seyn sollen, der Anfangs-Punct nothwendig aufserhalb beider Curven, und da überdiefs die zweite Axe durch die Mittelpuncte derselben geht, und die erste Axe denjenigen Durchmessern parallel ist, welche den, in die zweite Axe fallenden, zugeordnet sind, so begegnet die erste Axe, oder, mit anderen Worten, die Chordale, keiner der beiden Ellipsen, die also auch in diesem Falle einander nicht schneiden. Nur unter dieser Bedingung gehören in die Zahl derjenigen Oerter zweiter Ordnung, die mit den beiden gegebenen Ellipsen dieselbe Chordale haben, zwei Puncte, und diese Puncte liegen alsdann zu beiden Seiten der Chordalen gleich weit von derselben entfernt. ϵ ist immer positiv, und also sind die Werthe von y' reell, wenn die beiden durch (4) gegebenen Curven imaginär sind.

Fig. 11. Wenn die beiden Gleichungen (4) Hyperbeln darstellen, so mufs, damit ϵ und ϵ' positiv seyen, die zweite Axe entweder keine der beiden Hyperbeln schneiden, oder beide in solchen zwei Puncten, die nach derselben Seite des Anfangs-Punctes der Coordinaten

Digitized by Google

hin liegen, oder endlich diese Axe mufs der einen Hyperbel gar nicht und der andern in zwei nach derselben Seite des Anfangs-Punctes hin liegenden Puncten begegnen. In den beiden ersten Fällen liegen die beiden Hyperbeln in entsprechenden Asymptoten-Winkeln, in dem dritten Falle nicht. Auf diesen letzten Fall bezieht sich die 11. Figur, in der sich die Asymptoten der einen Hyperbel in C, die Asymptoten der andern in C' schneiden. In allen Fällen begegnet, nach den früheren Bestimmungen, die erste Axe beiden Curven, woraus dann ersichtlich ist, dafs je zwei beliebige Hyperbeln, deren Asymptoten parallel sind, sich immer in zwei reellen Puncten schneiden. Durch diese beiden Puncte können wir zwei Systeme von zwei geraden Linien legen, die den Asymptoten parallel sind, und deren Gleichungen in der allgemeinen Gleichung (6) enthalten sind. Für den Fall der 11. Figur ist MN die Chordale; MQ und NQ, MR und NR sind die beiden Systeme, und Q und R die Durchschnitts-Coordinaten der beiden Linien jedes Systems. Diese Durchschnitte fallen in die zweite Coordinaten-Axe, d. h. in diejenige gerade Linie, die durch C und C' geht.

Die Gleichung (8) reducirt sich nur dann auf den **ersten Grad**, wenn eine der folgenden beiden Gleichungen Statt findet:

$$\gamma^2 - \varepsilon = 0, \quad \gamma'^2 - \varepsilon = \gamma'^2 - \varepsilon' = 0;$$

also nur in dem Falle, dafs ursprünglich schon eine der beiden Gleichungen (4), je nachdem β positiv oder negativ ist, einen Punct oder ein System zweier geraden Linien bezeichnet. Wenn also die Gleichungen (4) eine Ellipse und einen Punct ausdrücken, so lassen sich dieselben immer noch zu der Gleichung eines zweiten Punctes verbinden.

Die Gleichung der Tangente in irgend einem Puncte (y'', x'') der, durch eine der Gleichungen (4), etwa durch die erste derselben, dargestellten, Ellipsen oder Hyperbeln ist folgende:

$$(y''+\gamma)y + \beta x''x + \gamma y'' + \varepsilon = 0.$$

Setzen wir, um den Durchschnitt dieser Tangente mit der zweiten Axe zu bestimmen, in der letzten Gleichung $x = 0$, so kommt:

$$y''y + \gamma(y''+y) + \varepsilon = 0.$$

Diese Gleichung, welche in Beziehung auf y'' und y symmetrisch ist, wird befriedigt, wenn wir für y'' und y die Wurzeln der Gleichung:

$$y'^2 - \varepsilon = 0,$$

nehmen. Hieraus erhellet, dafs zwischen den beiden Puncten, zu deren Gleichungen sich die Gleichungen zweier ähnlichen Ellipsen verbinden lassen, so wie zwischen den Durchschnitten der geraden Linie zweier Systeme, deren Gleichungen durch Verbindung der Gleichungen zweier Hyperbeln, deren Asymptoten parallel sind, sich ergeben: dieselbe Beziehung Statt findet, als zwischen irgend einem gegebenen Puncte und der Mitte derjenigen Chorde, welche auf einer beliebigen der beiden Curven die Puncte verbindet, in welchen dieselbe von den, durch den gegebenen Punct gehenden, Tangenten berührt wird. Die eben bezeichneten Puncte sind **zugeordnete Pole für jede der beiden gegebenen Curven und für jede andere, ihnen ähnliche, welche dieselbe Chordale hat.**

In der 11. Figur sind Q und R die beiden zugeordneten Pole für jede der beiden Hyperbeln C und C'; diese Pole liegen beide aufserhalb der Hyperbel C, während einer derselben, Q, innerhalb, der andere, R, aufserhalb der Hyperbel C' liegt. Ziehen wir von Q aus Tangenten an C und C', so liegen die vier Berührungs-Puncte, V, U, V' und U',

in gerader Linie, und diese gerade Linie geht durch R; von R aus können wir nur an C Tangenten legen, die entsprechende Berührungs-Chorde WZ geht durch Q.

Wenn eine der Gleichungen (4) schon einen Punct oder ein System zweier sich schneidenden geraden Linien bedeutet, so erhalten wir durch eine gehörige Verbindung dieser Gleichungen im ersten Falle die Gleichung des zugeordneten Poles, in dem zweiten die Gleichung eines neuen Systems zweier geraden Linien, die sich in einem Puncte schneiden, der der zugeordnete Pol des Durchschnittes der Linien des ersten Systems ist.

Wenn man irgend ein Parallelogramm beschreibt, dessen Seiten den Asymptoten einer gegebenen Hyperbel parallel sind, und dessen zwei Winkel-Puncte auf der Hyperbel sich befinden, so sind die beiden übrigen Winkel-Puncte des Parallelogrammes zugeordnete Pole. Man kann hiernach leicht für irgend einen gegebenen Punct den zugeordneten Pol construiren, wenn die Richtung der Asymptoten bekannt ist.

Die Polare eines Punctes ist der Chordalen parallel und geht durch den zugeordneten Pol desselben.

Die Chordale zweier Puncte halbirt diejenige gerade Linie, welche diese Puncte verbindet; ihre Richtung hängt, wenn wir die beiden Puncte durch die Gleichungen (4) ausdrücken, von dem Coefficienten β ab, oder mit anderen Worten, von der Natur und der gegenseitigen Lage der beiden ähnlichen Ellipsen, die, ihren Character bis zum Verschwinden beibehaltend, auf jene Puncte sich reducirt haben.

Die Chordale zweier Systeme von zwei sich schneidenden geraden Linien, die ein Parallelogramm bilden, ist eine Diagonale dieses Parallelogrammes.

282. Für die Gleichungen zweier Parabeln, deren Durchmesser parallel sind, können wir folgende nehmen:

$$y^2 + 2\gamma y + 2\delta x + \varepsilon = 0,$$
$$y^2 + 2\gamma' y + 2\delta' x + \varepsilon' = 0.$$

Diese beiden Gleichungen können wir nur auf eine einzige Weise zu der Gleichung eines Systems von zwei geraden Linien verbinden. Wir müssen zu diesem Ende x eliminiren, und erhalten, indem wir demzufolge beide Gleichungen von einander abziehen, nachdem wir zuvor die erste mit δ', die zweite mit δ multiplicirt haben, folgende Gleichung:

$$(\delta' - \delta)y^2 + (\delta'\gamma - \delta\gamma')y + \delta'\varepsilon - \delta\varepsilon' = 0.$$

Die durch diese Gleichung bezeichneten geraden Linien sind zwei Durchmesser, die aber auch in einen einzigen zusammenfallen und imaginär seyn können. Den verschiedenen Fällen entspricht, dafs die beiden Parabeln sich schneiden, berühren oder keinen Punct gemein haben.

Für jede von zwei ähnlich liegenden Parabeln sind zugeordnete Pole je zwei Puncte, die auf einem beliebigen der durch die Durchschnitte der Parabeln gehenden Durchmesser sich befinden, und gleich weit von dem Scheitel dieses Durchmessers abstehen.

283. Wir wollen in dieser Nummer drei ähnliche Linien zweiter Ordnung zusammenstellen, und die Gleichung derselben kurz auf folgende Weise bezeichnen:

$$A = 0, \quad A' = 0, \quad A'' = 0, \qquad (1)$$

Alsdann erhalten wir für die Chordalen je zweier derselben folgende Gleichungen des ersten Grades:

$$A - A' = 0, \quad A - A'' = 0, \quad A' - A'' = 0, \qquad (2)$$

von denen irgend zwei die dritte bedingen. Es schneiden sich also die eben bezeichneten drei Chordalen in ein und demselben Puncte, den wir „den Chordal-Punct der drei ähnlichen Linien zweiter Ordnung“ nennen *).

Für die durch (1) dargestellten Curven können wir drei Ellipsen nehmen, oder auch statt einer oder zwei derselben, oder statt aller drei, Puncte. Wir können ferner drei Parabeln nehmen, und erhalten auch dann noch ein geometrisches Resultat, wenn wir eine derselben mit einem Systeme zweier Durchmesser, die auch in einen einzigen zusammenfallen können, vertauschen. Wir können endlich auch drei Hyperbeln zusammenstellen und beliebig statt derselben Systeme von zwei, den Asymptoten parallelen, geraden Linien nehmen.

Nehmen wir drei Systeme von geraden Linien, so ist in obigem Schema der Satz der 73. Nummer bewiesen, und wir erhalten zugleich noch eine geometrische Bedeutung des Durchschnitts-Punctes der drei Chordalen. Es seyen nemlich M, M′ und M″ die Durchschnitts-Puncte der Linien jedes Systems, und diese Puncte mögen sich auf irgend einer Hyperbel befinden und die Linien jedes Systems den Asymptoten derselben parallel seyn. Der Chordal-Punct C, in welchem sich P″Q″, P′Q′ und PQ vereinigen, ist alsdann der Mittelpunct der Hyperbel. Hiervon überzeugen wir uns sogleich, denn PQ z. B. geht durch P und Q, durch die Durchschnitte der Linien zweier anderen Systeme, die beide mit der Hyperbel M″M′ zur Chordalen haben, woraus nach der vorigen Nummer folgt, dafs P und Q in gerader Linie mit dem Mittelpuncte der Hyperbel liegen. Fig. 12.

Wir können hiernach, wenn irgend drei Puncte und zwei gerade Linien gegeben sind, den Mittelpunct derjenigen Hyperbel finden, die durch jene drei Puncte geht, und deren Asymptoten den beiden gegebenen geraden Linien parallel sind, und alsdann die Hyperbel selbst leicht construiren.

Wir wollen, als besondern Fall, zuletzt noch die Zusammenstellung einer Hyperbel und zweier Systeme von zwei geraden Linien betrachten. In der 13. Figur seyen diese beiden Systeme CM, CM‴ und C′M′, C′M″; alsdann ist P der Chordal-Punct, in welchem Puncte sich MM‴, M′M″ und RQ, Diagonale des Parallelogrammes CC′, schneiden. Hiernach können wir, wenn die Richtung der beiden Asymptoten und irgend drei Puncte der Hyperbel (M′M″M‴) gegeben sind, sogleich einen vierten Punct (M) finden, der auf einer beliebig durch einen der gegebenen Puncte (M‴) gelegten geraden Linie (PM‴) oder auf einer beliebigen, einer der Asymptoten parallelen, geraden Linie (RC) sich befindet. Fig. 13.

---

*) Wenn wir allgemein durch

$$A = 0, \quad A' = 0, \quad A'' = 0,$$

die Gleichungen dreier Linien des m. Grades bezeichnen, deren Asymptoten parallel sind, so stellen die Gleichungen

$$A - A' = 0, \quad A - A'' = 0, \quad A' - A'' = 0,$$

drei neue Curven des (m—1). Grades dar, die durch die Durchschnitte jener Curven des m. Grades gehen. Die drei neuen Curven schneiden sich in denselben Puncten, deren es $(m-1)^2$ gibt, die aber zum Theil imaginär werden können.

Machen wir eine Anwendung hiervon auf Linien der dritten Ordnung, so erhalten wir drei Linien zweiter Ordnung, die sich in denselben vier Puncten schneiden. Für die Linien dritter Ordnung können wir endlich noch drei Systeme von drei geraden Linien nehmen, welche drei Dreiecke bilden, deren Seiten parallel sind.

Digitized by Google

Wir können hiernach ferner, wenn irgend vier Puncte und eine gerade Linie gegeben sind, eine Hyperbel construiren, welche durch die vier gegebenen Puncte geht, und deren eine Asymptote der gegebenen geraden Linie parallel ist. Es kommt hier nur darauf an, dafs wir die Richtung der zweiten Asymptote der zu construirenden Hyperbel bestimmen. Seyen also M, M', M'' und M''' die vier Puncte und RM' und QM''' gerade Linien, die einer der Asymptoten der gesuchten Curve parallel sind. Man verbinde die gegebenen Puncte paarweise durch zwei gerade Linien, für welche wir hier MM''' und M'M'', die sich in P schneiden, nehmen wollen. Alsdann reducirt sich die Construction zweier geraden Linien, die der zweiten Asymptote parallel sind, darauf, durch M und M'' zwei solche gerade Linien zu ziehen, die unter einander parallel sind und auf RM' und QM''' zwei Puncte, R und Q, bestimmen, die mit P in gerader Linie liegen. Zu diesem Ende brauchen wir nur irgend zwei beliebige parallele gerade Linien $\varkappa\gamma$ und $\lambda\gamma'$ durch M und M'' zu legen, und die Diagonale $\varkappa\lambda$ des auf diese Weise entstandenen Parallelogrammes $\gamma\gamma'$ zu ziehen. Diese Diagonale schneidet diejenige gerade Linie, welche die beiden Puncte M und M'' verbindet in irgend einem Puncte S. Zieht man nun PS, so erhält man auf RM' und QM''' die Puncte R und Q, und endlich die geraden Linien RM und QM'', welche der zweiten Asymptote der gesuchten Curve parallel sind. (Die Richtigkeit dieser Construction ergibt sich sogleich; denn $\varkappa\lambda$, MM'' und RQ schneiden sich in demselben Puncte, in S; da ferner $\varkappa$R und λQ, $\varkappa$M und λM'' parallel sind, so sind nothwendig auch RM und QM'' parallel (86)).

Fig. 14. Wenn wir mit einer Hyperbel zwei Systeme von zwei, den Asymptoten parallelen, geraden Linien zusammenstellen, von welchen das eine aus solchen geraden Linien besteht, die sich auf der Hyperbel schneiden, so erhalten wir für eine Chordale eine Tangente. Seyen in der 14. Figur CM, CM' (oder γM, γM') und M''K, M''Q die beiden Systeme und M'' ein Punct der Hyperbel; alsdann vereinigen sich in P die Chordalen MM' und KP (und $\varkappa$P) und M''P, welche die Hyperbel berührt. (Beiläufig bemerken wir auf diese Weise eine neue geometrische Beziehung des Chordal-Punctes dreier Systeme von zwei, sich in M'', C und $\varkappa$ schneidenden geraden Linien.) Hiernach können wir, wenn drei Puncte einer Hyperbel und die Richtung ihrer Asymptoten bekannt sind, in jedem der gegebenen Puncte unmittelbar eine Tangente construiren. Wir können auch, umgekehrt, wenn statt eines der drei Puncte eine Tangente gegeben ist, denjenigen Punct bestimmen, in welchem diese Tangente die Hyperbel berührt und also, nach dem Vorhergehenden, die Hyperbel selbst construiren. Sey BM'' die gegebene gerade Linie, von welcher die gesuchte Hyperbel berührt werden soll und die derjenigen geraden Linie, welche die beiden gegebenen Puncte M und M' verbindet, in P begegnet. Die geraden Linien CM, CM' sind als gegeben zu betrachten und die Construction der Aufgabe reducirt sich darauf, einen Punct M'' auf der gegebenen geraden Linie BM'' so zu bestimmen, dafs die Diagonale KQ des Parallelogrammes CM'' durch den Punct P geht. Zu diesem Ende brauchen wir nur, wenn wir durch D und B die Durchschnitte der gegebenen geraden Linie mit CM und CM' bezeichnen, M'' vermittelst folgender Gleichung, zu der wir ohne Mühe aus der Construction gelangen:

$$\overline{PM''}^2 = PD.\ PB,$$

zu bestimmen. M'' ist alsdann der gesuchte Berührungs-Punct. Auf entsprechende Weise hätten wir vermittelst folgender Gleichung:

Digitized by Google

$$P\bar{M}^2 = P\delta . P\beta,$$

den Punct M'' bestimmen können, und hiernach ist:

$$PD . PB = P\delta . P\beta = P\bar{M}^2.$$

Wir verweilen nicht bei der Aussage des hierin enthaltenen Satzes und brechen überhaupt hier ab, um zu anderen Constructionen überzugehen.

264. Die nachstehenden Gleichungen:

$$y^2 + \beta x^2 + 2\gamma y + \varepsilon = 0, \quad (1)$$

$$y^2 + \beta x^2 + 2\delta x - \varepsilon = 0, \quad (2)$$

stellen zwei ähnliche Ellipsen oder Hyperbeln dar, durch deren beide Mittelpuncte die zweite und erste Axe gehen. Wir nehmen an, in den beiden Gleichungen sey das constante Glied gleich, aber von entgegengesetztem Zeichen. Wenn wir in der zweiten Gleichung $x = 0$ setzen, so erhalten wir für die Durchschnitte der zweiten Curve mit der zweiten Axe:

$$y = \pm\sqrt{\varepsilon},$$

woraus ersichtlich ist, dafs diese Curve durch zwei Puncte geht, die zugeordnete Pole für die erste Curve sind, und gleichweit von der ersten Axe abstehen (261). Wir überzeugen uns auf ähnliche Weise, dafs gegenseitig die erste Curve die erste Axe in zweien Puncten schneidet, die für die zweite Curve zugeordnete Pole sind.

Die Gleichungen der Polaren irgend eines Punctes (y', x') für die Curven (1) und (2) sind folgende (263):

$$(y' + \gamma)y + \beta x' x + \gamma y' + \varepsilon = 0,$$

$$y' y + (\beta x' + \delta)x + \delta x' - \varepsilon = 0.$$

Wenn wir für (y', x') in der ersten dieser Gleichungen den Mittelpunct der zweiten Curve $(0, -\frac{\delta}{\beta})$, und in der zweiten derselben den Mittelpunct der ersten Curve, $(-\gamma, 0)$, nehmen, so reduciren sich beide Gleichungen auf folgende:

$$\gamma y - \delta x + \varepsilon - 0,$$

und eben dieselbe Gleichung erhalten wir auch für die Chordale der beiden Curven, indem wir ihre Gleichungen von einander abziehen und dann durch 2 dividiren. Wir sehen hieraus, dafs die in den beiden Durchschnitten der Curven (1) und (2) an jede derselben gelegten Tangenten durch den Mittelpunct der andern gehen.

Wenn wir ferner mit der ersten Curve eine andere zusammenstellen, die mit ihr die erste Axe zur Chordalen hat, und deren Gleichung also von folgender Form ist:

$$y^2 + \beta x^2 + 2\gamma' y + \varepsilon = 0, \quad (3)$$

wo γ' jeden beliebigen Werth haben kann, so geht offenbar die zweite Curve durch diejenigen beiden Puncte, welche zugleich für (1) und (3) zugeordnete Pole sind; sie schneidet, berührt oder schneidet nicht die Central-Linie dieser beiden Curven, je nachdem jene Puncte reell sind, zusammenfallen oder imaginär werden; d. h. je nachdem die Curven (1) und (3) sich nicht schneiden, sich berühren oder schneiden.

Der Coefficient δ in der Gleichung (2) kann jeder beliebige seyn, und mithin der Mittelpunct der bezüglichen Curve in jedem beliebigen Puncte der ersten Axe angenommen werden. Wenn wir daher drei ähnliche Linien zweiter Ordnung zusammenstellen, so können wir aus dem Chordal-Puncte derselben eine ihnen ähnliche Curve beschreiben, welche durch die zugeordneten Pole je zweier der drei gegebenen, also, im Allgemeinen,

Digitized by Google

durch sechs Puncte geht. In dem Mittelpuncte dieser Curve vereinigen sich diejenigen Tangenten, welche in den Durchschnitts-Puncten derselben mit den gegebenen Curven an letztere gelegt werden können. Sind die gegebenen Curven drei Kreise, so ist die aus dem Chordal-Puncte, als Mittelpuncte, beschriebene Curve keine andere als der Orthogonal-Kreis. Wenn unter den gegebenen Linien zweiter Ordnung solche sich befinden, die sich auf einen Punct oder ein System zweier geraden Linien reducirt haben, so geht die in Rede stehende, schneidende Curve durch die gegebenen Puncte oder die Durchschnitts-Puncte der beiden geraden Linien der gegebenen Systeme.

Fig. 15. Nach der letzten Bemerkung können wir eine Ellipse beschreiben, welche durch irgend drei gegebene Puncte geht, und in welcher zwei zugeordnete Durchmesser irgend zweien gegebenen geraden Linien parallel sind, und überdiefs in einem gegebenen Verhältnisse zu einander stehen. Seyen OY und OX die beiden gegebenen geraden Linien, das Verhältnifs der ihnen parallelen Durchmesser sey $\frac{B}{A}$, alsdann ist, indem wir das Quadrat dieses Verhältnisses durch β bezeichnen, die Gleichung der gesuchten Ellipse, wenn wir dieselben auf jene beiden geraden Linien beziehen, von folgender Form:

$$y^2+\beta x^2+2\gamma y+2\delta x+\varepsilon = 0.$$

Bezeichnen wir ferner die drei gegebenen Puncte durch (y',x'), (y'',x'') und (y''',x'''), so ist der Mittelpunct jener Ellipse der Chordal-Punct der drei gegebenen, durch folgende Gleichungen dargestellten, Puncte:

$$(y-y')^2+\beta(x-x')^2 = 0,$$
$$(y-y'')+\beta(x-x'')^2 = 0,$$
$$(y-y''')^2+\beta(x-x''')^2 = 0,$$

so dafs derselbe also zugleich auf folgenden drei geraden Linien liegt:

$$\left.\begin{aligned} 2(y''-y')y+2\beta(x''-x')x + y'^2+\beta x'^2-y''^2-\beta x''^2 &= 0,\\ 2(y'''-y')y+2\beta(x'''-x')x + y'^2+\beta x'^2-y'''^2-\beta x'''^2 &= 0,\\ 2(y'''-y'')y+2\beta(x'''-x'')x + y''^2+\beta x''^2-y'''^2-\beta x'''^2 &= 0. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Um den Mittelpunct der verlangten Ellipse zu erhalten, brauchen wir also nur den Durchschnitt irgend zweier der durch die letzten Gleichungen dargestellten geraden Linien zu construiren. Zunächst ist unmittelbar aus diesen Gleichungen selbst ersichtlich, was aus dem Früheren schon bekannt ist, dafs die entsprechenden drei geraden Linien durch die Mitten derjenigen drei geraden Linien gehen, welche die drei gegebenen Puncte, paarweise genommen, verbinden. Denn nehmen wir z. B. die erste der letzten drei Gleichungen, so wird dieselbe befriedigt, wenn wir zugleich

$$y = \frac{y''+y'}{2}, \qquad x = \frac{x''+x'}{2},$$

setzen. Um also die bezügliche gerade Linie zu construiren, brauchen wir nur noch einen zweiten Punct derselben oder ihre Richtung zu bestimmen. Beides ist leicht; bei der Construction eines zweiten Punctes nehmen wir füglich einen der beiden Puncte M oder M' zum Anfangspuncte, und suchen den Durchschnitt der in Rede stehenden Linie mit einer der beiden Axen. Die 15. Figur bezieht sich auf den Fall, wo $\beta = 1$ ist, und wir also eine Ellipse verlangen, welche durch die drei Puncte M, M' und M'' und deren gleiche zugeordnete Durchmesser den beiden gegebenen geraden Linien OY und OX parallel sind. Bei dieser Annahme nimmt die erste der Gleichungen (1) folgende Form an:

$$2(y''-y')y+2(x''-x')+y'^2+x'^2-y''^2-x''^2 = 0,$$

und gibt, wenn wir sie mit folgender Gleichung:

$$py+qx = pq,$$

zusammenstellen:

$$\frac{q}{p} = \frac{x''-x'}{y''-y'}.$$

Diejenige gerade Linie ferner, welche durch die beiden Puncte M und M' geht, hat, wenn wir die Segmente OQ' und OP' durch q' und p' bezeichnen, folgende Gleichung:

$$p'y+q'x = p'q',$$

und wir haben zugleich:

$$\frac{q'}{p'} = -\frac{y''-y'}{x''-x'},$$

so dafs also:

$$\frac{q}{p} = -\frac{p'}{q'}$$

hiernach ist, indem wir $O\pi = OQ'$ und $Ox = OP'$ nehmen, die gerade Linie πx parallel der gesuchten $\mu''C$, die zugleich durch die Mitte von MM' durch μ'' geht, und also vollkommen bestimmt ist. Ebenso können wir eine beliebige der beiden entsprechenden geraden Linien $\mu'C$ und μC construiren, die durch die Mitten von MM'' und M'M'' gehen, und erhalten somit den Mittelpunct der gesuchten Ellipse.

Die Aufgabe: durch drei Puncte eine Hyperbel zu beschreiben, deren zwei zugeordnete Durchmesser, die ein gegebenes Verhältnifs zu einander haben, zwei gegebenen geraden Linien parallel sind, ist der auf die Ellipse sich beziehenden Aufgabe ganz analog. Wir müssen alsdann nur β mit entgegengesetztem Zeichen nehmen. Indem wir, als besondern Fall, $\beta = -1$ setzen, erhalten wir eine gleichseitige Hyperbel, die durch drei gegebene Puncte geht, und deren zwei zugeordnete Durchmesser zweien gegebenen geraden Linien parallel sind. —

Aus diesem Paragraphen erhellet, wie die Theorie der Chordalen und des Chordal-Punctes, bei der wir ausführlich im zweiten Abschnitte verweilt haben, sich in allen Beziehungen auf beliebige ähnliche Curven zweiter Ordnung übertragen läfst. Dasselbe gilt von der Theorie der Symmetral-Puncte; doch wollen wir hier in diese Erörterungen nicht eingehen.

§. 6.

Verbindung der Gleichungen einer Linie zweiter Ordnung und eines Systems zweier geraden Linien zu der Gleichung eines neuen solchen Systems.

285. Wir wollen zuvörderst das allgemeine Schema aufstellen, das uns in diesem Paragraphen beschäftigen soll. Sey

$$y^2+2\alpha xy+\beta x^2+2\gamma y+2\delta x+\epsilon = 0, \qquad (1)$$

die Gleichung irgend einer beliebigen Linie zweiter Ordnung, die auf ein beliebiges Coordinaten-System bezogen ist. Sey ferner (y', x') irgend ein gegebener Punct, durch welchen wir nach beliebiger Richtung zwei gerade Linien legen, deren Gleichungen folgende seyen:

$$(y-y')+\varkappa(x-x') = 0,$$
$$(y-y')+\varkappa'(x-x') = 0,$$

und die wir also, beide zugleich, durch folgende Gleichung ausdrücken können:

$$y^2+(x+x')xy+xx'x^2-((x+x')x'+2y')y-((x+x')y'+2xx'x')x+y'^2+(x+x')x'y'+xx'x'^2 = 0. \quad (2)$$

Durch Verbindung der beiden Gleichungen (1) und (2) erhalten wir die Gleichungen aller möglichen Curven, welche durch die Durchschnitte der beiden geraden Linien mit der gegebenen Curve gehen, wir erhalten namentlich die allgemeine Gleichung, welche alle Linien zweiter Ordnung, die durch jene Durchschnitte gehen, darstellt, indem wir eine der beiden Gleichungen (1) und (2), wofür wir hier die erste derselben nehmen wollen, mit einem unbestimmten Coefficienten μ multipliciren und alsdann zur andern addiren. Auf diese Weise ergibt sich, indem wir zugleich alle Glieder der resultirenden Gleichung durch $(1+\mu)$ dividiren, folgende Gleichung:

$$y^2+\frac{2\mu\alpha+x+x'}{1+\mu}xy+\frac{\mu\beta+xx'}{1+\mu}x^2+\frac{2\mu\gamma-(x+x')x'-2y'}{1+\mu}y+\frac{2\mu\delta-(x+x')y'-2xx'x'}{1+\mu}x$$
$$+\frac{\mu\varepsilon+y'^2+(x+x')x'y'+xx'x'^2}{1+\mu} = 0. \quad (3)$$

Soll diese Gleichung wiederum ein System zweier geraden Linien darstellen, so muſs sie, durch eine schickliche Annahme des Coefficienten μ, folgende ganz der Gleichung (2) entsprechende Form annehmen können:

$$xy^2+(\xi+\xi')xy+\xi\xi'x^2-((\xi+\xi')x''+2y'')y-((\xi+\xi')y''+2\xi\xi'x''+y''^2+(\xi+\xi')x''y''+\xi\xi'x''^2 = 0, \quad (4)$$

und zur nähern Bestimmung der beiden geraden Linien des durch diese Gleichung dargestellten Systems erhalten wir folgende fünf Gleichungen:

$$\frac{2\mu\alpha+(x+x')}{1+\mu} = \xi+\xi', \quad (5)$$

$$\frac{\mu\beta+xx'}{1+\mu} = \xi\xi', \quad (6)$$

$$\frac{2\mu\gamma-(x+x')x'-2y'}{1+\mu} = -(\xi+\xi')x''-2y'', \quad (7)$$

$$\frac{2\mu\delta-(x+x')y'-2xx'x'}{1+\mu} = -(\xi+\xi')y''-2\xi\xi'x'', \quad (8)$$

$$\frac{\mu\varepsilon+y'^2+(x+x')x'y'+xx'x'^2}{1+\mu} = y''^2+(\xi+\xi')x''y''+\xi\xi'x''^2. \quad (9)$$

Diese Gleichungen sind hinreichend zur Bestimmung des unbestimmten Coefficienten μ und der Constanten der beiden gesuchten geraden Linien, die durch die Durchschnitte der gegebenen geraden Linie mit der gegebenen Curve gehen, und die einzeln durch folgende beiden Gleichungen dargestellt werden:

$$y-y''=\xi(x-x'') = 0,$$
$$y-y''=\xi'(x-x'') = 0.$$

Aus denselben Gleichungen (5) — (9) ergibt sich eine lange Reihe geometrischer Beziehungen, zu denen wir ohne Mühe kommen, indem wir nach verschiedenen Absichten die Coordinaten-Axen schicklich bestimmen, und die Form der Gleichungen (2) und (4) zweckdienlich verändern.

286. Zuvörderst wollen wir uns mit dem unbestimmten Coefficienten μ beschäftigen. Die Art, wie dieser Coefficient sich durch die gegenseitige Lage der Curve zweiten Grades und des Systems der beiden geraden Linien, so wie durch den Winkel, den diese geraden Linien mit einander bilden, und durch die Natur der Curve bestimmt, ist unabhängig von irgend einer Coordinaten-Annahme. Da wir nun durchaus nichts an Allgemeinheit einbüſsen, indem wir die beiden gegebenen, irgend einen beliebigen Winkel bil-

Digitized by Google

denden, geraden Linien zu Coordinaten-Axen nehmen, und die Coefficienten der Curven-Gleichung ganz unbestimmt lassen, so können wir, zum Behuf jener Bestimmung von μ, statt der Gleichung (2), der vorigen Nummer, folgende:

$$2xy = 0 \qquad (1)$$

wo der Factor 2 nur der Symmetrie wegen hinzugefügt ist, mit der Gleichung:

$$y^2+2\alpha xy+\beta x^2+2\gamma y+2\delta x+\varepsilon = 0, \qquad (2)$$

verbinden. Wir können ferner statt die Gleichung der Curve, wie in der vorigen Nummer, die Gleichung des Linien-Systems mit einem unbestimmten Coefficienten multipliciren, und dann beide Gleichungen addiren. (Diefs kommt darauf hinaus, μ mit $\frac{1}{\mu}$ zu vertauschen.) Wir erhalten auf diese Weise statt der Gleichung (3) folgende:

$$y^2+2(\alpha+\mu)xy+\beta x^2+2\gamma y+2\delta x+\varepsilon = 0. \qquad (3)$$

Soll diese Gleichung ein System zweier geraden Linien darstellen, so erhalten wir (284) folgende Bedingungs-Gleichung:

$$\delta^2-2(\alpha+\mu)\delta\gamma+\beta\gamma^2+((\alpha+\mu)^2-\beta)\varepsilon = 0, \qquad (4)$$

oder wenn wir in Beziehung auf μ ordnen:

$$\varepsilon\mu^2-2(\delta\gamma-\alpha\varepsilon)\mu+(\delta^2-2\alpha\delta\gamma+\beta\gamma^2+(\alpha^2-\beta)\varepsilon) = 0. \qquad (5)$$

Vermittelst dieser Gleichung finden wir μ, nur müssen wir bemerken, dafs dieselbe sich sowol auf denjenigen Fall bezieht, wo die Gleichung (3) ein System zweier geraden Linien darstellt, als auch auf denjenigen, wo diese Gleichung einen bloßen Punct bezeichnet. Da die Gleichung (5) in Beziehung auf μ vom zweiten Grade ist, so erhalten wir im Allgemeinen zwei Werthe für μ, denen zwei Linien-Systeme entsprechen, die sich durch die Durchschnitte der gegebenen Curve mit dem gegebenen Systeme legen lassen.

Die Gleichung (5) reducirt sich auf den ersten Grad, und gibt also nur einen einzigen Werth für μ, erstens wenn:

$$\delta^2-2\alpha\delta\gamma+\beta\gamma^2+(\alpha^2-\beta)\varepsilon = 0,$$

d. h. wenn die gegebene durch (2) dargestellte Linie zweiter Ordnung selbst schon ein System zweier geraden Linien, oder auch, was wir wiederum nicht übersehen dürfen, einen Punct darstellt. Zweitens reducirt sich die Gleichung (5) auf den ersten Grad, wenn:

$$\varepsilon = 0,$$

d. h. wenn der Anfangs-Punct der Coordinaten oder, mit anderen Worten, der Durchschnitts-Punct der beiden geraden Linien des gegebenen Systems auf der Curve liegt.

Die Gleichung (5) gibt für μ zwei reelle, gleiche oder imaginäre Werthe, je nachdem der Ausdruck:

$$\delta^2\gamma^2-\delta^2\varepsilon-\beta\gamma^2\varepsilon+\beta\varepsilon^2,$$

positiv, Null oder negativ ist. Diesem Ausdrucke können wir folgende Form geben:

$$(\delta^2-\beta\varepsilon)(\gamma^2-\varepsilon),$$

und hieraus ist ersichtlich, dafs sich reelle oder imaginäre Werthe für μ ergeben, wenn die beiden Ausdrücke

$$\delta^2-\beta\varepsilon, \quad \gamma^2-\varepsilon,$$

beide von gleichem oder entgegengesetztem Zeichen sind. Im erstern Falle begegnen beide Linien des gegebenen Systems (1) der gegebenen Curve, oder beide begegnen ihr nicht; im andern Falle wird die Curve nur von einer geraden Linie des Systems geschnitten. Nur in dem erstern Falle lassen sich die Gleichungen der Curve und des Linien-Systems zu einer neuen Gleichung eines Linien-Systems oder eines Punctes, und zwar

Digitized by Google

auf doppelte Weise verbinden. Die Werthe von μ sind gleich, wenn einer der letzten Ausdrücke oder beide verschwinden; in diesem Falle wird die Curve von einer oder von beiden Linien des gegebenen Systems berührt. Zwischen gleichen Werthen und einem einzigen Werthe von μ findet ein feiner Unterschied Statt, der sich auch in der Construction nachweisen läfst.

Wenn die Gleichung (2) eine imaginäre Curve bezeichnet, so sind, weil keine reelle gerade Linie mit einer solchen Curve reelle Durchschnitte haben kann, die letzten beiden Ausdrücke beide negativ, und wir erhalten also in diesem Falle immer eine zweifache Gleichung, die, was einstweilen noch unentschieden geblieben ist, entweder ein Linien-System oder einen Punct darstellt.

287. Zur Unterscheidung der verschiedenen Fälle, ob, bei einer schicklichen Bestimmung von μ, die Gleichung (3), zu der wir in der vorigen Nummer durch Verbindung der Gleichungen des Linien-Systems und der Curve gekommen sind, wieder Linien-Systeme oder nur Puncte darstellt, verfahren wir am leichtesten auf folgende Weise. Es kommt hierbei Alles auf das Zeichen des Werthes von folgendem Ausdrucke an:

$$(\alpha+\mu)^2-\beta, \tag{6}$$

aus welchem wir, vermittelst der Gleichung (4), nur μ zu eliminiren brauchen. Diese Gleichung gibt uns:

$$\alpha+\mu = \frac{\delta\gamma\pm((\delta^2-\beta\varepsilon)(\gamma^2-\varepsilon))^{1/2}}{\varepsilon}; \tag{7}$$

substituiren wir diesen Werth von $(\alpha+\mu)$ in dem vorigen Ausdruck, so verwandelt sich derselbe in folgenden:

$$\frac{\delta^2(\gamma^2-\varepsilon)+\gamma^2(\delta^2-\beta\varepsilon)\pm 2\delta\gamma((\delta^2-\beta\varepsilon)(\gamma^2-\varepsilon))^{1/2}}{\varepsilon^2},$$

und wir bemerken sogleich, dafs dieser Ausdruck das vollständige Quadrat ist von:

$$\frac{\delta(\gamma^2-\varepsilon)^{1/2}\pm\gamma(\delta^2-\beta\varepsilon)^{1/2}}{\varepsilon}. \tag{8}$$

Da wir nun in der vorigen Nummer als Bedingung für die Möglichkeit der Verbindung der Gleichungen (1) und (2) zu der Gleichung eines neuen Linien-Systems oder eines Punctes gefunden haben, dafs die Zeichen für die Werthe folgender Ausdrücke

$$\gamma^2-\varepsilon, \quad \delta^2-\beta\varepsilon,$$

übereinstimmen müssen, so haben wir nur diejenigen Fälle zu unterscheiden, wo die letzten Ausdrücke beide einen positiven oder beide einen negativen Werth haben, d. h. wo die Linien des gegebenen Systems beide der Curve entweder begegnen oder nicht. Im erstern Falle hat der Ausdruck (7) reelle Werthe, und das Quadrat desselben, oder

$$(\alpha+\mu)^2-\beta$$

ist positiv; im andern Falle nimmt der Ausdruck (8) die Form $A\sqrt{-1}$ an, und das Quadrat desselben ist nothwendig negativ. Im erstern Falle gelangen wir also durch Verbindung der Gleichung eines Linien-Systems und einer Curve zu den Gleichungen zweier neuen Linien-Systeme, im andern Falle zu den Gleichungen zweier Puncte.

Diese Resultate der analytischen Entwicklung sind leicht *a priori* ersichtlich. Wenn nemlich zwei gegebene gerade Linien beide einer gegebenen Curve zweiter Ordnung begegnen, so erhalten wir vier Durchschnitte, durch welche wir noch zwei andere Systeme zweier geraden Linien legen können. Wenn die Curve von keiner der gegebenen geraden Linien geschnitten wird, so würde jedes zweite Linien-System das erste Linien-System

Digitized by Google

schneiden, und diese Durchschnitte müfsten, was gegen die gemachte Voraussetzung ist, ebenfalls auf der Curve liegen, wenn wir zu der Gleichung des zweiten Systems durch Verbindung der Gleichungen des ersten Systems und der Curve gelangen könnten; die Rechnung gibt uns hier, dafs zwei Puncte an die Stelle der beiden Linien-Systeme des ersten Falles treten. Wenn nur eine einzige der beiden gegebenen geraden Linien der Curve begegnet, so mufs der durch die resultirende Gleichung dargestellte geometrische Ort nothwendig durch die beiden Durchschnitts-Puncte gehen, und kann also, so wenig als im ersten Falle, ein Punct seyn: er kann auch kein neues Linien-System seyn, denn jede gerade Linie, welche durch einen beliebigen der obigen beiden Durchschnitte geht, begegnet derjenigen gegebenen geraden Linie, welche die Curve nicht schneidet, und der Curve selbst, in zweien Puncten, die nach der gemachten Voraussetzung nicht dieselben seyn können.

Wenn eines der resultirenden Systeme aus zweien Parallelen bestehen soll, so erhalten wir, indem wir den Ausdruck bei (8) verschwinden lassen, folgende Bedingungs-Gleichung:

$$\delta^2 = \beta\gamma^2,$$

woraus zuvörderst erhellet, dafs β nicht negativ seyn kann. In diesem Falle reducirt sich ferner der Ausdruck (7) auf:

$$(\alpha+\mu) = \frac{\delta\gamma \pm (\gamma^2-\varepsilon)\sqrt{\beta}}{\varepsilon},$$

so dafs also der Werth von μ immer reell ist. Wir erhalten folglich nie bei obiger Verbindung die Gleichung eines Systems zweier imaginären Parallellinien.

288. Die vorstehenden Erörterungen sind für unsern nächsten Zweck vollkommen hinreichend; wir wenden uns nun wieder zu dem, in der 285. Nummer aufgestellten allgemeinen Schema zurück, und wollen zuerst die beiden Gleichungen (5) und (6) der eben angezogenen Nummer betrachten. Diese beiden Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \frac{2\mu\alpha+\varkappa+\varkappa'}{1+\mu} &= \xi+\xi', \\ \frac{\mu\beta+\varkappa\varkappa'}{1+\mu} &= \xi\xi', \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

enthalten als unbekannte Gröfsen μ, ξ und ξ'. Wir können eine der beiden letzten dieser drei Gröfsen, etwa ξ, auch als gegeben betrachten. Dieſs kommt alsdann darauf hinaus, diejenigen beiden geraden Linien, die wir bisher als ursprünglich gegeben betrachtet haben, und deren Gleichungen folgende sind:

$$\left.\begin{aligned} y-y'+\varkappa(x-x') &= 0, \\ y-y'+\varkappa'(x-x') &= 0, \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

nur so zu bestimmen, dafs jede derselben durch einen der beiden Durchschnitte der Curve mit derjenigen geraden Linie geht, deren Gleichung folgende ist:

$$y-y''+\xi(x-x'') = 0, \quad (3)$$

und die einem der beiden anderen Systeme angehört, zu deren Bestimmung die Gleichungen (5)—(9) der 285. Nummer führen. Wir können diese Bestimmung der geraden Linien (2) auf solche Weise machen, dafs $\varkappa$ und $\varkappa'$ ein für alle Mal bestimmte Werthe behalten; so dafs also, wenn wir die durch die letzte Gleichung dargestellte gerade Linie, die nur der Richtung nach gegeben ist, parallel mit sich selbst verrücken, sich in den Gleichungen (2) nur die Coordinaten des Durchschnitts-Punctes (y', x') der hezüglichen beiden geraden Linien ändern: Coordinaten, die in den beiden oben zusammengestellten

Digitized by Google

Gleichungen (1) nicht vorkommen. Diese Gleichungen sind bei den eben gemachten Voraussetzungen hinreichend zur Bestimmung von μ und ξ'. Es ist also auch diejenige gerade Linie:

$$y-y''+\xi'(x-x'') = 0,$$

welche durch die beiden übrigen Durchschnitte der gegebenen Curve und der beiden geraden Linien (2) geht, der Richtung nach bekannt, und diese Richtung ändert sich nicht wie wir auch die gerade Linie (3), parallel mit sich selbst, verrücken mögen. Wir haben mithin folgenden Satz bewiesen:

Wenn man in irgend eine Linie zweiter Ordnung beliebig viele Vierecke beschreibt, in denen drei Seiten parallel sind, so sind auch die vierten Seiten derselben parallel.

Fig. 16. Mit solchen Vierecken ordnen sich zwei Dreiecke zusammen, deren drei Seiten mit den ersten drei Seiten jener Vierecke parallel sind; die Tangente in einem Winkel-Puncte des Dreiecks tritt alsdann an die Stelle der vierten Seite. Hiernach können wir in irgend eine Linie zweiter Ordnung ein Dreieck beschreiben, dessen drei Seiten dreien gegebenen geraden Linien parallel sind. Wir brauchen zu diesem Ende nur irgend eine der Curve begegnende, gerade Linie AB parallel mit einer der gegebenen zu ziehen, und durch die Durchschnitte derselben mit der Curve zwei andere gerade Linien AC und BD, die den beiden anderen gegebenen geraden Linien parallel sind, und der Curve in C und D begegnen. Legen wir alsdann Tangenten an die Curve, die der durch C und D gehenden geraden Linien parallel sind, so sind die Berührungen T und T' diejenigen Winkel-Puncte der gesuchten Dreiecke (deren es mithin zwei gibt), welche den mit AB parallelen Seiten derselben gegenüber liegen.

Wir können auch nach obigem Satze in einem gegebenen Puncte einer Linie zweiter Ordnung eine Tangente an dieselbe legen. Sey T der gegebene Punct; durch diesen Punct ziehe man nach beliebiger Richtung TM und TN, welche die Curven in M und N schneiden, man ziehe MN und hiermit parallel aber übrigens beliebig AB, ziehe AC und BD parallel mit TM und TN, ziehe CD und endlich hiermit parallel eine gerade Linie durch T. Diese Linie ist die gesuchte Tangente.

Wir können für zwei der oben zusammengestellten Vierecke zwei solche nehmen, die eine beliebige gerade Linie zur gemeinschaftlichen Seite haben. Solche Vierecke sind in der 16. Figur ABDC und ABC'D'. Alsdann sind A, C, D, B, C' und D' die Winkel-Puncte eines in die Curve beschriebenen Sechsecks, in dem zwei Paar gegenüberliegender Seiten, AC und BC', BD und AD', parallel sind, wodurch nach obigem Satze der Parallelismus der beiden übrigen Seiten CD und D'C' bedingt wird. Also:

Wenn zwei Paar gegenüberliegender Seiten eines in eine Linie zweiter Ordnung beschriebenen Seehseeks parallel sind, so sind es auch die beiden übrigen Seiten.

Indem wir hiernach in der eben angezeigten Construction der Tangente in dem gegebenen Puncte T sogleich durch N eine gerade Linie parallel mit TM und durch M eine andere parallel mit TN ziehen, bestimmt diejenige gerade Linie, welche durch die zweiten Durchschnitte der beiden eben gezogenen Parallelen mit der Curve geht, die Richtung der verlangten Tangente. Diese Construction rührt von *l'Hospital* her *).

289. Der Analogie sowol des Gegenstandes als des Beweises wegen, wollen wir gleich hier mit der vorigen Nummer die folgenden Erörterungen zusammenstellen. Wir

*) Traité analytique des sections coniques; Nro. 208.

Digitized by Google

nehmen als Gleichungen des gegebenen und des resultirenden Linien-Systems für unsere nächsten Zwecke, statt der Gleichungen (2) und (4) der 235. Nummer, nun folgende:

$$y^2+(x+x')xy+xx'x^2+(\sigma+\sigma')y+(x\sigma'+x'\sigma)x+\sigma\sigma' = 0, \quad (1)$$

$$y^2+(\xi+\xi)xy+\xi\xi'x^2+(\zeta+\zeta')y+(\xi\zeta'+\xi'\zeta)x+\zeta\zeta' = 0, \quad (2)$$

indem wir nemlich die Coordinaten der Durchschnitte der beiden Linien des ersten und zweiten Systems $(-\sigma)$ und $(-\sigma')$, $(-\zeta)$ und $(-\zeta')$ als Constante einführen. Hiernach erhalten, während die Gleichungen (5) und (6) der eben angezogenen Nummer unverändert bleiben, die Gleichungen (7) bis (9) folgende Formen:

$$\frac{2\mu\nu+\nu+\sigma'}{1+\mu} = \zeta+\zeta', \quad (3)$$

$$\frac{2\mu\delta+\varkappa\sigma'+\varkappa'\sigma}{1+\mu} = \xi\zeta'+\xi'\zeta, \quad (4)$$

$$\frac{\mu\varepsilon+\sigma\sigma'}{1+\mu} = \zeta\zeta'. \quad (5)$$

290. Wir wollen die erste und letzte dieser drei Gleichungen hier auf dieselbe Weise behandeln, wie wir in der 288. Nummer die beiden Gleichungen (1) behandelt haben. Wir betrachten nemlich σ, σ' und ζ als bekannt, d. h. diejenigen drei Puncte, in welchen die beiden geraden Linien des ursprünglichen Systems und eine gerade Linie des resultirenden Systems der zweiten Axe begegnen, als gegeben. Ueber die zweite Axe selbst haben wir hierbei gar keine besondere Annahme gemacht. Hiernach erhalten wir eine nähere Bestimmung über jenes erste, bisher als ganz beliebig betrachtete, Linien-System. Wir können für dasselbe jedes solche nehmen, das wir erhalten, indem wir durch den Punct $(-\zeta, 0)$ eine **durchaus beliebige**, der Curve begegnende, gerade Linie legen, und die Durchschnitte derselben mit der Curve und die beiden Puncte $(-\sigma, 0)$ und $(-\sigma', 0)$ durch zwei gerade Linien (was auf zwiefache Art geschehen kann) verbinden. Sobald nun auf diese Weise σ, σ' und ζ gegeben sind, so sind die beiden Gleichungen (3) und (5) der vorigen Nummer zur Bestimmung von μ und ζ' hinreichend. Wie wir also auch durch die drei festen Puncte $(-\sigma, 0)$, $(-\sigma', 0)$ und $(-\zeta, 0)$ die drei geraden Linien:

$$y+\varkappa x+\sigma = 0,$$
$$y+\varkappa' x+\sigma' = 0,$$
$$y+\xi x+\zeta = 0,$$

von denen die beiden ersten durch die beiden Durchschnitte der letzten mit der Curve gehen, legen mögen: die vierte gerade Linie, die durch die beiden übrigen Durchschnitte der ersten beiden Linien mit der Curve geht, und der folgende Gleichung entspricht:

$$y+\xi' x+\zeta' = 0,$$

schneidet die zweite Axe in einem festen und unveränderlichen Punct $(-\zeta', 0)$. Wir haben also folgenden Satz bewiesen:

Wenn in einer Curve zweiter Ordnung beliebig viele Vierecke beschrieben werden, deren drei erste Seiten irgend einer beliebigen geraden Linie in denselben drei Puncte begegnen, so vereinigen sich die vierten Seiten aller dieser Vierecke in ein und demselben vierten Puncte derselben geraden Linie.

291. In die Reihe der im Satze der vorigen Nummer zusammengestellten Vierecke gehören im Allgemeinen auch zwei Dreiecke; hier erhalten wir statt der vierten Seiten Tangenten in einem Winkel-Puncte der beiden Dreicke. Diese Tangenten gehen eben-

Digitized by Google

falls durch den obigen vierten Punct $(-\zeta', 0)$. Hiernach können wir in eine gegebene Linie zweiter Ordnung ein Dreieck beschreiben, dessen drei Seiten durch drei gegebene in gerader Linie liegenden Puncte gehen. Wir wollen die Construction dieser Aufgabe anzeigen, ohne dafs eine Figur vorliegt. Seyen nemlich A, B und C die drei gegebenen in gerader Linie liegenden Puncte; man ziehe durch C eine beliebige gerade Linie, welche die Curve in M und M' schneide, man ziehe ferner AM und BM', welche der Curve zum zweiten Male in M'' und M''' begegnen, verbinde diese Puncte durch eine gerade Linie, und lege endlich vom Durchschnitte dieser geraden Linie mit derjenigen, welche die gegebenen Puncte A, B und C enthält, Tangenten an die gegebene Curve. Jeder der beiden Berührungs-Puncte ist alsdann derjenige Winkel-Punct eines der beiden gesuchten Dreiecke, welchen die durch A und B gehenden Seiten bilden. Die Determination der Aufgabe ergibt sich unmittelbar aus der eben angegebenen Construction.

Fig. 17. 292. Die in der 290. Nummer betrachteten Vierecke ordnen sich immer paarweise zusammen, so dafs, wenn wir durch den Punct $(-\zeta, 0)$ oder C irgend eine gerade Linie legen, welche die Curve in M und M' schneidet, wir zwei jener Vierecke erhalten, die diese gerade Linie zur gemeinschaftlichen Seite haben, und deren zweite und dritte Seiten durch die beiden festen Puncte $(-\sigma, 0)$ und $(-\sigma', 0)$ oder A und B gehen. Wir verbinden nemlich zu diesem Ende einmal A mit M und B mit M', das andere Mal A mit M' und B mit M; die vierten Seiten der hierdurch bestimmten Vierecke, nemlich $M''M'''$ und $M_{,,}M_{,,,}$, schneiden sich im Puncte $(-\zeta, 0)$, nach der Figur in D. Bei dieser Construction haben wir ein in die Linie zweiter Ordnung beschriebenes Sechseck $MM''M'''M'M_{,,,}M_{,,}$ erhalten, und in demselben sind MM'' und $M'M_{,,,}$, $MM_{,,}$ und $M'M'''$, $M'M''$ und $M_{,,}M_{,,,}$, welche sich in A, B und D vereinigen, gegenüberliegende Seiten desselben. Da wir für dieses Sechseck ursprünglich jedes beliebige nehmen können, so gibt der blofse Anblick der beiden Gleichungen:

$$\frac{2\gamma\mu+\sigma+\sigma'}{1+\mu} = \zeta+\zeta',$$

$$\frac{2\mu+\sigma\sigma'}{1+\mu} = \zeta\zeta',$$

den Beweis von folgendem bekannten Satze:

Wenn man in irgend einem, in eine beliebige Linie zweiter Ordnung beschriebenen, Sechsecke die gegenüberliegenden Seiten bis zu ihrem Durchschnitte verlängert, so liegen die drei Durchschnitts-Puncte, die wir auf diese Weise erhalten, in gerader Linie *).

---

*) Indem wir das in Rede stehende Sechseck, wie im Texte angezeigt worden ist, construiren, folgen die Winkel-Puncte desselben in sehr verschiedener Ordnung auf einander, je nachdem wir die gerade Linie CM' und die beiden Puncte A und B anders bestimmen; wir dürfen uns hierbei nicht auf den Normalfall der 17. Figur beschränken. Wenn wir, von der andern Seite, von einem gegebenen Sechsecke ausgehen, so können wir die Winkel-Puncte desselben, paarweise genommen, durch gerade Linien verbinden, und erhalten alsdann mehrmals drei Puncte, die in gerader Linie liegen. Um hier in nähere Bestimmungen einzugehen, wollen wir die Winkel-Puncte des Sechsecks in der Ordnung, wie sie auf dem Umfange der Linie zweiter Ordnung auf einander folgen, durch (1), (2), (3), (4), (5) und (6) bezeichnen, die gerade Linie ferner, welche die Puncte (1) und (2) verbindet, durch (1,2)

Digitized by Google

Wir erhalten Modificationen des letzten Satzes, wenn wir einmal, zweimal oder auch dreimal zwei Winkel-Puncte des Sechsecks in einen einzigen Punct zusammenfallen lassen. Dem letzten Falle, den wir hier allein hervorheben wollen, entspricht folgender Satz:

Wenn man in irgend eine Linie zweiter Ordnung ein Dreieck beschreibt, und in den Winkel-Puncten desselben Tangenten legt, so werden letztere von den gegenüberliegenden Seiten in drei Puncten geschnitten, die in gerader Linie liegen.

293. Wir wollen in dieser Nummer die Gleichung (5) der 285. Nummer:

$$\frac{2\mu\alpha+\varkappa+\varkappa'}{1+\mu} = \xi+\xi',$$

---

oder (2, 1) und dem entsprechend alle übrigen Verbindungs-Linien. Bei dieser Bezeichnung haben wir für den Normal-Fall folgendes Schema:

$$\begin{matrix}(1\ 2) & (2\ 3) & (3\ 4),\\ (4\ 5) & (5\ 6) & (6\ 1),\end{matrix} \qquad (a)$$

wobei die drei Paare unter einander stehenden Symbole die drei Paare von Linien bezeichnen, deren Durchschnitte in gerader Linie liegen. Wenn wir die Zahlen in diesem Schema in irgend einer andern Ordnung auf einander folgen lassen, so erhalten wir ein neues Schema, deren es so viele gibt, als sechs Elemente sich permutiren lassen, nemlich $1.2.3.4.5.6 = 720$. Aber nicht jedes dieser Schemata bezieht sich auf drei neue Durchschnitts-Puncte. Behalten wir z. B. die Reihen-Folge der Zahlen des letzten Schema's bei und fangen nur mit einer andern Zahl an, oder kehren wir die Ordnung der Zahlen geradezu um, so erhalten wir dieselben Durchschnitte. Dieſs bestätigt sich leicht an folgenden beiden Schemata:

$$\begin{matrix}(3\ 4) & (4\ 5) & (5\ 6), & & (3\ 2) & (2\ 1) & (1\ 6),\\ (6\ 1) & (1\ 2) & (2\ 3); & & (6\ 5) & (5\ 4) & (4\ 3);\end{matrix}$$

Wir sehen hieraus leicht, daſs wir, um die Zahl der verschiedenen geraden Linien, die drei Durchschnitte enthalten, zu finden, die Zahl der möglichen Permutationen durch 12 dividiren müssen; auf diese Weise kommt 60.

Wir können ferner auch nach der Zahl der verschiedenen Durchschnitts-Puncte fragen, welche auf diesen 60 geraden Linien liegen. Wenn nicht mehrere dieser Linien durch denselben Punct gingen, so wäre die Zahl derselben 180; diese Zahl reducirt sich aber auf den vierten Theil, auf 45, weil durch jeden Durchschnitts-Punct vier der in Rede stehenden geraden Linien gehen. Dieſs ist sogleich ersichtlich, da wir in dem Schema (a) z. B. (1) mit (2), ferner (4) mit (5) und endlich zugleich (1) mit (2) und (4) mit (5) vertauschen können, ohne daſs dadurch der erste Punct ein andrer ist.

Dieselbe Zahl erhalten wir auch auf folgende Weise. Der möglichen Verbindungs-Linien je zweier der 6 Winkel-Puncte gibt es $\frac{6.5}{1.2} = 15$, der Durchschnitte dieser 15 Verbindungs-Linien $\frac{15.14}{1.2} = 105$. Aus dem Anblick des Schema's (a) erhellet, daſs die Winkel-Puncte des Sechsecks selbst nicht in Betracht kommen. Durch jeden derselben gehen aber fünf Verbindungs-Linien, die sich auf $\frac{5.4}{1.2} = 10$ verschiedene Weisen zu zwei combiniren lassen. Hiernach müssen wir von jenen 105 Durchschnitten 6.10 hinwegnehmen, so daſs also noch 45 übrig bleiben.

Digitized by Google

allein für sich betrachten. Aus dieser Gleichung verschwindet der unbestimmte Coefficient μ, wenn:

$$2a = \varkappa+\varkappa',$$

und wir erhalten alsdann:

$$2a = \varkappa+\varkappa' = \xi+\xi'.$$

Setzen wir nun $a = 0$, was wir, ohne der Allgemeinheit irgend Abbruch zu thun, immer können, wenn wir die Coordinaten-Axe gehörig bestimmen, und nehmen wir demgemäfs auch $\varkappa+\varkappa' = 0$, so folgt $\xi+\xi' = 0$. Die letzte Gleichung bezieht sich, da es im Allgemeinen zwei resultirende Systeme gibt, auf eine zwiefache Construction. Wir erfüllen die Bedingungs-Gleichung $\varkappa+\varkappa' = 0$, indem wir für das ursprüngliche System irgend zwei solche gerade Linien nehmen, die parallel sind den Diagonalen irgend eines in die Curve beschriebenen Parallelogrammes, dessen Seiten denjenigen beiden zugeordneten Durchmessern parallel sind, auf welche wir die Curve, damit aus ihrer Gleichung das mit xy behaftete Glied ausfalle, bezogen haben. Alsdann erhalten wir, indem wir die Durchschnitte dieses Systems mit der Curve, paarweise genommen, durch gerade Linien verbinden, im Allgemeinen noch zweimal zwei gerade Linien, die den Diagonalen solcher Parallelogramme, wie wir eben bestimmt haben, parallel sind.

Wenn wir ferner die Linien des ursprünglichen Systems wie eben, und zugleich auf solche Art bestimmen, dafs sie der Curve in denselben beiden Puncten begegnen, so ist offenbar, dafs eine Linie eines der resultirenden Systeme unverändert bleibt. Alsdann zeigt die Gleichung:

$$\xi+\xi' = 0,$$

dafs nicht nur ξ oder ξ' allein, sondern beide Gröfsen keine Aenderung erleiden, wie wir auch $\varkappa$, welches gleich ist $(-\varkappa')$, bestimmen mögen. Die zweite Linie des resultirenden Systems bleibt also immer mit sich selbst parallel.

Wenn wir zwei beliebige gerade Linien, die den Axen der Curve parallel sind, zu Coordinaten-Axen nehmen, so heifst die Bedingungs-Gleichung:

$$\varkappa+\varkappa' = 0,$$

anders nichts, als dafs die Linien des ursprünglichen Systems, die Axen der Curve unter solchen Winkeln schneiden, die sich zu π ergänzen. Dasselbe thun alsdann die beiden Linien jedes der resultirenden Systeme. Hieraus folgt denn ferner, dafs, wenn wir diese beiden Systeme unter sich oder eines derselben mit dem ursprünglichen Systeme zusammenstellen, eine Linie des einen Systems mit einer Linie des andern Systems dieselben Winkel bildet, als die andere Linie des einen Systems mit der andern Linie des andern.

Wenn die Curve, welche wir betrachten, ein Kreis ist, und wir denselben auf rechtwinklige Coordinaten beziehen, so verschwindet a. Wir können demnach irgend zwei beliebige gerade Linien für die Linien des ursprünglichen Systems nehmen, und alsdann, bei der Annahme rechtwinkliger Coordinaten, die erste Axe so bestimmen, dafs:

$$\varkappa+\varkappa' = 0,$$

und also auch:

$$\xi+\xi' = 0.$$

Hierin sind die allbekannten Sätze enthalten, dafs, wenn man in einen Kreis irgend ein beliebiges Viereck beschreibt, die Summe zweier gegenüberstehenden Winkel gleich ist π; und dafs solche Peripherie-Winkel, die auf demselben Bogen stehen, einander gleich sind.

294. Wir schliefsen hier noch einige Bemerkungen an, die bei der Vergleichung von Winkeln für die analytische Entwicklung von Bedeutung sind. Wenn durch die vier

Digitized by Google

Durchschnitts-Puncte zweier Systeme von zwei geraden Linien sich ein Kreis legen läfst; so müssen sich ihre Gleichungen zu der Gleichung eines Kreises verbinden lassen; wenn, umgekehrt, die Gleichungen zweier Linien-Systeme sich zu einer Kreis-Gleichung verbinden lassen, so läfst sich ein Kreis durch die vier Durchschnitts-Puncte beschreiben, und mithin schneidet eine gerade Linie des einen Systems eine des andern Systems unter denselben Winkeln, unter denen die beiden übrigen geraden Linien sich schneiden.

Wenn die beiden Linien beider Systeme alle vier durch denselben Punct gehen, so können wir, was *a priori* leicht ersichtlich ist, die Gleichungen der beiden Systeme zu der Gleichung eines Punctes verbinden, und wenn diese Gleichung alsdann die Form der Gleichung eines Kreises, dessen Radius gleich Null ist, annehmen kann, so finden dieselben Winkel-Beziehungen als eben noch immer Statt.

Wenn endlich irgend zwei gegebene gerade Linien von einer dritten, für deren Gleichung wir folgende nehmen:

$$y+Ax+B = 0,$$

unter gleichen Winkeln geschnitten werden sollen, so mufs die Gleichung des Systems der beiden ersten geraden Linien sich mit der Gleichung:

$$(y+Ax+B)^2 = n,$$

die das System zweier in die dritte gerade Linie zusammenfallenden Linien bezeichnet, sich zu der Gleichung eines Kreises verbinden lassen. Dieser Kreis berührt offenbar die beiden ersten geraden Linien, in denjenigen beiden Puncten, in welchen sie von der dritten Linie geschnitten werden.

Im nächsten Paragraphen werden wir uns von der Fruchtbarkeit der in dieser Nummer gemachten Bemerkungen überzeugen.

295. Wie wir in den letzten Nummern die Gleichung (5) der 285. Nummer behandelt haben, wollen wir nun die Gleichung (6) derselben Nummer, nemlich folgende:

$$\frac{\mu\beta+\alpha\alpha'}{1+\mu} = \xi\xi', \qquad (1)$$

behandeln. Aus dieser Gleichung verschwindet μ, wenn:

$$\beta = \alpha\alpha', \qquad (2)$$

und wir erhalten alsdann:

$$\beta = \alpha\alpha' = \xi\xi'. \qquad (3)$$

Wenn wir $\beta = -1$ setzen, so ist, in der Voraussetzung rechtwinkliger Coordinaten, die gegebene Curve eine gleichseitige Hyperbel, und um die Bedingungs-Gleichung (2) zu befriedigen, müssen wir die beiden geraden Linien des ersten Systems senkrecht auf einander annehmen. Die Gleichung (3) zeigt, dafs alsdann auch die beiden Linien jedes der resultirenden Systeme auf einander senkrecht stehen. In der 18. Figur seyen M'M'' und MM''' die beiden sich rechtwinklig schneidenden geraden Linien des ursprünglichen Systems, alsdann sind MM' und M''M''', MM'' und M'M''' die geraden Linien der resultirenden Systeme, und stehen also ebenfalls auf einander senkrecht. In jedem der vier Puncte M, M', M'' und M''' vereinigen sich drei gerade Linien, welche diejenigen Perpendikel sind, welche in dem, durch die drei übrigen Puncte bestimmten, Dreiecke von diesen Puncten auf die gegenüberstehenden, nöthigenfalls zu verlängernden, Seiten gefällt werden können. Dafs diese drei Perpendikel in jedem beliebigen Dreieck sich in demselben Puncte kreuzen, ist auf diese Weise indirect bewiesen, und zugleich ist dargethan, dafs in diesem Kreuzungs-Puncte alle möglichen gleichseitigen Hyperbeln sich schneiden, welche durch die drei Winkel-Puncte des Dreiecks gehen. Fig. 18.

Hiernach können wir, wenn vier Puncte gegeben sind, beliebig viele neue Puncte derjenigen gleichseitigen Hyperbel, die durch die vier gegebenen Puncte geht, bestimmen *).

Wenn wir als ursprüngliches System irgend zwei gerade Linien nehmen, die sich in irgend einem Puncte einer gleichseitigen Hyperbel rechtwinklig schneiden, so erhalten wir nur ein einziges resultirendes System, die Tangente im Durchschnitte und eine Chorde, die auf einander wiederum senkrecht sind **).

Wenn wir statt der gegebenen gleichseitigen Hyperbel ein System zweier sich rechtwinklig schneidenden geraden Linien nehmen, so erhalten wir unmittelbar jenen Satz, dafs die drei von den Winkel-Puncten eines Dreiecks auf die gegenüberliegenden Seiten gefällten Perpendikel sich in demselben Puncte schneiden.

296. Wenn wir ferner in eine gleichseitige Hyperbel durch irgend zwei feste Puncte derselben zwei auf einander senksechte Chorden legen, so bleibt diejenige gerade Linie, welche die beiden anderen End-Puncte dieser Chorden verbindet, stets mit sich selbst parallel, wie wir auch, unter den gemachten Bestimmungen, jene Chorden annehmen mögen. Wenn man insbesondere einen rechten Winkel sich um irgend einen festen Punct einer gleichseitigen Hyperbel drehen läfst, so sind alle Chorden, die durch die Durchschnitte der Schenkel des Winkels mit der Curve in allen verschiedenen Lagen des Winkels bestimmt werden, unter sich parallel.

297. Die Verallgemeinerung der Resultate der beiden vorigen Nummern für den Fall, wo β irgend ein beliebiges ist, hat keine Schwierigkeit. Wir erhalten hier zunächst einen allgemeinen Satz vom Dreiecke, der demjenigen vom Kreuzen der Perpendikel entspricht, und können, wenn drei Puncte, die Richtung der Coordinaten-Axen und β gegeben sind, sogleich einen vierten Punct bestimmen, in welchem alle Linien zweiter Ordnung sich schneiden, welche durch die drei gegebenen Puncte gehen, und in deren Gleichungen β Coefficient von x^2 ist. Wenn ursprünglich vier Puncte gegeben sind, so ist die Linie zweiter Ordnung vollkommen bestimmt, und wir können so viele Puncte derselben finden als wir wollen.

Um die Resultate der 296. Nummer in der Verallgemeinerung zu construiren, können wir eine Ellipse und eine Hyperbel, welche eine Axe gemeinschaftlich haben, und in denen das Axen-Verhältnifs dasselbe ist, mit einander verbinden.

298. Wir wenden uns nun zu der Gleichung (3) der 289. Nummer, nemlich zu folgender:

$$\frac{2\mu\gamma+\sigma+\sigma'}{1+\mu} = \zeta+\zeta'. \qquad (1)$$

Aus dieser Gleichung verschwindet μ, wenn:

$$\sigma+\sigma' = 2\gamma, \qquad (2)$$

und alsdann erhalten wir:

$$2\gamma = \sigma+\sigma' = \zeta+\zeta', \qquad (3)$$

---

*) *Recherches sur la détermination d'une hyperbole equilatère au moyende quatre conditions données.* Par. MM. Brianchon et Poncelet. Gergonne Ann. XI, p. 205 — 220.

**) a. a. O.

Digitized by Google

wo sich im Allgemeinen ζ und ζ' auf ein zwiefaches Linien-System beziehen. Die allgemeine Bedeutung der Bedingungs-Gleichung (2) ist, dafs die beiden geraden Linien des ursprünglichen Systems die Axe der y in zweien solchen Puncten schneiden, die gleichweit von demjenigen Puncte abstehen, in welchem der alle dieser Axe parallele Chorden halbirende Durchmesser derselben begegnet. Wenn also die beiden geraden Linien des ursprünglichen Systems diese Bedingung erfüllen, so findet nach der Gleichung (3) dasselbe Statt für die beiden geraden Linien jedes der resultirenden Systeme. Hiernach ergeben sich nachstehende einzelne Resultate:

Wenn man auf einer Chorde oder ihrer Verlängerung zwei solche Puncte annimmt, die von der Mitte der Chorde und also auch von den Durchschnitten derselben mit der Curve gleichweit entfernt sind, und durch diese Puncte zwei beliebige gerade Linien legt, welche die Curve in vier Puncten schneiden, so begegnet jedes derjenigen Linien-Paare, die diese vier Puncte, paarweise genommen, verbinden, der Chorde oder ihrer Verlängerung wiederum in zwei solchen Puncten, die von der Mitte der Chorde, und also auch von den beiden obigen Durchschnitten, gleichweit abstehen.

Dieser Satz besteht auch dann noch, wenn wir die geraden Linien des ursprünglichen Systems beide durch die Mitte der Chorde legen. Lassen wir überdiefs noch diese beiden Linien in eine einzige zusammenfallen, so erhalten wir als einziges resultirende System zwei Tangenten, deren Durchschnitte mit obiger Chorde gleichweit von den Durchschnitten dieser mit der Curve abstehen. Und, umgekehrt, wenn wir von zwei Puncten einer geraden Linie, die gleichweit von den Durchschnitten derselben mit der Curve abstehen, Tangenten an dieselbe legen, so können wir die beiden Paare von Berührungs-Puncten durch vier gerade Linien mit einander verbinden; zwei dieser geraden Linien gehen durch die Mitte der auf der ersten geraden Linie von der Curve interceptirten Chorde, die zwei anderen aber sind dieser Linie parallel, was mit dem Vorstehenden durchaus in Uebereinstimmung ist; denn jede dieser Berührungs-Chorden ist als ein System zweier zusammenfallenden Linien anzusehen, die beide der beliebig angenommenen Chorde in unendlicher Entfernung begegnen, jedoch so, dafs diese Durchschnitts-Puncte zu beiden Seiten liegen.

Statt der bisher betrachteten, die Linie zweiter Ordnung schneidende, gerade Linie können wir auch eine Tangente oder auch eine der Curve nicht begegnende gerade Linie nehmen; wofür sich sogleich die Modificationen der vorstehenden Sätze ergeben.

Wir können endlich noch das ursprüngliche System auf unendlichmalig verschiedene Weise so bestimmen, dafs eine gerade Linie eines resultirenden Systems durch einen festen Punct der zweiten Axe, durch den Punct $(-\zeta, 0)$ geht; alsdann geht die zweite Linie des Systems ebenfalls durch einen festen Punct

$$(-\zeta', 0) \quad \text{oder} \quad ((\zeta - 2\gamma), 0).$$

299. Wir wollen in dieser Nummer die Gleichung (5) der 289. Nummer, nemlich folgende:

$$\frac{\mu\epsilon + \sigma\sigma'}{1+\mu} = \zeta\zeta',$$

gerade so behandeln, wie die früheren. Aus dieser Gleichung verschwindet μ, wenn:

$$\epsilon = \sigma\sigma',$$

und alsdann ergibt sich:

$$\epsilon = \sigma\sigma' = \zeta\zeta'.$$

Digitized by Google

Wenn wir also auf der Axe der y irgend zwei Puncte bestimmen, deren Abstände vom Anfangs-Puncte, in einander multiplicirt, ein Product geben, das gleich ist ϵ (also gleich dem Producte der Ordinaten der Durchschnitte der Curve mit der zweiten Axe), und wir durch diese beiden Puncte ein System zweier geraden Linien legen, so schneiden die beiden Linien jedes der resultirenden Systeme die zweite Axe unter denselben Beziehungen. Wenn wir überdiefs das ursprüngliche System so bestimmen, dafs eine Linie eines resultirenden Systems durch einen festen Punct der zweiten Axe geht, so geht die andere Linie desselben Systems ebenfalls durch einen festen Punct; ist jene Linie der zweiten Axe parallel, so geht die andere durch den Anfangs-Punct, und umgekehrt. Wir gehen hier in kein Detail ein und heben nur Folgendes beispielweise hervor.

Wenn wir durch irgend einen Punct zwei Tangenten an eine Linie zweiter Ordnung und durch denselben Punct irgend eine gerade Linie legen, die der Curve begegnet, und jenen Punct als Anfangs-Punct, diese Linie als zweite Axe betrachten, so erhalten wir zwei Puncte, die den obigen Forderungen entsprechen, wenn wir die Mitte der auf der geraden Linie interceptirten Chorde und den Durchschnitt dieser Linie mit der Berührungs-Chorde nehmen (270). Hiernach ergibt sich eine specielle Construction, und indem wir noch mehr ins Besondere gehen, erhalten wir folgenden Satz:

Wenn man von irgend einem beliebigen Puncte Tangenten an eine Linie zweiter Ordnung zieht, und in dieselbe ein Dreieck beschreibt, dessen Basis die Berührungs-Chorde ist, so werden von jedem der beiden Schenkel des Dreiecks diejenigen Chorden halbirt, welche dem andern Schenkel parallel sind und, genugsam verlängert, durch den Durchschnitt der Tangenten gehen; und umgekehrt, wenn man irgend ein Dreieck in eine Linie zweiter Ordnung beschreibt, so schneiden sich zwei Chorden, die einem Schenkel desselben parallel sind, und von dem andern halbirt werden in dem Durchschnitte der in den Winkel-Puncten der Basis an die Curve gelegten Tangenten. Dieser Punct bleibt also derselbe, wohin die Spitze des Dreiecks auch fallen mag, so lange nur die Basis dieselbe bleibt.

300. Wir gehen weiter. Wenn wir die beiden Theile je zweier folgender fünf Gleichungen:

$$\frac{2\mu\alpha+x+x'}{1+\mu} = \xi+\xi', \tag{1}$$

$$\frac{\mu\beta+xx'}{1+\mu} = \xi\xi', \tag{2}$$

$$\frac{2\mu\gamma+\sigma+\sigma'}{1+\mu} = \zeta+\zeta', \tag{3}$$

$$\frac{2\mu\delta+x\sigma'+x'\sigma}{1+\mu} = \xi\zeta'+\xi'\zeta, \tag{4}$$

$$\frac{\mu\varepsilon+\sigma\sigma'}{1+\mu} = \zeta\zeta', \tag{5}$$

in einander dividiren, so erhalten wir einen vom Coefficienten μ unabhängigen Ausdruck, wenn die jedesmaligen, in jenen beiden Gleichungen vorkommenden Coefficienten aus der Gleichung der Curve Null sind. Durch diese Bedingung erhalten wir Bestimmungen über die Natur der Curve oder die Annahme des Axen-Systems. Wir können hier nicht alle einzelnen Fälle behandeln, die folgenden Nummern werden aber hinlänglich deutlich machen, wie wir dabei zu verfahren haben.

Digitized by Google

301. Wenn wir zugleich: Fig. 19.

$$\gamma = 0, \quad \varepsilon = 0,$$

setzen, so stellt die Gleichung:

$$y^2+2\alpha xy+\beta x^2+2\gamma y+2\delta x+\varepsilon = 0,$$

irgend eine beliebige auf irgend eine ihrer Tangenten, als Axe der y, bezogene Linie zweiter Ordnung dar; der Berührungs-Punct ist zum Anfangs-Puncte der Coordinaten, die Richtung der ersten Axe aber ganz beliebig genommen. Bei dieser Annahme reduciren sich die Gleichungen (3) und (5) der vorigen Nummer auf folgende:

$$\frac{\sigma+\sigma'}{1+\mu} = \zeta+\zeta',$$

$$\frac{\sigma\sigma'}{1+\mu} = \zeta\zeta',$$

und wenn wir dividiren, kommt:

$$\frac{\sigma+\sigma'}{\sigma\sigma'} = \frac{\zeta+\zeta'}{\zeta\zeta'} \qquad (1)$$

oder auch:

$$\frac{1}{\sigma'}+\frac{1}{\sigma} = \frac{1}{\zeta}+\frac{1}{\zeta'},$$

wo sich der letzte Theil dieser Gleichungen auf ein zwiefaches Linien-System bezieht. Wenn man also irgend vier Puncte (von denen zwei oder auch zweimal zwei zusammenfallen können) auf einer Linie zweiter Ordnung beliebig annimmt, und man diese Puncte, paarweise genommen, was auf dreifache Art geschehen kann, durch zwei gerade Linien verbindet, so schneiden die Linien jedes Paares jede beliebige Berührende so, dafs die Summe der reciproken Werthe der Abstände der beiden Durchschnitte vom Berührungs-Puncte für alle drei Linien-Systeme dieselbe ist. In der 19. Figur seyen M, M', M'' und M''' die vier beliebig angenommenen Puncte, $\sigma\sigma'$ die beliebige Tangente, und T der Berührungs-Punct. Zugleich ist der besondere Fall genommen, dafs eine der Verbindungs-Linien, nemlich MM''', der Tangente parallel ist. Alsdann haben wir, indem wir auf die Lage der Durchschnitte der verschiedenen Chorden mit der Tangente in Beziehung auf den Berührungs-Punct Rücksicht nehmen,

$$\frac{1}{T\sigma}-\frac{1}{T\sigma'} = \frac{1}{T\zeta}-\frac{1}{T\zeta'} = \frac{1}{T\zeta_{,}}.$$

302. Wenn vier Puncte und eine Tangente einer Linie zweiter Ordnung gegeben sind, so können wir nach der vorigen Nummer den Berührungs-Punct bestimmen. Seyen nemlich M, M', M'' und M''' irgend vier gegebene Puncte, durch diese vier Puncte lege man zwei Paare von geraden Linien, etwa MM'' und MM''', MM' und M''M''', die der gegebenen die Curve berührenden geraden Linie in den Puncten σ und σ', ζ und ζ' begegnen. Durch die letzten Buchstaben, mit negativem Zeichen genommen, bezeichnen wir, wie bisher, die Abstände der Durchschnitte vom gesuchten Berührungs-Puncte, dessen (unbekannten) Abstand von irgend einem festen, beliebig auf der Tangente angenommenen, Puncte wir Z nennen wollen. Alsdann erhalten wir nach (1), indem wir σ mit $(z+\sigma)$, σ mit $(z+\sigma')$, ζ mit $(z+\zeta)$ und ζ' mit $(z+\zeta')$ vertauschen folgende Gleichung:

$$\frac{\sigma+\sigma'+2z}{(\sigma+z)(\sigma'+z)} = \frac{\zeta+\zeta'+2z}{(\zeta+z)(\zeta'+z)}.$$

Diese Gleichung reducirt sich in Beziehung auf z auf den zweiten Grad und z, hat also einen zwiefachen Werth, dem zwei verschiedene Puncte entsprechen. Wir sehen hieraus, dafs es im Allgemeinen **zwei** verschiedene Linien zweiter Ordnung gibt, welche

durch die vier gegebenen Puncte gehen und die gegebene gerade Linie berühren. Wir können diese Curven construiren, da wir fünf Puncte jeder derselben kennen.

Fig. 20. 303. Wenn wir, um ein zweites Beispiel zu nehmen, zugleich:

$$\beta = 0, \quad \varepsilon = 0,$$

setzen, und wir mithin eine Parabel betrachten, die auf einen ihrer Durchmesser und der Tangente in dessen Scheitel bezogen ist, oder eine Hyperbel, die auf eine, einer ihrer Asymptoten parallelen geraden Linie, als erste Axe, und den Durchschnitt derselben mit der Curve als Anfangs-Punct bezogen ist, so gehen die Gleichungen (2) und (5) der 300. Nummer in folgende über:

$$\frac{xx'}{1+\mu'} = \xi\xi',$$

$$\frac{\sigma\sigma'}{1+\mu} = \zeta\zeta',$$

und wenn wir die beiden ersten Theile dieser Gleichungen in einander dividiren, ergibt sich:

$$\frac{\sigma\sigma'}{xx'} = \frac{\zeta\zeta'}{\xi\xi'}.$$

$\left(-\frac{\sigma}{x}\right)$ und $\left(-\frac{\sigma'}{x'}\right)$, $\left(-\frac{\zeta}{\xi}\right)$ und $\left(-\frac{\zeta'}{\xi'}\right)$ sind die Abscissen derjenigen Puncte, in welchen die beiden geraden Linien des ursprünglichen und des resultirenden Systems (letzteres ist in der Regel ein zwiefaches) die erste Axe schneidet, für welche wir irgend eine beliebige, den Durchmessern der Parabel oder einer der beiden Asymptoten der Hyperbel parallele, gerade Linie, auf der wir die Abscissen von deren Durchschnitt mit der Curve an rechnen, nehmen können. Wir haben hiernach in der 20. Figur, wo M, M', M'' und M''' irgend vier beliebige Puncte der Curve sind und AF die erste Axe ist:

$$OA.OB = OC.OF = OD.OE. \qquad (1)$$

Wenn man also in eine Parabel oder eine Hyperbel irgend ein Viereck beschreibt, so schneiden je zwei gegenüberstehende Seiten und die beiden Diagonalen jeden Durchmesser der Parabel oder jede einer Asymptote der Hyperbel parallele gerade Linie so, dafs die Producte der jedesmaligen beiden, vom Durchschnitte mit der Curve an gerechneten, Segmente gleich sind.

Wenn wir drei der beliebig angenommenen Puncte, etwa M, M' und M'', als fest betrachten, den vierten aber M''' auf der Curve fortrücken lassen, so sind A, E und F feste Puncte, so dafs wir, wo auch der Punct M''' liegen mag, folgende Gleichungen haben:

$$\frac{OB}{OC} = \frac{OF}{OA} = const., \quad \frac{OD}{OC} = \frac{OF}{OE} = const., \quad \frac{OB}{OD} = \frac{OE}{OA} = const.$$

Die erste Axe wird also von zwei beliebigen geraden Linien, die durch irgend zwei feste Puncte (M und M'', M und M', M' und M'') gehen, und sich in einem auf der Curve beliebig fortrückenden Puncte, (in M'''), begegnen, so geschnitten, dafs die Abscissen der jedesmaligen beiden Durchschnitte immer in demselben Verhältnisse stehen. Hierin liegt der bekannte Satz, den wir schon beiläufig in der Note zur 272. Nummer anführten, und bei dessen Aussage wir hier nicht verweilen.

Wenn wir die erste Axe durch den Durchschnitt der beiden Diagonalen oder zweier gegenüberstehenden Seiten des Vierecks MM'M''M''' legen, so ist die Abscisse dieses Durchschnittes mittlere Proportionale zwischen denjenigen beiden Segmenten, welche in

Digitized by Google

dem einen Falle jedem der beiden Paare gegenüberliegender Seiten, in dem andern Falle einem Paare derselben, so wie den beiden Diagonalen entsprechen.

Es können auch in der bisher betrachteten Construction zwei Puncte des Vierecks MM'M"M"' in einen einzigen zusammenfallen; dasselbe kann auch zwiefach geschehen. Diesem letztern Falle entsprechen folgende Sätze:

Wenn man an eine Parabel oder eine Hyperbel irgend zwei Tangenten legt und die Berührungs-Chorde zieht, so wird jeder Durchmesser der Parabel oder jede, einer Asymptote der Hyperbel parallel gezogene gerade Linie, so geschnitten, dafs dasjenige Segment, welches zwischen der Curve und der Berührungs-Chorde liegt, mittlere Proportionale zwischen denjenigen beiden Segmenten ist, die zwischen der Curve und den beiden Tangenten liegen. Wenn der Durchmesser oder die einer Asymptote parallele gerade Linie durch den Durchschnitt der Tangenten geht, so wird das zwischen diesem Durchschnitte und der Berührungs-Chorde liegende Segment von der Curve halbirt.

304. Nach der Gleichung (1) können wir, wenn irgend vier Puncte und eine gerade Linie gegeben sind, beliebig viele Puncte derjenigen Hyperbel bestimmen, welche durch die gegebenen Puncte geht, und eine der gegebenen geraden Linie parallele Asymptote hat. Seyen M, M', M" und M"' die vier gegebenen Puncte, AF irgend eine gerade Linie, die der gegebenen parallel ist und deren Durchschnitt mit der Curve wir bestimmen wollen. Wir ziehen MM"' und M'M", MM" und M'M"', die der geraden Linie BF in C, F, E und D begegnen; wenn wir alsdann auf derselben geraden Linie irgend einen festen Punct annehmen, etwa A, und:

$$AO = z, \quad AC = c, \quad AF = f, \quad AE = e, \quad AD = d,$$

setzen, so erhalten wir aus (1) zur Bestimmung von z folgende Gleichung:

$$(c-z)(f-z) = (e-z)(d-z),$$

die, wenn wir entwickeln, sich auf den ersten Grad reducirt und folgende wird:

$$((e+d)-(c+f))z+cf-de = 0.$$

Wir können diese Gleichung noch vereinfachen, indem wir statt des Punctes A irgend einen der vier Durchschnitts-Puncte C, D, E oder F nehmen.

Es ist gut zu bemerken, dafs wir für zwei bestimmte Richtungen der gegebenen geraden Linie rücksichtlich der vier gegebenen Puncte nicht eine Hyperbel, sondern eine Parabel erhalten.

305. Wenn die gerade Linie AF eine der Asymptoten selbst ist, so ist z gröfser als jede gegebene Gröfse, so dafs wir in der End-Gleichung der vorigen Nummer das von z unabhängige Glied vernachlässigen können, und also folgenden Ausdruck erhalten:

$$e+d = c+f,$$

oder:

$$e-c = f-d.$$

Wenn wir also in eine Hyperbel irgend ein Viereck beschreiben und in demselben die Diagonalen ziehen, so wird jede der Asymptoten von den beiden Paaren gegenüberstehender Seiten, so wie von einem derselben und den beiden Diagonalen so geschnitten, dafs die zwischen den beiden jedesmalig zusammengestellten Linien-Paare liegenden Segmente einander gleich sind.

Wenn wir zwei Puncte des Vierecks in einen einzigen zusammenfallen lassen, so erhalten wir eine Modification des letzten Satzes; wenn wir zugleich auch die beiden übri-

Digitized by Google

gen Puncte in einen einzigen zusammenfallen lassen, so ist der entsprechende Satz folgender:

Die Berührungs-Chorde halbirt das auf jeder der Asymptoten von irgend zweien Tangenten bestimmte Segment.

306. Wir brechen hier ab, um uns nun zur allgemeinen Theorie der Pole und Polaren zu wenden. Zum Behuf der nächsten Erörterungen nehmen wir für die Gleichung der Curve immer noch die allgemeine Gleichung:

$$y^2+2\alpha xy+\beta x^2+2\gamma y+2\delta x+\epsilon = 0, \qquad (1)$$

für das ursprüngliche Linien-System aber zwei im Anfangs-Puncte der Coordinaten sich schneidende gerade Linien, welche, beide zugleich, durch eine Gleichung von folgender Form dargestellt werden:

$$y^2+(\varkappa+\varkappa')xy+\varkappa\varkappa' x^2 = 0. \qquad (2)$$

Bei diesen Voraussetzungen verwandeln sich die Gleichungen (7)—(9) der 285. Nummer in folgende:

$$\frac{2\mu\gamma}{1+\mu} = -(\xi+\xi')x''-2y'', \qquad (4)$$

$$\frac{2\mu\delta}{1+\mu} = -(\xi+\xi')y''-2\xi\xi' x'', \qquad (5)$$

$$\frac{\mu\epsilon}{1+\mu} = y''^2+(\xi+\xi')x''y''+\xi\xi' x''^2. \qquad (6)$$

Wenn wir die erste dieser Gleichungen mit $\frac{y''}{2}$, die zweite mit $\frac{x''}{2}$ multipliciren, alsdann alle drei Gleichungen addiren, und endlich alle Glieder der resultirenden Gleichung durch $\frac{\mu}{1+\mu}$ dividiren, so kommt:

$$\gamma y''+\delta x''+\epsilon = 0. \qquad (7)$$

Diese Gleichung ist unabhängig von $\varkappa$ und $\varkappa'$ und stellt, wenn wir y'' und x'' als veränderliche Gröfsen betrachten, die Polare des Anfangs-Punctes, oder des Durchschnittes der beiden geraden Linien des ursprünglichen Systems (1) dar. Diese Polare enthält also diejenigen Puncte, in welchen die beiden Linien der beiden resultirenden Systeme sich schneiden. Da wir ursprünglich auch von einem dieser beiden resultirenden Systeme hätten ausgehen können, und alsdann auf gleiche Weise gefunden hätten, dafs die Polare des Durchschnittes der Linien dieses Systems durch den Durchschnitt der Linien des andern dieser Systeme und durch den vorhin zum Anfangs-Puncte der Coordinaten genommenen Durchschnitt geht, so haben wir folgende Sätze bewiesen:

Wenn man in irgend eine Linie zweiter Ordnung irgend ein Viereck beschreibt, die Diagonalen desselben zieht, und die gegenüberstehenden Seiten bis zu ihrem Durchkreuzen verlängert, so erhalten wir drei Durchsehnitts-Puncte, von denen je zwei auf der Polaren des dritten liegen. Wenn man in irgend eine Linie zweiter Ordnung mehrere Vierecke beschreibt, deren beide Diagonalen oder deren zwei gegenüberliegende Seiten sich in demselben Puncte sehneiden, so liegen in dem einen Falle die Durchschnitte der beiden Paare gegenüberliegender Seiten, in dem andern Falle der beiden noch übrigen gegenüberstehenden Seiten und der beiden Diagonalen auf ein und derselben geraden Linie für alle jene Vierecke, nemlich auf der Polaren jenes festen Durchsehnitts-Punctes.

307. Da die Gleichung (3) auch zwei gerade Linien darstellen kann, die in eine einzige durch den Anfangs-Punct gehende gerade Linie zusammenfallen, und alsdann das

Digitized by Google

resultirende System aus den in den beiden Durchschnitten dieser Linie mit der Curve, an die Curve gelegten Tangenten besteht, so liegt in dem Vorstehenden als besonderer Fall auch folgender Satz:

Wenn man durch irgend einen festen Punct gerade Linien legt, die einer Linie zweiter Ordnung begegnen, so schneiden sich die Tangenten in jedem Paare von Durchschnitten auf ein und derselben geraden Linie, der Polaren des Anfangs-Punctes; und, umgekehrt, wenn man von beliebigen Puncten irgend einer geraden Linie Tangenten-Paare an eine Linie zweiter Ordnung legt, so gehen alle Berührungs-Chorden durch ein und denselben Punct, den Pol der geraden Linie.

308. Wenn wir ein System zweier geraden Linien als Linie zweiter Ordnung nehmen, so liegt in der letzten analytischen Entwicklung der Beweis desjenigen Satzes, auf den sich die 17. Figur der 1. Tafel bezieht, und der schon in der 63. Nummer bewiesen worden ist. Sind nemlich in der eben angeführten Figur OY und OX die beiden, die Curve vertretenden, geraden Linien, und gehen die Linien aller ursprünglichen Systeme durch den beliebig angenommenen Punct S, so ist die gerade Linie Oσ der Ort für die Durchschnitte der beiden Linien der resultirenden Systeme. Zugleich folgt aus der Schlufs-Erörterung der 268. Nummer, dafs PS in σ und Q harmonisch geschnitten wird.

309. Wenn wir durch irgend einen festen Punct O zwei gerade Linien legen, die einer gegebenen Linie zweiter Ordnung in den vier Puncten M, M′, M″ und M‴ begegnen, so ist für alle diejenigen Linien zweiter Ordnung, welche durch dieselben vier Puncte gehen, ein und dieselbe gerade Linie PO′ Polare des festen Punctes O. Als eine jener Linien zweiter Ordnung können wir ein zwiefaches System zweier geraden Linien nehmen, O′M′ und O′M oder MM″ und M′M‴. Nach der vorigen Nummer wird also OM′ in M und R harmonisch geschnitten, so dafs: Fig. 21.

$$OM : MR = OM' : RM'.$$

Es ist leicht ersichtlich, dafs hierin folgender allgemeine Satz enthalten ist:

Wenn man durch irgend einen beliebigen Punct eine beliebige gerade Linie zieht, welche irgend einer gegebenen Curve zweiter Ordnung begegnet, so wird diese gerade Linie von der Polaren des Punctes (im besondern Falle, dafs dieser Punct aufserhalb liegt, von der Berührungs-Chorde) und der Curve harmonisch geschnitten.

310. Der Pol jeder geraden Linie, die durch P, den Durchschnitt der beiden Diagonalen MM″ und M′M‴, geht, liegt auf der Polaren dieses Punctes, also auch der Pol jeder der Diagonalen selbst. Wenn wir also in M, M′, M″ und M‴ Tangenten legen, so erhalten wir eine vollständige, um die Curve beschriebene, vierseitige Figur, deren gegenüberliegende Seiten NN′ und N″N‴, NN‴ und N′N″ sich in zwei Puncten Q und Q′ schneiden, die auf der Polaren von P, auf OO′, liegen. Aehnlich liegt der Pol jeder geraden Linie, die durch O geht, also auch der Pol von MM′, so wie von M″M‴, oder N″ und N, auf der Polaren von O, mithin auf PO′. Ebenso liegen endlich N′ und N‴ auf PO, der Polaren von O′. Hierin sind mehrere einzelne Sätze enthalten, die wir in Nachstehendem zusammenfassen wollen. Fig. 21.

Wenn man in eine beliebige Curve zweiter Ordnung irgend ein Viereck (MM′M″M‴) beschreibt, und die gegenüberliegenden Seiten desselben bis zu ihrem Durchschnitte verlängert, ferner ein zweites Viereck (NN′N″N‴) um die Curve beschreibt, dessen Seiten

dieselbe in den Winkel-Puncten des erstern Vierecks berühren, und wiederum die gegenüberliegenden Seiten bis zu ihrem Durchschnitte verlängert, und man also auf diese Weise zwei vollständige vierseitige Figuren erhält: so fallen die beiden dritten Diagonalen dieser Figuren in eine einzige gerade Linie ($O'QOQ'$) zusammen, während die ersten und zweiten Diagonalen sich alle vier in demselben Punete (P), dem Pole jener geraden Linie, kreuzen. Jede der beiden ersteren Diagonalen der umschriebenen Figur (NN'' und $N'N'''$) enthält zugleich nebst dem Durchschnitte (P) der beiden Diagonalen des eingeschriebenen Vierecks auch noch einen der beiden Durchschnitte der gegenüberliegenden Seiten desselben (O' und O). Der Durchschnitt je zweier der drei Diagonalen einer der Curve umschriebenen vollständigen vierseitigen Figur ist der Pol der jedesmaligen dritten Diagonale.

Da OM' in M und R harmonisch getheilt ist, so wird auch jede andere gerade Linie, die durch O geht, von $N''M$, $N''R$ und $N''M'$ harmonisch geschnitten, also auch ON' und $O'Q'$, so dafs:

$$ON''' : N'''P = ON' : PN',$$
$$O'Q : QO = O'Q' : OQ'.$$

Auf ähnliche Weise wird auch $O'N''$ in N und P harmonisch getheilt.

Fig. 21. 311. Wir können nach der, in der 306. Nummer entwickelten, allgemeinen Theorie der Pole und Polaren, auf eine leichte Weise von einem gegebenen Puncte aus Tangenten an eine gegebene Linie zweiter Ordnung legen. Sey O der gegebene Punct; durch diesen Punct lege man irgend zwei gerade Linien, die der Curve in M und M', M''' und M'' begegnen, man ziehe ferner MM''' und $M'M''$, MM'' und $M'M'''$, die sich in O' und P schneiden, und verbinde endlich O' und P durch eine gerade Linie. Die Durchschnitte der, auf diese Weise bestimmten, geraden Linie mit der Curve sind alsdann diejenigen beiden Puncte, in welchen die Curve von den durch den gegebenen Punct O gehenden Tangenten berührt wird.

312. Der Pol jeder geraden Linie, welche durch den Mittelpunct der Curve geht, liegt unendlich weit; die in den End-Puncten jedes Durchmessers an die Curve gelegten Tangenten sind parallel. Je zwei Durchmesser sind die beiden Diagonalen eines in die Curve beschriebenen Parallelogrammes. Wenn wir in die Curve irgend ein Viereck mit zwei parallelen Seiten beschreiben, so liegt einer der, durch dasselbe bestimmten, conjugirten Puncte unendlich weit; diejenige gerade Linie, welche durch die beiden übrigen dieser Puncte geht, ist mithin ein Durchmesser und zwar derjenige, welcher die beiden parallelen Seiten des Vierecks halbirt. Hiernach erhalten wir nachstehende Construction der Aufgabe, Tangenten an eine gegebene Linie zweiter Ordnung zu legen, die irgend einer gegebenen geraden Linie parallel sind. Man trage in die gegebene Curve irgend zwei beliebige, der gegebenen geraden Linie parallele, Chorden ein, und verbinde die End-Puncte derselben durch zwei Paar gerader Linien. Auf diese Weise erhalten wir zwei Durchschnitte, durch welche derjenige Durchmesser geht, welcher auf der Curve zwei Puncte bestimmt, in welchen dieselbe von den beiden gesuchten Tangenten berührt wird.

Fig. 22. 313. Die Polare eines Punctes ist den Coordinaten desjenigen Durchmessers, der durch jenen Punct geht, parallel. Für den Fall des Kreises, auf den wir uns hier beschränken wollen, steht also derjenige Durchmesser, der durch irgend einen Punct geht,

Digitized by Google

auf der Polaren dieses Punctes senkrecht, und, umgekehrt, diejenige gerade Linie, welche auf irgend einer gegebenen geraden Linie senkrecht steht, und durch den Pol derselben geht, geht auch durch den Mittelpunct des Kreises. Verbindet man also irgend drei, in Beziehung auf einen gegebenen Kreis, zugeordnete Puncte O, O' und P durch gerade Linien zu einem Dreieck, so gehen die von jedem der Puncte auf die gegenüberliegenden Seiten gefällten Perpendikel alle drei durch den Mittelpunct des gegebenen Kreises, durch C. Hierin liegt also wiederum ein indirecter Beweis des sich Kreuzens dieser Perpendikel in demselben Puncte, zugleich mit einer neuen geometrischen Beziehung dieses Punctes.

Wenn drei Puncte O, O' und P gegeben sind, so können wir einen Kreis beschreiben, für welche die drei gegebenen Puncte zugeordnete sind. Denn, wenn wir den Mittelpunct C des gesuchten Kreises nach dem Vorstehenden bestimmen, so sind die Fufs-Puncte der zum Behuf dieser Construction von O, O' und P aus, auf die gegenüberliegenden Seiten gefällten Perpendikel, nach der Figur also o, o' und p die zugeordneten Pole obiger drei Puncte. Wir brauchen also nur aus dem gefundenen Mittelpuncte einen Kreis zu beschreiben, der z. B. die Puncte P und p zu zugeordneten Polen hat. Dieser Kreis ist alsdann der verlangte. Es ist offenbar, dafs der Mittelpunct des Kreises nicht innerhalb des Dreiecks OO'P fallen kann, und mithin dieses Dreieck, wenn der verlangte Kreis möglich seyn soll, ein stumpfwinkliges seyn mufs.

Wir können die Construction der 22. Figur noch aus einem andern Gesichts-Puncte betrachten. Wenn wir nemlich von dem Mittelpuncte des Kreises und von zweien der drei zugeordneten Puncte, als von bekannten Puncten, ausgehen, so gibt uns gerade dieselbe Construction, die uns vorhin den Mittelpunct gab, nun den dritten zugeordneten Punct. Dieser Punct liegt z. B., wenn wir für die beiden ersten zugeordneten Puncte O und O' nehmen, in dem Kreuzungs-Puncte P der drei Perpendikel des Dreiecks OO'C.

Auf entsprechende Weise können wir, wenn irgend eine beliebige Linie zweiter Ordnung und zwei beliebige Puncte gegeben sind, den dritten zugeordneten Punct bestimmen.

314. Wenn fünf Puncte gegeben sind, so können wir nach der Theorie der Pole ungemein leicht beliebig viele Puncte derjenigen Linie zweiter Ordnung, welche durch jene fünf Puncte sich legen läfst, bestimmen. Seyen (wobei wir die Figur uns in Gedanken hinzuthun) A, B, C, D und E die fünf gegebenen Puncte. Zum Behuf der Construction eines sechsten Punctes der gesuchten Curve ziehe man AB und CD, die sich in P, AC und BD, die sich in P' und endlich AD und BC, die sich in P'' schneiden, Alsdann ist P'P'' die Polare von P für jede durch die vier Puncte A, B, C und D gehende Curve und mithin auch für die gesuchte. Zieht man nun PE, so können wir (nach 309) auf dieser geraden Linie einen sechsten Punct der Curve construiren. Man erhält denselben Punct auf der Stelle, wenn man AE zieht, die der Polaren P'P'' in N begegne, und endlich BN, von welcher PE in jenem gesuchten sechsten Puncte geschnitten wird. Auf ähnliche Weise erhalten wir so viele Puncte der Curve, als wir wollen.

315. Wenn irgend fünf gerade Linien gegeben sind, so können wir beliebig viele Tangenten derjenigen Curve zweiter Ordnung, welche die gegebenen Linien berührt, construiren, ohne dafs die Curve selbst gegeben ist. Es mögen sich zwei der gegebenen Tangenten in A, zwei andere in B schneiden, und die fünfte Tangente derjenigen geraden Linie, welche durch A und B geht, in C begegnen. Alsdann können wir sogleich die andere durch C gehende Tangente bestimmen. Die in A und B sich schneidenden

Tangenten-Paare bilden nemlich eine vollständige vierseitige Figur, ebenso die in A und C sich schneidenden beiden Tangenten-Paare. Eine gemeinschaftliche Diagonale beider Figuren ist AB, die anderen Diagonalen schneiden sich in demselben Punct (310). Dieser Punct ergibt sich unmittelbar, da die erste vierseitige Figur vollständig gegeben ist, und ebenso, nachdem dieser Punct bestimmt ist, die vierte, uns unbekannte, Seite der zweiten vierseitigen Figur, oder, mit anderen Worten, die gesuchte, durch C gehende Tangente. Auf ähnliche Weise können wir so viele Tangenten finden, als wir wollen.

Fig. 21. 316. Wenn vier gerade Linien und ein Punct gegeben sind, so können wir eine Linie zweiter Ordnung bestimmen, welche die gegebenen geraden Linien berührt und durch den gegebenen Punct geht. Die Theorie der Pole gibt uns hier sogleich noch drei Puncte, so dafs wir auf diese Weise die Aufgabe auf die Construction der 302. Nummer, wo vier Puncte und eine Tangente die gegebenen Bestimmungs-Stücke waren, zurückführen können. Wir wollen uns hier auf die 21. Figur beziehen, ohne die Constructionen alle auszuführen.

Sey U der gegebene Punct, und seyen QN″, QN′, Q′N′ und Q′N die vier gegebenen geraden Linien, die eine vollständige vierseitige Figur bilden, deren drei Diagonalen sich in O, O′ und P schneiden. OP ist mithin für jede Curve, welche von den vier gegebenen geraden Linien berührt wird, die Polare von O′; ziehen wir also O′U, die von dieser Polaren in S geschnitten wird, so erhalten wir einen zweiten Punct der gesuchten Curve, indem wir auf der letztgezogenen geraden Linie zu O′, S und U den vierten harmonischen Theilungs-Punct V bestimmen (309).

Am leichtesten verfahren wir hierbei auf folgende Weise. Man ziehe QU, die der OP in irgend einem Puncte begegnet, und verbinde diesen Punct mit Q′ durch eine gerade Linie, von welcher alsdann O′U in dem verlangten Puncte V geschnitten wird. Diese Construction gründet sich darauf, dafs O′QOQ′ harmonisch getheilt ist.

Oder: man ziehe NU, welche der OP in irgend einem Puncte begegnet, und verbinde diesen Punct mit N″ durch eine gerade Linie. Diese Linie schneidet O′U im gesuchten Puncte V. Diese Construction gründet sich auf die harmonische Theilung von O′NPN″.

Wenn zwei Puncte U und V einmal bekannt sind, so ergibt sich unmittelbar ein dritter und vierter Punct durch die Durchschnitte von OV und PU, und von OU und VP.

Wir haben also vier Puncte bestimmt; da es (302) zwei Curven gibt, die den Bedingungen der Aufgabe entsprechen, so sind jene Puncte diejenigen Puncte, in welchen diese Curven sich schneiden, während die vier gegebenen geraden Linien gemeinschaftliche Tangenten derselben sind.

317. Wenn man in irgend eine Curve zweiter Ordnung mehrere Vierecke beschreibt, denen zwei Winkel-Puncte gemeinschaftlich sind, so haben alle diese Vierecke diejenige gerade Linie, welche jene festen Winkel-Puncte verbindet, entweder zu einer ihrer Diagonalen, oder zu einer ihrer Seiten. Es bleibt also einer der drei, durch jedes jener Vierecke bestimmten, drei zugeordneten Puncte auf einer geraden Linie, also geht die Polare jenes Punctes, d. h. diejenige gerade Linie, welche die jedesmaligen beiden übrigen Puncte verbindet, durch einen festen und unveränderlichen Punct, nemlich durch den Pol derjenigen geraden Linie, auf welcher der erste der drei zugeordneten Puncte fortrückt. Wir haben also folgenden Satz bewiesen:

Digitized by Google

In allen in eine beliebige Linie zweiter Ordnung beschriebenen Vierecke, welche irgend zwei Winkel-Puncte gemeinschaftlich haben, gehen diejenigen geraden Linien, welche die beiden Durchschnitte der gegenüberliegenden Seiten verbinden, wenn jene festen Winkel-Puncte gegenüberstehende sind, oder diejenigen geraden Linien, welche den Durchschnitt der beiden Diagonalen mit dem Durchschnitte der beiden durch die festen Winkel-Puncte gehenden gegenüberliegenden Seiten verbindet, wenn diese Puncte nicht gegenüberstehende sind: alle durch einen festen Punct *).

318. Nach dem Satze der vorigen Nummer können wir, wenn fünf Puncte gegeben sind, den Mittelpunct der durch diese fünf Puncte gehenden Linie zweiter Ordnung finden, und zugleich in diesen Puncten die Tangenten construiren. Seyen A, B, C, D und E die fünf gegebenen Puncte, wir können alsdann drei der Curve eingeschriebene Vierecke bestimmen, deren zwei Winkel-Puncte A und B sind, nemlich ABCD, ABDE und ABCE, und also drei gerade Linien finden, die durch denselben Punct, den Pol von AB gehen. Zwei dieser Linien sind zur Bestimmung dieses Poles hinreichend. Betrachten wir daher nur die beiden ersten Vierecke, und schneiden sich AD und BC in F, AC und BD in G, ferner AE und BD in F', AD und BE in G', so sind FG und F'G' die beiden geraden Linien, welche sich in dem in Rede stehenden Pol, den wir α nennen wollen, schneiden. Aα und Bα sind alsdann Tangenten, und diejenige gerade Linie, die α mit der Mitte von AB verbindet, geht durch den Mittelpunct der Curve. Auf ähnliche Weise können wir die Pole von BC, CD, DE und EA, die wir durch β, γ, δ und ϵ bezeichnen wollen, finden. In jedem dieser Puncte vereinigen sich drei, leicht sich ergebende, gerade Linien. α, β, γ, δ und ϵ sind die Winkel-Puncte eines um die Curve beschriebenen Fünfecks, dessen Seiten die Curve in den Winkel-Puncten des eingeschriebenen Fünfecks ABCDE berühren. Wir erhalten ferner, indem wir die Mitten der Seiten des letztgenannten Fünfecks mit den Polen derselben verbinden, fünf gerade Linien, die sich alle in demselben Puncte, dem Mittelpuncte der Curve, den wir also durch irgend zwei dieser Linien bestimmen können, schneiden.

319. Wenn fünf Puncte A, B, C, D und E gegeben sind, so können wir noch einen sechsten Punct F hinzunehmen, und diesen mit einem der gegebenen, etwa mit A, zusammenfallen lassen. Alsdann schneiden sich (292) AB und DE, BC und EF (oder EA), CD und FA (oder die Tangente in A) in drei Puncten ein und derselben geraden Linie. Hiernach ergibt sich wiederum eine Construction der Tangente in A, und dem entsprechend der Tangenten in den übrigen vier Puncten.

320. *In jedem um irgend eine Linie zweiter Ordnung beschriebenen Sechseck schneiden sich die drei Diagonalen in ein und demselben Puncte.*

Dieser Satz folgt nach der Theorie der Pole unmittelbar aus dem Satze der 292. Nummer vom eingeschriebenen Sechseck. Seyen α, β, γ, δ, ϵ und $\varkappa$ die sechs Winkel-Puncte der umschriebenen Figur, alsdann sind diese sechs Puncte die Pole der Seiten eines eingeschriebenen Sechsecks, die wir der Ordnung nach durch AB, BC, CD, DE, EK und KA bezeichnen. Wenn wir nun in der umschriebenen Figur $\alpha\delta$ ziehen, so geht

*) Dieser Satz ist für den Fall des Kreises und nicht in seiner ganzen Ausdehnung von H. Hschette bemerkt worden nach: Puissant, Recueil etc. Nro. 66.

diese Linie durch die Pole von AB und DE, und ist also die Polare des Durchschnitts dieser beiden Seiten der eingeschriebenen Figur; ebenso ist $\beta\varepsilon$ die Polare des Durchschnitts von BC und EK, und endlich $\gamma\varkappa$ die Polare des Durchschnitts von CD und KA. Da diese drei Durchschnitte in gerader Linie liegen, so gehen die Polaren derselben durch ein und denselben Punct, den Pol jener geraden Linie. Hiermit ist der obige Satz bewiesen, und zwar in derselben Ausdehnung als der Satz der 292. Nummer.

Der eben bewiesene Satz ist ein besonderer Fall von folgendem:

Wenn zwei Sechsecke dadurch bestimmt sind, dafs die Winkel-Puncte des einen, rücksichtlich irgend einer beliebigen Linie zweiter Ordnung, die Pole der Seiten des andern sind, und wenn überdiefs in dem einen Sechseck die Durchschnitte der drei Paare gegenüberliegender Seiten in gerader Linie liegen: so schneiden sich die drei Diagonalen des andern Sechsecks in ein und demselben Puncte.

Der Beweis ist dem obigen ganz gleich *).

321. Aus dem Satze vom umschriebenen Sechsecke, den wir in der vorigen Nummer bewiesen haben, ergibt sich, indem wir die Richtung von zwei an einander stofsenden Seiten so nehmen, dafs dieselben nur eine einzige gerade Linie bilden, und mithin der Berührungs-Punct dieser geraden Linie mit der Curve an die Stelle eines Winkel-Punctes des Sechsecks tritt, folgender Satz:

Wenn man in einem umschriebenen Fünfecke zwei Paare gegenüberstehender Winkel-Puncte durch zwei Diagonalen verbindet, so geht diejenige gerade Linie, welche man durch den fünften Winkel-Punct und den Berührungs-Punct der gegenüberliegenden Seite legen kann, durch den Durchschnitt jener beiden Diagonalen.

Auf ähnliche Weise ergeben sich nachstehende Sätze:

Wenn man in einem umschriebenen Vierecke die beiden Diagonalen zieht, so geht durch den Durchschnitt derselben jede derjenigen beiden geraden Linien, welche zwei gegenüberliegende Berührungen verbindet. Verbindet man zwei nicht gegenüberliegende Berührungen durch eine gerade Linie, so geht dieselbe durch den Durchschnitt zweier gegenüberliegenden Seiten des umschriebenen Vierecks (310).

Wenn man in einem umschriebenen Dreiecke die drei Winkel-Puncte mit den gegenüberliegenden Berührungs-Puncten durch gerade Linien verbindet, so schneiden sich diese drei geraden Linien in ein und demselben Puncte.

322. Nach dem an die Spitze der 320. Nummer gestellten Satze können wir, wenn fünf Tangenten einer Curve zweiter Ordnung gegeben sind, auch ohne die Curve selbst zu kennen, so viele neue Tangenten derselben construiren, als wir wollen. Das von den gegebenen Tangenten gebildete Fünfeck sey ABCDG. Zieht man nun z. B. AD, und nimmt auf dieser Linie irgend einen Punct P beliebig an, und zieht BP und CP, so wird DG von BP in irgend einem Puncte E, GA von CP in irgend einem Puncte F geschnitten. Durch E und F geht alsdann eine sechste Tangente der Curve.

Nach dem ersten Satze der vorigen Nummer können wir, wenn fünf Tangenten gegeben sind, sogleich die Berührungs-Puncte auf denselben bestimmen. Man ziehe zu diesem Ende, wenn wiederum ABCDG das von den gegebenen Tangenten gebildete Fünfeck ist, die Diagonalen AC und BG, die sich in irgend einem Puncte, den wir Q nennen

*) Gerg. Ann. IV. 379.

Digitized by Google

wollen, schneiden. Alsdann schneidet die durch D und Q gehende gerade Linie die Seite AB im gesuchten Berührungs-Puncte. Auf ähnliche Weise ergeben sich die übrigen vier Berührungs-Puncte.

323. An die Theorie der Pole schliefst sich auch dasjenige Verfahren an, welches Robert Simson zur Bestimmung der Berührungs-Puncte, wenn fünf Tangenten gegeben sind, angewendet hat. Es sey nemlich ABCDE das von den Tangenten gebildete Fünfeck. Man verlängere AB und DE bis zu ihrem gegenseitigen Durchschnitte F; verlängere ferner CB und CD, bis sie der verlängerten AE in G und H begegnen. Alsdann bilden die beiden in F und G sich vereinigenden Tangenten-Paare eine vollständige vierseitige Figur, und ebenso auch die beiden in F und H sich vereinigenden Tangenten-Paare. FG und FH sind Diagonalen dieser beiden Figuren; die Pole derselben können wir also leicht durch den Durchschnitt der jedesmaligen beiden übrigen Diagonalen bestimmen. Diejenige gerade Linie, welche durch die auf diese Weise bestimmten Pole der beiden Diagonalen FG und FH geht, ist die Polare ihres Durchschnittes, des Punctes F, durch welchen auch die beiden gegebenen Tangenten AB und DE gehen, und diese Polare bestimmt folglich auf diesen beiden Tangenten die Berührungs-Puncte *).

324. Die vorstehenden Erörterungen, denen wir eine noch weit gröfsere Ausdehnung hätten geben können, schliefsen sich an die analytische Entwicklung der 306. Nummer an. Wir haben überall denjenigen Fall bisher nur vor Augen gehabt, wo eine Linie zweiter Ordnung von einem Systeme zweier geraden Linien wirklich geschnitten wird, und wir also zu zwei neuen resultirenden Linien-Systemen kommen. Aber wir dürfen auch den andern Fall nicht aufser Acht lassen, wo die Linien des gegebenen Systems beide der Curve nicht begegnen. Alsdann erhalten wir statt der beiden resultirenden Linien-Systeme zwei Puncte, und diese Puncte liegen nach der eben angezogenen Nummer auf der Polaren des Durchschnittes der beiden Linien des ursprünglichen Systems, gerade so, wie in dem bisher betrachteten Falle, auf dieser Polaren die Durchschnitte der beiden geraden Linien der resultirenden Systeme lagen. Ebenso liegt der Durchschnitt des ursprünglichen Systems auf der Polaren jedes der resultirenden Puncte. Hiervon überzeugen wir uns leicht. Wir wollen, der Kürze wegen, durch die erste und zweite der nachstehenden Gleichungen:

$$A = 0, \quad B = 0,$$

die Gleichungen des ursprünglichen Linien-Systems und der Curve bezeichnen. Alsdann stellen, bei gehöriger Bestimmung von μ' und μ'', die Gleichungen:

$$A+\mu'B = 0, \quad A+\mu''B = 0,$$

die beiden resultirenden Puncte dar. Hierbei dürfen wir nicht übersehen, dafs diese Gleichungen eine bestimmte Form haben, die von der Gleichung der Curve und des ursprünglichen Linien-Systems abhängt, und dafs sie mithin einen Punct darstellen, auf den sich eine Ellipse von bestimmtem Axen-Verhältnifs reducirt hat. Aus der Verbindung einer der letzten beiden Gleichungen mit der Gleichung der Curve erhalten wir wiederum die andere dieser Gleichungen und die Gleichung des Linien-Systems. Nehmen wir hier nun denjenigen Punct, dessen Gleichung wir mit der Gleichung der Curve ver-

*) Hamilton, Lehre von den Kegelschnitten. 5. Buch, letzter Satz.

binden, zum Anfangs-Puncte der Coordinaten, so können wir ihn durch eine Gleichung von der Form der Gleichung (2) der 306. Nummer:

$$y^2+(x+x')xy+xx'x^2 = 0,$$

darstellen, und erhalten wie dort, bei derselben Bezeichnung:

$$\gamma y''+\delta x''+\varepsilon = 0,$$

wo (y'', x'') einmal den resultirenden Punct, das andere Mal den Durchschnitt des resultirenden Linien-Systems bezeichnet.

Wenn wir die Gleichung eines Punctes, unter was für einer Form diese Gleichung (des zweiten Grades) auch erscheinen mag, mit der Gleichung irgend einer Linie zweiter Ordnung verbinden, so können wir niemals zu den Gleichungen von noch zwei neuen Puncten kommen; wir erhalten immer die Gleichung eines Systems zweier geraden Linien. Es ist nicht nötbig, hier in Entwicklungen einzugehen, die denen der 287. Nummer ähnlich sind; wir können uns von der Richtigkeit des eben Ausgesprochenen leicht *a priori* auf folgende Weise überzeugen. Wenn wir nemlich zwischen der Gleichung des Punctes und der Gleichung der Curve nach einander x und y eliminiren, so kommen wir zu zweien Gleichungen vom vierten Grade in y und x, also zu Gleichungen von folgender Form:

$$\begin{aligned} x^4+Py^3+Qy^2+Ry+S &= 0, \\ x^4+Tx^3+bx^2+Vx+W &= 0. \end{aligned} \qquad (1)$$

Wenn es nun ein System zweier geraden Linien gibt, dessen Gleichung eine algebraische Folge aus den Gleichungen des Punctes und der Curve ist, so müssen wir zu denselben Gleichungen, als eben, kommen, wenn wir zwischen der Gleichung des Systems und der Curve (oder des Punctes) x und y eliminiren. Hiernach können wir die Realität eines solchen Linien-Systems nachweisen und zugleich die Gleichung desselben bestimmen. Vorausgesetzt, dafs der Punct nicht auf der Curve selbst liegt, mufs offenbar jede der beiden Gleichungen (1) vier imaginäre Wurzeln haben. Diese Wurzeln ordnen sich aber, wie bekannt, paarweise zusammen, und jedem Paare entspricht ein reeller Factor des zweiten Grades, so dafs obige beiden Gleichungen (für den Fall imaginärer Wurzeln nur auf eine einzige Weise) sich in zwei reelle Factoren des zweiten Grades zerlegen lassen. Dem entsprechend können wir also den beiden Gleichungen (1) folgende Form geben:

$$\begin{aligned} (y^2+py+q)(y^2+ry+s) &= 0, \\ (x^2+tx+u)(x^2+vx+w) &= 0. \end{aligned} \qquad (2)$$

Die vier Wurzeln der ersten Gleichung entsprechen den vier Wurzeln der zweiten in einer bestimmten Ordnung, so nemlich, dafs, wenn wir zwei solcher sich entsprechenden Wurzeln durch y' und x' bezeichnen, die Gleichungen der Curve und des Punctes beide befriedigt werden, wenn wir in denselben jene (imaginären) Werthe für y und x substituiren. Der Punct (y', x') spielt die Rolle eines imaginären Durchschnittes von jenem gegebenen Puncte und der Curve. Offenbar ordnen sich ferner die Wurzeln beider Gleichungen so zusammen, dafs den beiden Wurzeln, auf welche sich derselbe quadratische Factor der einen Gleichung bezieht, zwei solche Wurzeln der andern Gleichung entsprechen, die ebenfalls in demselben Factor enthalten sind. Dem entsprechend mögen die beiden ersten Factoren der Gleichungen (2) sich auf entsprechende Wurzeln beziehen, und ebenso die zweiten Factoren. Bei dieser Voraussetzung bezeichnen wir die Wurzeln der Gleichungen:

$$y^2+py+q = 0, \qquad x^2+tx+u = 0, \qquad (3)$$

Digitized by Google

durch y' und y'', und durch x' und x'', und erhalten alsdann Ausdrücke von folgenden Formen:

$$y' = m+n\sqrt{-1}, \quad y'' = m-n\sqrt{-1};$$
$$x' = g+h\sqrt{-1}, \quad x'' = g-h\sqrt{-1}.$$

Wir können nun ferner eine lineare Gleichung:

$$y+\varkappa x+\sigma = 0,$$

finden, in welcher die beiden Werthe von $\varkappa$ und σ so bestimmt sind, dafs die Elimination von x und y zwischen dieser Gleichung (4) und der Gleichung der Curve (oder des Punctes) ebenfalls zu den Gleichungen (3) führt. Wir kommen am leichtesten zu jener Gleichung, indem wir nach der bekannten Weise die Gleichung derjenigen geraden Linie bilden, welche durch die beiden (imaginären) Puncte (y'', x'') und (y', x') geht. Substituiren wir nemlich in folgender Gleichung:

$$y-y' = \frac{y''-y'}{x''-x'}(x-x'),$$

für y'', y', x'' und x' ihre Werthe, so erhalten wir eine Gleichung, aus der alle imaginären Gröfsen verschwunden sind:

$$y-m = \frac{n}{h}(x-g),$$

und wir haben also:

$$\varkappa = \frac{n}{h}, \quad \sigma = \frac{ng-mh}{h}.$$

Ganz auf dieselbe Weise können wir eine zweite lineare Gleichung:

$$y+\varkappa' x+\sigma' = 0,$$

bestimmen, welche so beschaffen ist, dafs die Elimination von x und y zwischen dieser Gleichung und der Gleichung der Curve (oder des Punctes) zu folgenden Gleichungen führt:

$$y^2+ry+s = 0,$$
$$x^2+vx+w = 0.$$

Und endlich ist klar, dafs alsdann die Elimination jeder der beiden veränderlichen Gröfsen zwischen der Gleichung:

$$(y+\varkappa x+\sigma)(y+\varkappa' x+\sigma') = 0, \qquad (4)$$

und der Gleichung der Curve (oder des Punctes) zu derselben Gleichung führt, als die Elimination derselben veränderlichen Gröfse zwischen den Gleichungen der Curve und des Punctes, und also die vorstehende Gleichung (4) des Systems zweier reellen geraden Linien eine algebraische Folge aus den Gleichungen der Curve und des Punctes ist.

325. Wenn wir irgend vier der Gleichungen (5) — (9) der 285. Nummer zusammenstellen, so können wir zwischen denselben μ, $\xi+\xi'$ und $\xi\xi'$ eliminiren, und kommen alsdann zu einer Gleichung zwischen y'' und x'', also zu der Gleichung eines geometrischen Ortes, auf welchem sich die Durchschnitte der beiden geraden Linien der resultirenden Systeme, oder die resultirenden Puncte selbst, befinden. Zugleich ist, da wir nur zwischen vier jener fünf Gleichungen eliminirt haben, die Gleichung jenes geometrischen Ortes unabhängig von einer Constanten der Linie zweiter Ordnung. Wir gehen hier in diese Entwicklungen, die sich durch eine schickliche Annahme der Coordinaten-Axen sehr vereinfachen, nicht ein, und wollen nur einen einzigen solchen Ort auf eine etwas abweichende Weise bestimmen.

Da wir in der vorigen Nummer gesehen haben, dafs wir durch die Verbindung der Gleichung eines Punctes, unter irgend einer quadratischen Form, mit der Gleichung einer

Digitized by Google

Curve zweiter Ordnung immer zu der Gleichung eines reellen Linien-Systems gelangen können, so wollen wir die beiden geraden Linien dieses Systems gleich als Coordinaten-Axen nehmen. Ist bei dieser Annahme:

$$y^2+2\alpha xy+\beta x^2+2\gamma y+2\delta x+\varepsilon = 0,$$

die Gleichung der Curve, so sind die Gleichungen der resultirenden Linien-Systeme oder Puncte in folgender Gleichung enthalten:

$$y^2+2\alpha' xy+\beta x^2+2\gamma y+2\delta x+\varepsilon = 0,$$

in der wir α' als einen unbestimmten Coefficienten betrachten. Diese Gleichung stellt alsdann alle möglichen Linien zweiter Ordnung dar, welche jede der beiden Coordinaten-Axen in denselben beiden (reellen oder imaginären) Puncten schneiden (264). Der Mittelpunct jeder besondern dieser Curven, und also auch — wenn überhaupt die letzte Gleichung bei einer schicklichen Annahme von α' ein System zweier geraden Linien oder einen Punct darstellen kann — der Durchschnitt der beiden geraden Linien des Systems oder der Punct selbst, liegt zugleich auf den durch folgende Gleichungen dargestellten beiden Durchmessern:

$$y+\alpha' x+\gamma = 0,$$
$$\alpha' y+\beta x+\delta = 0.$$

Wenn wir α' zwischen diesen beiden Gleichungen eliminiren, so kommt:

$$y^2-\beta x^2+\gamma y-\delta x = 0. \qquad (1)$$

Der durch die letzte Gleichung dargestellte geometrische Ort ist eine neue Linie zweiter Ordnung, die durch den Anfangs-Punct der Coordinaten geht und somit alle drei zugeordneten Pole enthält. Wir können demnach, in dem Falle, dafs ein gegebenes Linien-System der Curve nicht begegnet, und wir also zu zwei resultirenden Puncten kommen, diese Puncte durch den Durchschnitt der eben bestimmten Curve und der Polaren desjenigen Punctes, in welchem die beiden geraden Linien des gegebenen Systems sich kreuzen, bestimmen. Diese Durchschnitte sind für den eben bezeichneten Fall nothwendig reell, ebenso wie für den Fall, dafs beide Linien des gegebenen Systems der gegebenen Curve begegnen. Wenn eine dieser geraden Linien die gegebene Curve berührt, so wird in demselben Puncte die eben bestimmte Curve (1) von der Polaren des Durchschnittes derselben berührt. Wenn eine dieser geraden Linien die gegebene Curve schneidet, die andere aber ihr nicht begegnet, so wird die Curve (1) von der Polaren nicht geschnitten, die Durchschnitte sind imaginär.

326. Wir wollen diesen Paragraphen beschliefsen, indem wir in einige Details über die Entwicklungen der letzten Nummer eingehen. Wir haben in dieser Nummer folgenden Satz bewiesen:

Der geometrische Ort für die Mittelpuncte aller Linien zweiter Ordnung, welche durch dieselben vier Puncte gehen, ist eine Linie derselben Ordnung.

Zwei der vier Durchschnitts-Puncte können hierbei imaginär seyn, und diese sind alsdann bestimmt, indem eine jener Curven und eine derselben nicht begegnende gerade Linie gegeben ist; es können auch zwei Paar Durchschnitte imaginär seyn, und diese sind wiederum bestimmt, wenn eine der Curven und zwei derselben nicht begegnende gerade Linien gegeben sind.

Da in der Gleichung der in Rede stehenden Curve:

$$y^2-\beta x^2+\gamma y-\delta x = 0, \qquad (1)$$

das zweite Glied fehlt, so sind zwei zugeordnete Durchmesser derselben den Coordinaten-Axen parallel. Wenn die Durchschnitte der in der vorigen Nummer durch:

Digitized by Google

$$y^2+2\alpha' xy+\beta x^2+2\gamma y+2\delta x+\epsilon = 0, \qquad (2)$$

dargestellten Curven alle vier reell sind, so erhalten wir mithin die Richtung von drei Paaren zugeordneter Durchmesser der Curve (1), indem wir nach einander jedes der beiden Paare gegenüberliegender Seiten und die beiden Diagonalen des, durch jene vier Durchschnitts-Puncte bestimmten, Vierecks zu Coordinaten-Axen nehmen.

Die Gleichung (1) wird befriedigt, wenn wir zugleich:

$$y = -\gamma \quad \text{und} \quad x = 0,$$
$$y = 0 \quad \text{„} \quad x = -\frac{\delta}{\beta};$$

setzen, woraus wir denn ersehen, dafs die bezügliche Curve durch die Mitten der, in die erste und zweite Axe fallenden gemeinschaftlichen Chorden aller Curven (2) geht, also, indem wir wiederum die Coordinaten-Axen auf dreifache Weise bestimmen, durch die Mitten derjenigen sechs geraden Linien, welche die vier Durchschnitts-Puncte, paarweise genommen, verbinden. Dieselbe Curve geht durch den dreifachen Anfangs-Punct der Coordinaten. Wir haben also folgenden Satz bewiesen:

Wenn man vier gegebene Puncte, paarweise genommen, durch sechs gerade Linien verbindet, so liegen die Durchschnitte jedes Paares dieser Linien und die sechs Mitten derselben auf ein und derselben Linie zweiter Ordnung, in welcher überdiefs drei Paare zugeordneter Durchmesser jenen drei Linien-Paaren parallel sind. Diese Linie zweiter Ordnung ist der Ort der Mittelpuncte aller möglichen Linien derselben Ordnung, welche durch die vier gegebenen Puncte gehen.

Wir können unmittelbar noch drei andere Puncte derselben Curve bestimmen, denn die Gleichung derselben wird auch dann befriedigt, indem wir zugleich:

$$y = -\gamma, \quad x = -\frac{\delta}{\beta},$$

nehmen. Wir haben also im Ganzen zwölf Puncte der Curve bestimmt; diese Puncte liegen, wie wir gleich sehen werden, auf sechs Durchmessern.

327. Wir können der Gleichung (1) folgende Form geben:

$$\left(y+\frac{\gamma}{2}\right)^2-\beta\left(x+\frac{\delta}{2\beta}\right)^2 = \frac{\beta\gamma^2-\delta^2}{4\beta}, \qquad (3)$$

woraus wir erkennen, dafs

$$y = -\frac{\gamma}{2}, \quad x = -\frac{\delta}{2\beta},$$

die Coordinaten des Mittelpunctes der bezüglichen Curve sind. Es ist leicht, diese Coordinaten geradezu zu construiren. Wir sehen aber auch, dafs der Mittelpunct auf den beiden, durch die Puncte $(0, 0)$ und $\left(-\gamma, -\frac{\delta}{\beta}\right)$, $(-\gamma, 0)$ und $\left(0, -\frac{\delta}{\beta}\right)$ gehenden, geraden Linien liegt. Die zweite der eben bezeichneten geraden Linien ist diejenige, welche die Mitten zweier durch die vier Durchschnitts-Puncte gelegten geraden Linien verbindet. Mit Berücksichtigung der dreifachen Verbindung der vier Durchschnitte durch zwei gerade Linien, wonach ein dreifaches Coordinaten-System sich ergibt, haben wir also folgenden Satz bewiesen:

Wenn man in einem Viereck die Mitten der gegenüberstehenden Seiten und der beiden Diagonalen durch drei gerade Linien verbindet, so schneiden sich diese Linien in demselben Puncte. Dieser Punct ist der Mittelpunct derjenigen Curve, welche die

Digitized by Google

Mittelpuncte aller durch die vier Winkel-Puncte des Vierecks gehenden Linien zweiter Ordnung enthält.

328. Die Gleichung (3) stellt ein System zweier geraden Linien dar, wenn

$$\beta\gamma^2 = \delta^2,$$

und aus der geometrischen Bedeutung von β, γ und δ ist leicht einzusehen, dafs diese Bedingungs-Gleichung dann Statt findet, wenn die vier Durchschnitts-Puncte ein Viereck mit zwei parallelen Seiten bilden. Ein besonderer Fall ist derjenige, wo die vier Durchschnitts-Puncte sich in zwei Berührungs-Puncten vereinigen; alsdann ist, indem wir die beiden gemeinschaftlichen Tangenten zu Coordinaten-Axen nehmen:

$$\beta\gamma^2 = \delta^2 = \beta\varepsilon.$$

Die Art der durch (1) oder (3) dargestellten Curve hängt einzig vom Coefficienten β ab. Ist $\beta = 0$, so stellt die Gleichung (2) nur solche Curven dar, deren eine Asymptote der ersten Coordinaten-Axe parallel ist. Die Gleichung (1) bezeichnet in diesem Falle eine Parabel. Der geometrische Ort für die Mittelpuncte aller Hyperbeln, welche durch drei gegebene Puncte gehen, und deren eine Asymptote einer gegebenen geraden Linie parallel ist, ist also eine Parabel.

Fig. 18. 329. Wir wollen in dieser Nummer denjenigen Fall noch besonders hervorheben, wo $\beta = -1$, und also, bei der Voraussetzung rechtwinkliger Coordinaten, alle sich schneidenden Curven gleichseitige Hyperbeln sind und (1) einen Kreis darstellt. Wir haben früher (295.) gezeigt, dafs alle gleichseitige Hyperbeln, welche durch dieselben drei Puncte M, M′ und M″ gehen, sich noch in ein und demselben vierten Puncte M‴ schneiden, und dafs durch diese vier Puncte sich dreimal zwei auf einander senkrechte gerade Linien legen lassen. Also:

Die Mittelpuncte aller gleichseitigen Hyperbeln, welche durch dieselben drei Puncte gehen, liegen auf dem Umfange eines Kreises.

Dieser Kreis geht durch die Fufs-Puncte der von den Winkel-Puncten des Dreiecks MM′M″ auf die gegenüberstehenden Seiten gefällten Perpendikel. Diese Fufs-Puncte Q, Q′ und Q″ sind drei zugeordnete Puncte für jede der, durch M, M′ und M″ gehenden, gleichseitigen Hyperbeln, so dafs also die drei Seiten des Dreiecks QQ′Q″ die Polaren der drei gegenüberstehenden Winkel-Puncte sind. Derselbe Kreis geht durch die Mitten der sechs Chorden MM′, MM″, MM‴, M′M″, M′M‴ und M″M‴, nemlich durch die Puncte R, S, T, U, V und W. In dem Mittelpuncte des Kreises schneiden sich RW, SV und TU.

Wir können hiernach, wenn vier Puncte gegeben sind, den Mittelpunct derjenigen gleichseitigen Hyperbel finden, welche durch die vier gegebenen Puncte geht. Indem wir nemlich je drei dieser Puncte durch gerade Linien verbinden, erhalten wir vier Dreiecke; durch die Mitten der drei Seiten jedes dieser Dreiecke, oder (was hiemit auf Eins hinauskommt) durch die Fufs-Puncte der drei von den Winkel-Puncten auf die gegenüberliegenden Seiten gefällten drei Perpendikel, können wir einen Kreis legen. Die vier auf diese Weise bestimmten Kreise schneiden sich in demselben Puncte, dem gesuchten Mittelpuncte.

Wenn sich durch die vier gegebenen Puncte ein System zweier auf einander senkrechten geraden Linien legen läfst, so ist die Aufgabe unbestimmt, sonst läfst sie immer nur eine einzige Auflösung zu. Es können sich zwei gleichseitige Hyperbeln nur in sol-

Digitized by Google

chen vier Puncten schneiden, durch welche sich zwei, auf einander senkrechte, gerade Linien legen lassen.

Wenn vier gerade Linien gegeben sind, so sind in der von denselben gebildeten vollständigen vierseitigen Figur die Durchschnitts-Puncte der drei Diagonalen drei zugeordnete Puncte für alle diejenigen Curven zweiter Ordnung, welche die vier gegebenen geraden Linien berühren. Wenn unter diesen Curven sich eine gleichseitige Hyperbel befindet, so liegt ihr Mittelpunct auf dem durch die drei zugeordneten Puncte gehenden Kreise, und befindet sich also nach dem Satze der 278. Nummer in einem Durchschnitte dieses Kreises und derjenigen geraden Linie, welche durch die Mitten der Diagonalen der von den Tangenten gebildeten vollständigen vierseitigen Figur geht.

Die Resultate dieser Nummer sind bekannt *).

§. 7.

Winkel-Beziehungen. Brennpuncte.

330. Wir wollen in diesem Paragraphen zuvörderst eine Ellipse betrachten, und dieselbe auf ihre beiden Axen beziehen; dem entsprechend gehen wir von folgender Gleichung aus: Fig. 23.

$$A^2y^2+B^2x^2 = A^2B^2. \qquad (1)$$

Bezeichnen wir ferner irgend einen beliebigen Punct durch (y', x'), so wird das System der beiden durch diesen Punct gehenden Tangenten nach der 277. Nummer durch folgende Gleichung dargestellt:

$$A^2(y-y')^2-(xy'-x'y)^2+B^2(x-x')^2 = 0,$$

die, entwickelt, folgende Form annimmt:

$$(A^2-x'^2)y^2+2x'y'xy+(B^2-y'^2)x^2-2A^2y'y-2B^2x'x+A^2y'^2+B^2x'^2 = 0. \qquad (2)$$

Wir können endlich in der allgemeinen Gleichung eines Systems zweier geraden Linien:

$$y^2+(\varkappa+\varkappa')xy+\varkappa\varkappa'x^2+ \text{ etc. } = 0$$

$(\varkappa+\varkappa')$ und $\varkappa\varkappa'$ so bestimmen, dafs diese Gleichung sich mit der Gleichung (2) zu der Gleichung eines Kreises (der für den Fall, dafs die geraden Linien des Systems durch den Durchschnitt der Tangenten gehen, sich auf einen Punct reducirt) verbinden läfst. Alsdann bilden die beiden, durch die so bestimmte Gleichung bezeichneten, geraden Linien, paarweise mit den beiden Tangenten zusammengestellt, gleiche Winkel mit diesen (294). Folgende Gleichung, die ein System zweier durch den Punct (y', x') gehenden, geraden Linien ausdrückt:

$$n(y-y')^2+2x'y'(x-x')(y-y')+m(x-x')^2 = 0,$$

erfüllt die eben gemachte Bedingung, wenn wir n und m so bestimmen, dafs die Gleichung:

$$A^2-x'^2-n = B^2-y'^2-m$$

befriedigt wird, was auf unendlichfache Art geschehen kann. Unter den auf diese Weise bestimmten Systemen zweier geraden Linien, die durch den Punct (y', x'), den Durchschnitt der Tangenten, gehen, gibt es ein solches, welches der ersten Axe in zweien

*) Determination d'une hyperbole équilatère par Brianchon et Poncelet. Gerg. Ann. XI, 205 — 220.

Puncten begegnet, deren Abscissen unabhängig sind von y′ und x′. Die Gleichung dieses Linien-Systems, (welche wir leicht auf directe Weise bestimmen können,) ist, indem wir $A^2-B^2 = E^2$ setzen, folgende:

$$(E^2-x'^2)y^2+2x'y'(x-x')(y-y')-y'^2(x-x')^2 = 0;$$

denn ziehen wir diese Gleichung von (2) ab, so erhalten wir die Gleichung eines Kreises (dessen Radius gleich Null ist), und wenn wir in derselben $y = 0$ setzen, so kommt:

$$x = \pm E.$$

Wenn wir statt einer Ellipse eine Hyperbel betrachten, und also statt der Gleichung (1) folgende genommen hätten:

$$A^2y^2-B^2x^2 = -A^2B^2,$$

so wären die vorstehenden Entwicklungen ganz dieselben geblieben, nur hätten wir überall $(-B^2)$ mit B^2 vertauschen, und also auch E^2 gleich (A^2+B^2) setzen müssen.

Wir haben also bewiesen, dafs es in jeder Ellipse und Hyperbel zwei Puncte gibt, welche die Eigenschaft besitzen, dafs wenn man von irgend einem beliebigen Puncte Tangenten an die Curve und nach den beiden festen Puncten gerade Linien zieht, die eine dieser geraden Linien, die eine Tangente unter denselben Winkeln schneidet, als die andere gerade Linie die andere Tangente. In der 28. Figur, die sich auf den Fall der Ellipse bezieht, ist:

$$TPF = T'PF', \quad TPF' = T'PF.$$

Die beiden in Rede stehenden Puncte heifsen Brennpuncte. Für den Fall der Ellipse liegen dieselben auf der gröfsern Axe, zu beiden Seiten des Mittelpunctes in einer Entfernung, die gleich ist $\sqrt{A^2-B^2}$. Wir erhalten hiernach die beiden Brennpuncte der Ellipse, indem wir aus einem der End-Puncte der kleinern Axe, mit der halben gröfsern Axe, als Radius, einen Kreis beschreiben; dieser Kreis schneidet die gröfsere Axe in den beiden Brennpuncten F und F'. Diese Puncte liegen zwischen zweien beliebigen Tangenten. Für den Fall der Hyperbel befinden sich die beiden Brennpuncte auf derjenigen Axe, welche der Curve begegnet, zu beiden Seiten des Mittelpunctes in einer Entfernung $\sqrt{A^2+B^2}$, die der Hypotennse eines rechtwinkligen Dreiecks gleich ist, dessen beide Katheden die halben beiden Axen sind. Die so bestimmten Puncte liegen immer in zwei von irgend zweien Tangenten gebildeten Scheitel-Winkeln.

Auf der kleinern Axe der Ellipse, so wie auf derjenigen Axe der Hyperbel, welche der Curve nicht begegnet, liegen keine Brennpuncte, da die entsprechenden Werthe von E imaginär werden.

Man kann, wie es in jeder elementaren Behandlung der Linien zweiter Ordnung geschieht, ohne alle Mühe zeigen, dafs, für den Fall der Ellipse, die Summe, für den Fall der Hyperbel der Unterschied der Abstände jedes Punctes der Curve von jenen beiden, auf die eben angezeigte Art bestimmten, Puncten, Brennpuncte genannt, constant, und zwar der ersten Axe der Curven gleich ist.

331. Der in der vorigen Nummer analytisch bewiesene Satz gilt für jede beliebige Lage des Punctes P oder (y′, x′), nur mufs dieser Punct aufserhalb der Ellipse oder Hyperbel liegen, denn nur in diesem Falle lassen sich von einem solchen Puncte Tangenten ziehen, und nur in diesem Falle stellt die Gleichung (2) zwei reelle gerade Linien und nicht einen isolirten Punct dar. Wenn der Punct (y′, x′) auf der Curve selbst liegt, so stellt die letztgenannte Gleichung (2) zwei in eine einzige Tangente zusammenfallende gerade Linien dar, so dafs als ganz specieller Fall des oben Bewiesenen dargethan ist,

Digitized by Google

dafs die Tangente in irgend einem Puncte der Ellipse oder Hyperbel mit den, von demselben Puncte nach den beiden Brennpuncten gezogenen, geraden Linien gleiche Winkel bildet; und zwar so, dafs in dem Falle der Hyperbel der von den eben bezeichneten geraden Linien gebildete Winkel selbst, in dem Falle der Ellipse aber der Nebenwinkel desselben von der Tangente halbirt wird. Hieraus folgt denn, nach dem Grundgesetze aller Spiegelung, dafs, bei der Ellipse, ein Lichtstrahl, der, von einem Brennpuncte ausgehend, auf einen Punct der Ellipse fällt, nach dem andern Brennpuncte zurückgeworfen wird; bei der Hyperbel hingegen ein von einem Brennpuncte ausgehender, und auf irgend einen Punct eines der beiden Zweige der Hyperbel fallender Lichtstrahl, so zurückgeworfen wird, als käme er von dem andern Brennpuncte.

Die Art, wie wir in der vorigen Nummer die Brennpuncte eingeführt haben, ist also ihrer Benennung ganz entsprechend.

232. Wir wollen in dieser Nummer sehen, wie die Resultate der beiden vorigen Nummern sich für den Fall der Parabel modificiren. Die Gleichung der Parabel, die wir zum Grunde legen wollen, ist, bei der Annahme rechtwinkliger Coordinaten, folgende: Fig. 24.

$$y^2 = 2px. \qquad (1)$$

Die Gleichung zweier sich in irgend einem Puncte (y', x') schneidenden Tangenten, ist hiernach (277):

$$2(y-y')(y'x-x'y)-p(x-x')^2 = 0,$$

und, wenn wir entwickeln, geht diese Gleichung in folgende über:

$$x'y^2-y'xy+\tfrac{1}{2}px^2-x'y'y+(y'^2-px')x+\tfrac{1}{2}px'^2 = 0, \qquad (2)$$

Wir können hier wiederum unendlich viele Systeme zweier geraden Linien bestimmen, deren Gleichung sich mit vorstehender Gleichung des Tangenten-Systems zu der Gleichung eines Kreises verbinden läfst. Geben wir zu diesem Ende der Gleichung eines solchen Systems zweier geraden Linien, von denen wir zugleich voraussetzen, dafs sich dieselben im Puncte (y', x'), dem Durchschnitte der Tangenten schneiden, folgende Form:

$$n(y-y')^2-y'(x-x')(y-y')+m(x-x')^2 = 0, \qquad (3)$$

so brauchen wir blofs n und m auf solche Weise zu bestimmen, dafs folgende Gleichung befriedigt wird:

$$x'-n = \tfrac{1}{2}p-m.$$

Setzen wir $m = 0$, und also $n = x'-\frac{1}{2}p$, so erhalten wir statt (3) folgende Gleichung:

$$(y-y')(x'-\tfrac{1}{2}p)(y-y')-y'(x-x')) = 0.$$

Von den beiden einzelnen geraden Linien, welche diese Gleichung darstellt, ist eine parallel der Axe der Parabel, die andere, für sich allein durch folgende Gleichung dargestellt:

$$y-y' = \frac{y'}{x'-\frac{1}{2}p}(x-x'),$$

schneidet die Axe der Parabel in einem Puncte $(0, \frac{1}{2}p)$, der immer derselbe bleibt, wo wir auch den Durchschnitt der Tangenten (y', x') annehmen mögen. Es gibt also in der Parabel einen festen und constanten Punct, der die Eigenschaft besitzt, dafs, wenn man von irgend einem beliebigen Puncte aus zwei Tangenten an die Curve und eine gerade Linie nach jenem festen Puncte zieht, diese gerade Linie mit einer der beiden Tangenten dieselben Winkel bildet, als die andere Tangente mit einem beliebigen Durchmesser der Parabel. Dieser feste Punct heifst der Brennpunct der Parabel, und liegt auf der Axe derselben, in einer Entfernung

vom Scheitel, die gleich ist ½p, d. h. dem vierten Theile des Parameters. In der 24. Figur ist F der Brennpunct, und nach dem eben bewiesenen Satze ist:

$$TPG = FPT', \quad TPF = GPT'.$$

Wenn wir den Punct P oder (y', x') auf der Parabel selbst annehmen, so fallen die beiden durch (2) dargestellten Tangenten in eine einzige zusammen, und alsdann liegt in der vorstehenden analytischen Entwicklung unmittelbar, als besonderer Fall, der bekannte Satz, dafs, wenn man irgend eine beliebige Tangente an die Parabel legt und durch den Berührungs Punct eine gerade Linie parallel mit der Axe, eine andere nach dem Brennpuncte zieht, diese beiden geraden Linien mit der Tangente gleiche Winkel bilden. Hieraus ergibt sich denn wiederum, nach dem vorhin schon erwähnten Spiegelungs-Gesetze, dafs jeder Lichtstrahl, der in irgend einem Puncte der Parabel parallel mit der Axe auffällt, in den Brennpunct zurückgeworfen wird, und, umgekehrt, dafs alle von dem Brennpuncte ausgehenden Strahlen so von der Parabel reflectirt werden, dafs sie parallel unter sich und mit der Axe fortgehen.

333. Die in den letzten Nummern bewiesenen allgemeinen Sätze sind folgende:

Wenn man von irgend einem gegebenen Puncte Tangenten an eine gegebene Ellipse oder Hyperbel und zwei gerade Linien nach den beiden Brennpuncten zieht, so bildet eine dieser geraden Linien mit einer Tangente dieselben Winkel, als die andere gerade Linie mit der andern Tangente.

Wenn man von irgend einem Puncte Tangenten an eine gegebene Parabel legt und eine gerade Linie nach dem Brennpuncte zieht, so bildet eine Tangente mit der zuletzt-gezogenen geraden Linie dieselben Winkel, als die andere Tangente mit einem beliebigen Durchmesser der Parabel.

Aus diesen beiden Sätzen (von denen der letztere, indem wir annehmen, dafs der zweite Brennpunct der Parabel unendlich weit entfernt liegt, in dem erstern enthalten ist,) lassen sich durch leichte Combinationen eine Menge anderer herleiten, und aus diesem Grunde stellen wir dieselben, als Hauptsätze, an die Spitze der nächsten Nummern. Auf die glückliche Auswahl solcher Sätze beruhet die Leichtigkeit und Eleganz der Darstellung. Mir scheint es hierbei ein characteristischer Umstand zu seyn, dafs diejenigen Sätze, um welche sich eine Reihe von Sätzen, gleichsam als Corollarien, gruppirt, aus einer unmittelbaren Verbindung der analytischen Ausdrücke sich ergeben.

334. Wenn irgend eine Hyperbel gegeben ist, und wir statt einer der bisher betrachteten Tangenten eine Asymptote nehmen, so ergibt sich aus der vorigen Nummer sogleich folgender Satz:

Wenn man von irgend einem Puncte einer Asymptote einer gegebenen Hyperbel eine Tangente an die Curve legt, und zwei gerade Linien nach den beiden Brennpuncten zieht, so bildet eine dieser beiden geraden Linien mit der Tangente dieselben Winkel, als die andere gerade Linie mit der Asymptote.

335. Wenn irgend ein Punct einer Linie zweiter Ordnung und die beiden Brennpuncte derselben gegeben sind, so kann man, auf bekannte Weise, in dem gegebenen Puncte die Tangente construiren, indem man von diesem Puncte nach den beiden Brennpuncten gerade Linien zieht, und einmal den Winkel, den diese beiden geraden Linien mit einander bilden, das andere Mal den Nebenwinkel desselben, durch eine

gerade Linie halbirt. Es lassen sich hiernach durch den gegebenen Punct zwei verschiedene Linien zweiter Ordnung legen, welche zwei gegebene Puncte zu Brennpuncten haben, eine Hyperbel und eine Ellipse; die eine der eben bezeichneten Halbirungs-Linien berührt die Hyperbel, die andere die Ellipse.

Zugleich ergibt sich hier auf ganz elementare Weise folgender Satz, der nicht ohne Aufwand von Rechnung in den Annalen von Gergonne *) bewiesen worden ist:

Wenn eine Ellipse und Hyperbel dieselben Brennpuncte haben, so schneiden sich dieselben unter rechtem Winkel. Oder: *Alle Ellipsen oder Hyperbeln, welche dieselben Brennpuncte haben, werden von ein und derselben Hyperbel oder Ellipse, die ebenfalls dieselben Brennpuncte hat, unter rechten Winkeln geschnitten.*

Wenn die Richtung der Durchmesser einer Parabel, der Brennpunct und irgend ein Punct ihres Umfanges gegeben ist, so können wir, ähnlich wie bei der Ellipse und der Hyperbel, in dem gegebenen Puncte die Tangente construiren. Wir erhalten für dieselbe eine von zwei auf einander senkrechten geraden Linien, wodurch zwei unter rechten Winkeln sich schneidende Parabeln angezeigt werden, welche denselben Brennpunct und dieselbe Axe haben, und sich im gegebenen Puncte schneiden.

336. Wenn die beiden Brennpuncte und eine Tangente gegeben sind, so können wir, wie bekannt, leicht den Berührungs-Punct auf derselben bestimmen. Dieser Punct ist für den Fall der Ellipse, wo die beiden Brennpuncte auf derselben Seite der Tangente liegen, von allen Puncten dieser Linie derjenige, für welchen die Summe der Abstände von den beiden Brennpuncten ein *minimum* ist; für den Fall der Hyperbel, wo die beiden Brennpuncte zu beiden Seiten der Tangente liegen, derjenige, für welchen die Differenz jener Abstände ein *maximum* ist. Wir können ferner, nach der 333. Nummer, von jedem beliebig auf der gegebenen Tangente angenommenen Puncte unmittelbar eine zweite Tangente construiren. Seyen in der 23. Figur F und F' die beiden Brennpuncte, TP irgend eine Tangente, und auf derselben P der beliebig angenommene Punct. Zieht man nun PF und PF', und endlich PT' so, dafs F'PT' = FPT, so ist die zuletzt gezogene gerade Linie PT' die verlangte Tangente. Durch die beiden Brennpuncte und eine Tangente ist eine einzige Linie zweiter Ordnung bestimmt.

Auf ähnliche Weise können wir, wenn der Brennpunct einer Parabel, die Richtung ihrer Durchmesser und irgend eine Tangente derselben gegeben ist, durch jeden Punct dieser Tangente eine neue Tangente legen. Sey in der 24. Figur F der Brennpunct, PG ein Durchmesser, TP die gegebene Tangente und P der beliebig auf derselben angenommene Punct. Bestimmt man nun eine gerade Linie PT' so, dafs TPG = FPT', so ist diese Linie die gesuchte Tangente. Der Winkel FPT' bleibt immer derselbe, wo wir auch den Punct P auf der gegebenen Tangente annehmen mögen. Hiernach ergeben sich folgende beiden bekannten Sätze:

Wenn man den Scheitel eines Winkels von gegebener Gröfse auf einer gegebenen geraden Linie fortrücken läfst, während ein Schenkel desselben um irgend einen festen Punct sich dreht, so berührt der andere Schenkel in allen seinen Lagen ein und dieselbe Parabel. Der feste Punct ist der Brennpunct und die gegebene gerade Linie eine Tangente dieser Parabel.

*) Gerg. Ann. XIII. p. 316.

Wenn man von dem Brennpuncte einer Parabel aus nach allen möglichen Tangenten unter demselben Winkel gerade Linien zieht, so liegen alle Fufs-Puncte dieser geraden Linien auf einer neuen geraden Linie, die selbst eine jener Tangenten ist *).

337. Wenn nur ein Brennpunct gegeben ist, so sind noch drei Puncte oder Tangenten nöthig, damit eine Linie zweiter Ordnung vollständig bestimmt sey. Wir wollen uns auf denjenigen Fall beschränken, dafs drei Tangenten gegeben sind, und, indem wir uns auf die 23. Figur beziehen, F für den gegebenen Brennpunct und PMN für das, von den drei gegebenen Tangenten gebildete, Dreieck nehmen. Die 333. Nummer führt uns hier auf der Stelle zur Bestimmung des andern Brennpunctes. Verbinden wir nemlich zwei Winkel-Puncte jenes Dreiecks, etwa P und M, durch zwei gerade Linien mit dem gegebenen Brennpuncte F, so liegt der andere Brennpunct in dem Durchschnitte derjenigen beiden geraden Linien PF' und MF', die wir sogleich erhalten, indem wir die Winkel TPF und T'PF', TMF und SMF' gleich nehmen.

Durch den auf diese Weise bestimmten Brennpunct F' geht auch noch eine dritte gerade Linie NF', welche dadurch bestimmt ist, dafs die Winkel SNF und T'NF' gleich sind. Hierdurch ist also für jedes Dreieck nachstehender Satz bewiesen, der als eine Verallgemeinerung des Satzes anzusehen ist, dafs diejenigen drei geraden Linien, welche die drei Winkel eines Dreiecks halbiren, in demselben Puncte sich schneiden.

Wenn man in der Ebene eines gegebenen Dreiecks irgendwo einen Punct annimmt, und durch jeden Winkel-Punct des Dreiecks eine gerade Linie nach diesem Puncte und eine andere so zieht, dafs die beiden geraden Linien mit den in demselben Winkel-Punct sich schneidenden beiden Seiten des Dreiecks gleiche Winkel bilden, so erhalten wir aufser den drei, sich im beliebig angenommenen Puncte schneidenden, geraden Linien, noch drei andere, welche ebenfalls durch ein und denselben Punct gehen.

Wenn der beliebig angenommene, innerhalb oder aufserhalb des Dreiecks liegende, Punct auf der, einen Winkel des Dreiecks halbirenden geraden Linie sich befindet, so enthält diese gerade Linie auch den Constructions-Punct, und ist mithin die Axe der Curve.

Der letzte Satz vom Dreieck besteht auch dann noch, wenn der gegebene Punct unendlich weit liegt und man also (Fig. 24.) durch die Winkel-Puncte des Dreiecks PMN in beliebiger Richtung drei parallele gerade Linien MK, PG und NH zieht. Alsdann ist der Durchschnitt der, wie eben, bestimmten drei geraden Linien MF, PF und NF der Brennpunct derjenigen Parabel, welche die drei Seiten des Dreiecks berührt, und welche MK, PG und NH zu Durchmessern hat.

338. Wenn man in einem gegebenen Dreieck, erstens den Mittelpunct des um dasselbe beschriebenen Kreises, zweitens denjenigen Punct, in welchem sich die drei, von den Winkel-Puncten auf die gegenüberliegenden Seiten gefällten, Perpendikel kreuzen, bestimmt, und alsdann von diesen beiden Puncten zwei gerade Linien nach jedem der drei Winkel-Puncte des Dreiecks zieht, so bildet jedes Paar solcher Linien mit denjenigen beiden Dreiecks-Seiten, durch deren Durchschnitt dieselben gehen, gleiche Win-

*) Théorèmes nouveaux sur les lignes du second ordre. Par Poncelet. Gerg. Ann. VIII. p 3 — 13.

kel *). Nach der vorigen Nummer sind also die eben bezeichneten Puncte die beiden Brennpuncte einer in das gegebene Dreieck beschriebenen Linie zweiter Ordnung, die, was leicht erhellt, eine Ellipse oder Hyperbel ist, je nachdem das gegebene Dreieck nur spitze, oder auch einen stumpfen Winkel hat. Da diese Linie zweiter Ordnung die drei Seiten des Dreiecks berührt, so ist nebenbei bewiesen, dafs, für den Fall eines spitzwinkligen Dreiecks, das *minimum* der Summe der Abstände aller einzelnen Puncte der Dreiecks-Seiten von jenen beiden eben bestimmten Puncten, für alle drei Seiten ein und derselben Gröfse, nemlich der gröfsern Axe der eingeschriebenen Ellipse, gleich ist. Für den Fall eines stumpfwinkligen Dreiecks ist das *maximum* der Unterschiede solcher Abstände, für alle drei Seiten ein constantes, nemlich der Haupt-Axe der eingeschriebenen Hyperbel gleich.

Es ist ferner leicht zu beweisen, dafs das in Rede stehende *minimum* oder *maximum* gleich ist dem Radius des, um das Dreieck beschriebenen, Kreises. In der 23. Figur sey PMN das gegebene Dreieck, F der Mittelpunct des um dasselbe zu beschreibenden Kreises, und F' derjenige Punct, in welchem die drei von den Winkel-Puncten auf die gegenüberstehenden Seiten gefällten Perpendikel sich kreuzen. Legt man nun einen Kreis durch die drei Fufs-Puncte dieser Perpendikel, durch die Puncte G, H und K, so geht derselbe Kreis (nach dem beiläufig in der 329. Nummer erwähnten Satze, der sich auch ohne Mühe direct beweisen läfst) ebenfalls durch die Mitten von F'P, F'M und F'N. Errichtet man in diesen Mitten Perpendikel, so berühren dieselben diejenige Linie zweiter Ordnung, (wir heben den Fall hier hervor, wo dieselbe eine Ellipse ist,) welche F und F' zu Brennpuncten hat und die drei Seiten des gegebenen Dreiecks berührt **). Eine solche Tangente

---

*) Der Beweis der im Texte aufgestellten Behauptung hat keine Schwierigkeit. Es sey nemlich (Fig. 23.) PMN das gegebene Dreieck, F der Mittelpunct des um dasselbe beschriebenen Kreises, alsdann brauchen wir nur zu zeigen, dafs, wenn wir in dem gegebenen Dreieck einen zweiten Punct F', wie in der vorigen Nummer, so bestimmen, dafs:

$$MPF = F'PN, \quad PMF = F'MN, \quad MNF = F'NP,$$

jede durch einen der Winkel-Puncte des Dreiecks und den so bestimmten Punct F' gehende gerade Linie (z. B. PF') die gegenüberliegende Seite (MN) unter rechten Winkeln schneidet. Wir erhalten aber nach allbekannten Sätzen schrittweise folgende Ausdrücke.

$$\begin{aligned} \pi &= MPN + PMN + PNM, \\ &= MPF + FPN + PMF + FMN + PNM, \\ &= MPF + PMF + (FNP + FNM) + PNM, \\ &= 2GPN + 2PNM, \end{aligned}$$

mithin:

$$\frac{\pi}{2} = GPN + PNM,$$

woraus denn folgt, dafs PG senkrecht steht auf MN.

**) Wir werden nemlich in einer spätern Nummer, im Zusammenhange mit anderen Sätzen, beweisen, dafs die Fufs-Puncte der von den beiden Brennpuncten auf alle mögliche Tangenten einer Ellipse oder Hyperbel gefällten Perpendikel auf dem Umfange ein und desselben Kreises liegen, und zwar desjenigen Kreises, der über der ersten Axe als Durchmesser beschrieben werden kann. Wir können diesen Satz, allein für sich, auch auf nachstehende Art beweisen. Wenn wir von der Gleichung:

Digitized by Google

ist QR, welche auf PF in der Mitte dieser Linie, in Q, senkrecht steht. Der Berührungs-Punct R liegt in dem Durchschnitte dieses Perpendikels mit FP; denn ziehen wir RF', so wird PRF', der Nebenwinkel von FRF', von jener Tangente QR halbirt. Es ist also die gröfsere Axe der in Rede stehenden Ellipse gleich:

$$FR+RF' = FR+RP = FP,$$

mithin gleich dem Radius des um das Dreieck beschriebenen Kreises.

Aus dem Bisherigen ergeben sich nachstehende Resultate:

Wenn eine Ellipse oder Hyperbel gegeben ist, und man beschreibt aus einem Brennpuncte derselben mit der ersten Axe als Radius einen Kreis, so lassen sich in diesen Kreis unendlich viele Dreiecke eintragen, welche alle der Ellipse oder Hyperbel umschrieben sind; wenn wir nemlich durch irgend einen Punct dieses Kreises zwei Tangenten an jene Curve zweiter Ordnung legen, so bestimmen die zweiten Durchschnitte dieser beiden Tangenten mit dem Kreise eine dritte Tangente. Die von den Winkel-Puncten aller dieser Dreiecke auf die gegenüberstehenden Seiten gefällten Perpendikel schneiden sich alle in einem constanten Puncte, dem andern Brennpuncte der Curve. Alle diese Dreiecke haben hiernach auch einen gemeinschaftlichen Schwerpunct (69). Die Fufs-Puncte aller von den Winkel-Puncten solcher Dreiecke auf die gegenüberliegenden Seiten gefällten Perpendikel befinden sich auf dem Umfange des über der gröfsern Axe, als Durchmesser, beschriebenen Kreises. Auf demselben Kreise liegen die Mitten der drei Seiten jedes Dreiecks (329), oder, mit anderen Worten, die Mitten aller Chorden des Kreises, von welchen die Curve berührt wird.

Beiläufig sehen wir, dafs der Radius des um ein gegebenes Dreieck beschriebenen Kreises doppelt so grofs ist, als der Radius desjenigen Kreises, der durch die Mitten der drei Seiten, oder, was dasselbe heifst, durch die Fufs-Puncte der drei von den Winkel-Puncten auf die gegenüberliegenden Seiten gefällten Perpendikel geht, und dafs der Mittelpunct des letztgenannten Kreises auf derjenigen geraden Linie liegt, welche den Mittelpunct des umschriebenen Kreises und den Kreuzungs-Punct der Perpendikel verbindet, und zwar in der Mitte zwischen diesen beiden Puncten.

Der aus einem Brennpuncte einer Hyperbel mit der Axe als Radius beschriebene Kreis begegnet der Curve in zweien Puncten; die Tangente in jedem dieser Puncte be-

---

$$A^2y^2 \pm B^2x^2 = \pm A^2B^2,$$

ausgehen, so erhalten wir sogleich nach der 276. Nummer:

$$(y-ax)^2 - A^2a^2 \mp B^2 = 0, \qquad (1)$$

für die Gleichung des Systems irgend zweier parallelen Linien, welche die Ellipse oder Hyperbel berühren. Es ist ferner:

$$(y-a'x)^2 - (A^2 \mp B^2)a'^2 = 0,$$

die Gleichung des Systems zweier durch die beiden Brennpuncte gehenden geraden Linien. Sollen diese beiden geraden Linien auf den Tangenten senkrecht stehen, so nimmt die letzte Gleichung, indem wir durch a'^2 dividiren und a für $\left(-\frac{1}{a'}\right)$ schreiben, folgende Form an:

$$(ay+x)^2 - A^2 \mp B^2 = 0. \qquad (2)$$

Ziehen wir die beiden Gleichungen (1) und (2) von einander ab, und dividiren alsdann durch $(1+a^2)$, so kommt:

$$y^2+x^2-A^2 = 0.$$

stimmt auf dem Kreise einen zweiten Durchschnitts-Punct: die in demselben an den Kreis gelegte Tangente berührt zugleich die Hyperbel. Zwei in den Kreis und um die Hyperbel beschriebenen Dreiecke haben die beiden Asymptoten zu einer ihrer Seiten.

Alle diejenigen, in einen gegebenen Kreis beschriebenen, Dreiecke, welche denselben Schwerpunct haben, sind ein und derselben Linie zweiter Ordnung umschrieben, die, je nachdem der Schwerpunct innerhalb oder aufserhalb liegt, eine Ellipse oder Hyperbel ist.

339. Wir wenden uns zu neuen Winkel-Beziehungen. Sey, indem wir zuvörderst eine Ellipse betrachten, NN' das von zweien festen Tangenten, PQ und PQ', interceptirte Stück irgend einer beliebigen dritten Tangente. Indem wir die Winkel-Summe der beiden Dreiecke NFN' und NF'N' nehmen, kommt: Fig. 25.

$$2\pi = NFN' + NF'N' + \left\{\begin{matrix} NN'F + NN'F' \\ NN'Q' \end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix} N'NF + N'NF' \\ N'NQ \end{matrix}\right\} \quad (333)$$

und hiernach ergibt sich

$$\pi - NPN' = NFN' + NF'N'. \quad (1)$$

Nehmen wir statt der Tangente NN' die Tangente QQ', so ergibt sich gerade auf dieselbe Weise:

$$2\pi = QFQ' + QF'Q' + \left\{\begin{matrix} QQ'F + QQ'F' \\ QQ'P \end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix} Q'QF + Q'QF' \\ Q'QP, \end{matrix}\right\}$$

und endlich:

$$\pi + QPQ' = QFQ' + QF'Q'. \quad (2)$$

Wenn also eine Ellipse und zwei an dieselbe gelegte Tangenten gegeben sind, so ist die Summe derjenigen beiden Winkel, unter welchen das von den beiden gegebenen Tangenten interceptirte Stück irgend einer beliebigen dritten Tangente, von den beiden Brennpuncten aus, gesehen wird, constant und zwar, je nachdem die Ellipse von den drei Tangenten eingeschlossen wird oder nicht, gleich der Summe oder dem Unterschiede von zweien rechten Winkeln und demjenigen Winkel, der von den beiden festen Tangenten gebildet wird.

Wenn wir die beiden Gleichungen (1) und (2) addiren, so kommt:

$$2\pi = NFN' + NF'N' + QFQ' + QF'Q'.$$

Wenn man also um eine gegebene Ellipse irgend ein Viereck beschreibt, von welchem dieselbe umschlossen wird, so ist die Summe derjenigen vier Winkel, unter welchen zwei gegenüberliegende Seiten des Vierecks von den beiden Brennpuncten aus gesehen werden, gleich vier rechten Winkeln.

340. Wir wollen in dieser Nummer statt der Ellipse eine Hyperbel betrachten; in diesem Falle ist der Unterschied derjenigen Winkel, unter welchen das von zweien festen Tangenten interceptirte Stück irgend einer dritten beweglichen Tangente von den beiden Brennpuncten aus gesehen wird, constant und zwar, je nachdem die beiden festen Tangenten beide Hyperbel-Zweige oder nur einen derselben berühren, gleich dem von diesen Tangenten gebildeten Winkel oder dessen Nebenwinkel. Wir wollen uns hier darauf beschränken, den ersten Fall zu beweisen. Die beiden festen Tangenten seyen PN und PN', und das von ihnen interceptirte Stück einer dritten Tangente NN'. Es ist: Fig. 26.

$$NFN' = \pi - N'NF - NN'F,$$
$$NFN' = \pi - N'NF - NN'F,$$

Digitized by Google

mithin

$$NF'N - NFN' = \left\{ \begin{matrix} N'NF - N'NF' \\ N'NG \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} NN'F - NN'F \\ NN'P \end{matrix} \right\} \quad (333)$$
$$= NPN'.$$

Fig. 24. 341. Sey endlich F der Brennpunct einer Parabel, seyen PT und PT' zwei feste Tangenten, und MN das von denselben auf einer beliebigen dritten Tangente interceptirte Stück. Alsdann ist:

$$MFN = \pi - FNM - FMN,$$
$$= \pi - HNT' - KMT,$$
$$= \pi - MPN.$$

Hiernach ergibt sich folgender Satz:

Derjenige Winkel, unter welchem das von zweien festen an eine gegebene Parabel gelegten Tangenten interceptirte Stück einer dritten Tangente vom Brennpuncte aus gesehen wird, ist constant und ergänzt den von den beiden festen Tangenten gebildeten Winkel zu zwei rechten Winkeln.

Wenn man also ein Dreieck um eine gegebene Parabel beschreibt, und um dieses Dreieck wiederum einen Kreis, so geht dieser Kreis durch den Brennpunct. Der Ort für die Brennpuncte aller Parabeln, die drei gegebene gerade Linien berühren, ist derjenige Kreis, welcher um das von den drei gegebenen geraden Linien gebildete Dreieck beschrieben werden kann. Wenn mithin vier gerade Linien gegeben sind, so erhält man leicht den Brennpunct derjenigen Parabel, welche von diesen Linien berührt wird; dieser Brennpunct liegt zugleich auf vier verschiedenen Kreisen. Da jeder Punct des um ein gegebenes Dreieck beschriebenen Kreises als der Brennpunct einer Parabel anzusehen ist, die von den Seiten des Dreiecks berührt wird, so haben wir (336) indirect folgenden bekannten Satz bewiesen:

Wenn man von irgend einem Puncte auf dem Umfange eines Kreises nach den drei Seiten irgend eines in denselben beschriebenen Dreiecks unter demselben beliebig angenommenen Winkel gerade Linien zieht, so liegen die drei Fufs-Puncte dieser Linien in einer neuen geraden Linie.

Nach der in der 337. Nummer angezeigten Construction einer Linie zweiter Ordnung, welche die drei Seiten eines Dreiecks berührt und einen gegebenen Punct zum Brennpuncte hat, und nach dem Vorstehenden ergibt sich, wo der gegebene Punct liegen mufs, damit die Curve eine Parabel, Ellipse oder Hyperbel sey. Im Fall einer Ellipse mufs der Punct innerhalb des Dreiecks oder in einem derjenigen drei unendlichen Flächen-Räume liegen, die von dem Bogen des umschriebenen Kreises und zwei Seiten bestimmt werden.

Nicht allein für die Parabel, sondern auch für jede Linie zweiter Ordnung ist derjenige Winkel, unter welchem eine von zwei festen Tangenten interceptirte dritte bewegliche Tangente, von einem der Brennpuncte aus, gesehen wird, ein constanter. Diesen Satz stellt H. Poncelet an die Spitze einer schon citirten Abhandlung, und als nächste Folgerung ergibt sich daraus der bekannte, leicht synthetisch zu beweisende Satz, dafs, wenn man an eine gegebene Linie zweiter Ordnung zwei Tangenten legt, und den Durchschnitt dieser beiden Tangenten, so wie die beiden Berührungs-Puncte mit einem Brennpuncte durch gerade Linien verbindet, an diesem Brennpuncte gleiche Winkel entstehen. Umgekehrt folgt jener Satz sogleich aus diesem. Der Raum verbietet uns hier in ausführliche Entwicklungen einzugehen.

342. Wir haben früher gesehen, dafs die Fufs-Puncte der, von dem Brennpuncte der Parabel aus, nach allen Tangenten unter irgend einem gegebenen Winkel gezogenen geraden Linien auf einer neuen geraden Linie, und zwar auf einer Tangente der Parabel, liegen. Wir wollen untersuchen, ob diesem Satze nicht ein ähnlicher für den Fall der Ellipse und Hyperbel entspricht. Zu diesem Ende sey:

$$A^2y^2+B^2x^2 = A^2B^2,$$

die Gleichung einer gegebenen Ellipse, bezogen auf rechtwinklige Coordinaten, alsdann ist (276):

$$y^2-2axy+a^2x^2-A^2a^2-B^2 = 0 \qquad (1)$$

die Gleichung des Systems irgend zweier parallelen Tangenten. Ferner sind, indem wir

$$A^2-B^2 = E^2$$

setzen, (+E) und (−E) die Abscissen der beiden Brennpuncte; zwei durch diese beiden Puncte gehende gerade Linien haben Gleichungen von folgenden Formen:

$$y-a'(x-E) = 0, \quad y-a''(x+E) = 0,$$

und, indem wir diese Gleichungen in eine einzige zusammenziehen, kommt:

$$y^2-(a'+a'')xy+a'a''x^2+(a'-a'')Ey-a'a''E^2 = 0. \qquad (2)$$

Wenn wir die Voraussetzung machen, dafs die beiden, durch die Brennpuncte gehenden, geraden Linien mit den beiden parallelen Tangenten gleiche Winkel bilden, jedoch so, dafs dieselben nicht unter einander parallel sind, sondern mit jeder der beiden Tangenten ein gleichschenkliches Dreieck bilden, so haben wir, indem wir die Basis-Winkel dieses Dreiecks gleich ξ setzen, und für die trigonometrische Tangente von ξ der Kürze wegen v schreiben, für a' und a'' folgende Ausdrücke:

$$\frac{a+v}{1-av}, \quad \frac{a-v}{1+av},$$

und hiernach:

$$a'a'' = \frac{a^2-v^2}{1-a^2v^2}, \quad a'+a'' = 2a.\frac{1+v^2}{1-a^2v^2}, \quad a'-a'' = \pm 2v\frac{1+a^2}{1-a^2v^2}.$$

Durch Substitution der Werthe von a'a'', (a'+a'') und (a'−a'') geht die Gleichung (2) in folgende über:

$$(1-a^2v^2)y^2-2a(1+v^2)xy+(a^2-v^2)x^2\pm 2v(1+a^2)Ey-(a^2-v^2)E^2 = 0. \qquad (3)$$

Multipliciren wir ferner alle Glieder der Gleichung (1) mit $(1+v^2)$, so kommt:

$$(1+v^2)y^2-2a(1+v^2)xy+a^2(1+v^2)x^2-(1+v^2)(A^2a^2+B^2) = 0,$$

und wenn wir von dieser Gleichung die vorhergehende abziehen:

$$(1+a^2)(v^2y^2+v^2x^2\mp 2vEy-A^2v^2-B^2) = 0.$$

Diese Gleichung ist unabhängig von a, wenn wir den gemeinschaftlichen Factor $(1+a^2)$ fortlassen, und stellt einen Kreis dar; eine leichte Umformung derselben führt, indem wir wieder für v seinen Werth $tang\xi$ schreiben, zu folgender Gleichung:

$$(y\mp Ecotg\xi)^2+x^2 = \frac{A^2}{sin^2\xi}. \qquad (4)$$

Es ist offenbar, dafs diese Gleichung unmittelbar auch dann noch besteht, wenn wir eine Hyperbel an die Stelle der bisher betrachteten Ellipse setzen, und wiederum durch E den Abstand der Brennpuncte vom Mittelpuncte bezeichnen.

Wir wollen die Gleichung des Kreises, die wir eben entwickelt haben, genauer discutiren. Um zwischen derselben und der Gleichung der gegebenen Curve x zu eliminiren, ziehen wir diese beiden Gleichungen von einander ab, nachdem wir sie zuvor unter folgende Formen gebracht haben:

Digitized by Google

$$\frac{A^2}{B^2}y^2+x^2-A^2 = 0,$$

$$y^2+x^2\mp 2E\,cotg\,\xi-A^2-B^2\,cotg^2\xi = 0.$$

Auf diese Weise erhalten wir:

$$\frac{E^2}{B^2}y^2\pm 2E\,cotg\,\xi+B^2\,cotg^2\xi = 0,$$

und durch eine leichte Umformung:

$$(y\pm\frac{B^2}{E}cotg\,\xi)^2 = 0:$$

die Gleichung zweier zusammenfallenden, der ersten Axe parallelen, geraden Linien. Im Allgemeinen berührt also der in Rede stehende Kreis die gegebene Curve in zweien Puncten. Für den Fall der Hyperbel findet dieſs immer Statt, für den Fall der Ellipse aber nur dann, wenn die durch die Gleichung:

$$y\pm\frac{B^2}{E}cotg\,\xi = 0, \qquad (5)$$

bestimmte gerade Linie die Curve wirklich schneidet, was nur dann geschieht, wenn der Winkel ξ so angenommen wird, daſs

$$E^2 > B^2\,cotg^2\xi.$$

Die beiden Berührungen fallen in einen einzigen Punct, in einen Scheitel der kleinen Axe zusammen, wenn die Ellipse von der geraden Linie (5) berührt wird, wenn nemlich:

$$E^2 = B^2\,cotg^2\xi.$$

Diese Gleichung bildet den Uebergang zu dem dritten möglichen Fall, daſs

$$E^2 < B^2\,cotg^2\xi,$$

wo Kreis und Ellipse keinen Punct mehr gemein haben, ihre Gleichungen aber, was nicht zu übersehen ist, sich immer noch zu der Gleichung eines Systems zweier zusammenfallenden geraden Linien verbinden lassen.

Es ist leicht, sich von diesen verschiedenen Resultaten *a priori* Rechenschaft zu geben. Zuvörderst ist offenbar, daſs kein Punct des Kreises innerhalb der Ellipse oder Hyperbel liegen kann. Wenn der Winkel ξ so angenommen wird, daſs er demjenigen Winkel gleich ist, welchen irgend eine Tangente mit einer, von einem der beiden Brennpuncte nach dem Berührungs-Puncte gezogenen, geraden Linie bildet, so liegt dieser Berührungs-Punct nothwendig auf dem Umfange des in dem Vorstehenden bestimmten Kreises. Dieser Kreis berührt also die Curve in diesem Puncte und aufserdem noch in einem andern Puncte, der in Beziehung auf die zweite Axe eine symmetrische Lage hat.

Für den Fall der Hyperbel kann der Winkel, den eine Tangente mit der von einem Brennpuncte nach dem Berührungs-Puncte gezogenen geraden Linie bildet, jeder beliebige seyn; denn rücksichtlich der Asymptoten ist er gleich Null zu setzen. Für den Fall der Ellipse gibt es ein *minimum* dieses Winkels, dieses entspricht den Scheiteln der kleinern Axe; und hierdurch ist denn auch das *minimum* für den Winkel ξ bestimmt, wenn der in Rede stehende Kreis die Ellipse reell berühren soll.

In der 27. Figur sind MN und M'N' zwei parallele Tangenten einer gegebenen Ellipse, PM und PN zwei durch die beiden Brennpuncte, F und F', gehende gerade Linien, welche mit jeder jener beiden parallelen Tangenten ein gleichschenkliches Dreieck bilden: alsdann liegen, nach dem eben Bewiesenen, die vier Durchschnitts-Puncte M und N, M' und N' auf dem Umfange ein und desselben Kreises, der die gegebene Ellipse aufserhalb in zwei Puncten berührt. Wir erhalten vier neue Puncte, welche auf

Digitized by Google

dem Umfange desselben Kreises liegen, wenn wir die Richtung der beiden Tangenten beliebig ändern, und wiederum, wie vorhin, die Winkel-Puncte eines solchen Trapezes construiren, in welchem zwei gegenüberliegende Seiten zwei parallele Tangenten sind, die beiden anderen durch die beiden Brennpuncte gehen und dessen Winkel den Winkeln des Trapezes MM'N'N gleich sind. Derjenige Winkel, welchen die beiden durch die beiden Brennpuncte gehenden, Seiten, nöthigen Falls verlängert, mit einander bilden, ist für alle wie eben bestimmten Trapeze constant, und zwar, der frühern Bezeichnung zufolge, gleich $(\pi-2\xi)$; hieraus folgt denn, dafs der Durchschnitt je zweier solcher Seiten auf dem Umfange ein und desselben, durch die beiden Brennpuncte gehenden, Kreises bleibt, und zwar in dem Bogen desjenigen Abschnittes, der jenen Winkel $(\pi-2\xi)$ fafst. Im Falle der Figur bleibt also der Punct P auf dem von F und F' begränzten und durch P gehenden Bogen. Wenn dieser Bogen die gegebene Ellipse schneidet, so sind die Durchschnitts-Puncte diejenigen Puncte, in welchen diese von dem, durch M, M', N und N' gehenden Kreis berührt wird. Wir können hiernach diese Berührungs-Puncte T und T' leicht construiren, wenn der Winkel ξ gegeben ist. Wenn der Kreisbogen FPF' die Ellipse im Scheitel ihrer zweiten Axe berührt, so fallen die beiden Puncte T und T' in einen einzigen zusammen, der Winkel $(\pi-2\xi)$ ist alsdann der gröfste Winkel, den zwei von den beiden Brennpuncten nach irgend einem Puncte der Ellipse gezogene gerade Linien mit einander bilden können. Wenn der Bogen FPF' des durch die beiden Brennpuncte gehenden Kreises der Ellipse nicht begegnet, so kann der durch die Gleichung (4) dargestellte Kreis dieselbe auch nicht mehr berühren; es ist aber leicht ersichtlich, dafs die Chordale der beiden eben bezeichneten Kreise auch dann noch zusammenfällt, mit dem Systeme der beiden schon unter sich zusammenfallenden geraden Linien, zu dessen Gleichung man durch Verbindung der Gleichung (4) und der Gleichung der Ellipse gelangen kann.

Aus dem Bisherigen ergeben sich nachstehende Resultate:

Wenn man aus einem der beiden Brennpuncte einer Ellipse oder Hyperbel nach allen Tangenten derselben unter einem gegebenen Winkel gerade Linien zieht, so liegen die Fufs-Puncte aller dieser geraden Linien auf dem Umfange eines Kreises, der im Allgemeinen die Curve zweifach berührt.

Wir erhalten zwei solcher Kreise, denen das zwiefache Zeichen in der Gleichung (4) entspricht, wenn wir statt des gegebenen Winkels auch seinen Nebenwinkel nehmen.

Wenn eine gegebene Ellipse oder Hyperbel von einem Kreise in zwei Puncten aufserhalb berührt wird (die beiden Berührungs-Puncte können insbesondere in einen einzigen Punct zusammenfallen); so ist jede Chorde des Kreises, die zugleich eine Tangente der Curve ist, die Basis eines gleichschenklichen Dreiecks, dessen Schenkel durch die beiden Brennpuncte gehen, und dessen Winkel constant sind.

Wenn man in einem solchen Dreieck MPN überdiefs noch von den beiden Brennpuncten F und F' nach dem Berührungs-Puncte der Basis, nach G, zwei gerade Linien zieht, so erhält man zwei ähnliche Dreiecke FMG und F'NG.

Wenn man den Scheitel eines Winkels von constanter Gröfse auf dem Umfange eines gegebenen Kreises fortrücken läfst, so berührt, wenn ein Schenkel desselben durch einen festen Punct geht, der andere Schenkel in allen seinen Lagen ein und dieselbe Ellipse oder Hyperbel, deren ein Brennpunct mit dem festen Puncte zusammenfällt, und die, im Allgemeinen, den Kreis in zwei Puncten berührt.

Die in Rede stehende Curve ist eine Ellipse oder Hyperbel, je nachdem der feste Punct innerhalb oder aufserhalb des gegebenen Kreises liegt. Wenn (im Falle der Ellipse) der constante Winkel kleiner als derjenige Winkel ist, den der gröfste Abschnitt, der auf dem gegebenen Kreise durch eine durch den festen Punct gehende gerade Linie bestimmt werden kann, fafst: so kann die Curve den Kreis nicht mehr berühren. Wenn jener constante Winkel dem eben bezeichneten gleich ist, so fallen die beiden Berührungs-Puncte in einen einzigen Punct zusammen. Jede derjenigen beiden geraden Linien, die durch den angenommenen festen Punct so gezogen werden können, dafs auf dem gegebenen Kreise ein Abschnitt entsteht, der den constanten Winkel fafst, bestimmt einen derjenigen beiden Puncte, in welchen dieser Kreis von der Curve berührt wird. Die andern beiden Durchschnitte beziehen sich auch auf einen andern constanten Winkel, auf denjenigen nemlich, der den vorigen zu π ergänzt.

343. Sey wiederum:

$$A^2y^2 \pm B^2x^2 = \pm A^2B^2,$$

die Gleichung einer Ellipse oder Hyperbel, alsdann ist (277):

$$(A^2-x'^2)y^2+2x'y'xy+(\pm B^2-y'^2)x^2-2A^2y'y\mp 2B^2x'x+A^2y'^2\pm B^2x'^2 = 0,$$

die Gleichung des Systems zweier durch irgend einen Punct (y', x') gehenden Tangenten. Der Anblick der drei ersten Glieder dieser Gleichung gibt, bei der Voraussetzung rechtwinkliger Coordinaten:

$$tang\omega+tang\omega' = -\frac{2x'y'}{A^2-x'^2},\quad tang\omega tang\omega' = \frac{\pm B^2-y'^2}{A^2-x'^2},$$

indem wir diejenigen Winkel, welche die beiden Tangenten mit der ersten Axe bilden, ω und ω' nennen; und hiernach ergibt sich für den von den beiden Tangenten eingeschlossenen Winkel, den wir durch φ bezeichnen wollen, folgende Bestimmung:

$$tang\varphi = \frac{tang\omega-tang\omega'}{1+tang\omega tang\omega'} = \frac{2(A^2y'^2\pm B^2x'^2\mp A^2B^2)^{1/2}}{A^2\pm B^2-x'^2-y'^2} \qquad (1)$$

Diese Gleichung stellt, indem wir y' und x' als veränderliche Gröfsen und φ als gegeben betrachten, den Ort aller derjenigen Puncte dar, von welchen aus die gegebene Ellipse oder Hyperbel unter dem gegebenen Winkel gesehen wird. Indem wir die letzte Gleichung rational machen, steigt dieselbe in Beziehung auf y' und x' bis zum vierten Grade und bezieht sich, weil alsdann $tang\varphi$ nur im Quadrate vorkommt, zugleich auf den gegebenen Winkel und seinen Nebenwinkel. Indem wir φ gleich Null oder gleich π nehmen, ist der in Rede stehende Ort die gegebene Curve selbst, aufserdem reducirt er sich nur dann auf den zweiten Grad, wenn $\varphi = \frac{1}{2}\pi$, wir erhalten alsdann:

$$y^2+x^2 = A^2\pm B^2:$$

die Gleichung eines Kreises, der sich für den Fall einer gleichseitigen Hyperbel auf einen Punct reducirt, und imaginär wird, wenn für den Fall einer Hyperbel $B > A$. Also:

Der Ort aller Puncte, von denen aus eine Ellipse oder Hyperbel unter rechtem Winkel gesehen wird, ist ein Kreis.

Die Gleichung des vierten Grades, zu welcher der Ausdruck bei (1) für eine beliebige Annahme von φ führt, läfst sich nur für den Fall, dafs die gegebene Curve ein Kreis ist, in zwei Factoren des zweiten Grades zerlegen. Alsdann kommt nemlich:

$$(2A^2-y^2-x^2)^2 tang^2\varphi = 4A^2(y^2+x^2-A^2),$$

und nach einigen Umformungen:

$$\left(y^2+x^2-\frac{A^2}{sin^2\frac{1}{2}\varphi}\right)\left(y^2+x^2-\frac{A^2}{cos^2\frac{1}{2}\varphi}\right) = 0:$$

Digitized by Google

die Gleichung eines Systems zweier Kreise, die in einen einzigen zusammenfallen, wenn $\varphi = \frac{1}{2}\pi$.

Wir wollen nun statt der Ellipse oder Hyperbel eine Parabel betrachten, und bei der Voraussetzung rechtwinkliger Coordinaten:

$$y^2 = 2px$$

für deren Gleichung nehmen, wonach sich für die Gleichung des durch den Punct (y', x') gehenden Tangenten-Systems folgende ergibt (277 (10)):

$$x'y^2 - y'xy + \tfrac{1}{2}px^2 + \text{etc.} = 0,$$

Bei einer ähnlichen Bezeichnung, wie eben, haben wir also:

$$tang\omega + tang\omega' = \frac{y'}{x'}, \qquad tang\omega\, tang\omega' = \frac{\frac{1}{2}p}{x'};$$

$$tang\omega - tang\omega' = \frac{(y'^2 - 2px')^{\frac{1}{2}}}{x'}, \qquad 1 + tang\omega\, tang\omega' = \frac{x' + \frac{1}{2}p}{x'};$$

und endlich:

$$tang\varphi = \frac{(y'^2 - 2px')^{\frac{1}{2}}}{x' + \frac{1}{2}p}. \qquad (8)$$

Wenn wir entwickeln, und zugleich, indem wir $(x + \frac{1}{2}p)$ für x' schreiben, die Abscissen vom Brennpuncte der gegebenen Parabel an rechnen, so kommt:

$$y^2 - tang^2\varphi\, x^2 - \frac{2px}{cos^2\varphi} - \frac{p^2}{cos^2\varphi} = 0.$$

Diese Gleichung stellt, wenn wir y und x als veränderliche Gröfsen betrachten, eine Hyperbel dar, deren Axen-Verhältnifs $tang\varphi$ und deren Asymptoten-Winkel mithin 2φ ist. Setzen wir in der letzten Gleichung $y = 0$, so ergibt sich:

$$x^2 + \frac{2px}{sin^2\varphi} + \frac{p^2}{sin^2\varphi} = 0;$$

die halbe Summe der Wurzeln dieser Gleichung bezeichnet die Mittelpuncts-Abscisse der Hyperbel und ist gleich $\left(-\frac{p}{sin^2\varphi}\right)$; die halbe Differenz der Wurzeln gibt die halbe Quer-Axe und ist gleich $\frac{p\cos\varphi}{sin^2\varphi}$. Die halbe zweite Axe ist gleich dem letzten Ausdrucke multiplicirt mit $tang\varphi$, mithin gleich $\frac{p}{sin\varphi}$; die Entfernung der Brennpuncte vom Mittelpuncte gleich $\frac{p}{sin^2\varphi}$, woraus wir denn ersehen, dafs ein Brennpunct der Hyperbel mit dem Brennpuncte der gegebenen Parabel zusammenfällt.

Einer der beiden Hyperbel-Zweige entspricht dem gegebenen Winkel φ, der andere dem Winkel $\pi - \varphi$. Wenn $\varphi = \frac{1}{2}\pi$, so geht, was sogleich aus dem Anblick der Gleichung (2) erhellet, die in Rede stehende Hyperbel in eine gerade Linie, die Polare des Brennpunctes der Parabel, über.

Digitized by Google

§ 8.

Linien zweiter Ordnung, welche sich in denselben beiden Puncten schneiden, oder sich in demselben Puncte berühren. Einfache Osculation. Höhere Osculation. Zwiefache Berührung.

---

344. Seyen:

$$\begin{aligned} y^2+2\alpha xy+\beta x^2+2\gamma y+2\delta x+\varepsilon &= 0, \\ y^2+2\alpha' xy+\beta' x^2+2\gamma' y+2\delta' x+\varepsilon' &= 0, \end{aligned} \qquad (1)$$

die Gleichungen irgend zweier Linien zweiter Ordnung. Sollen beide Linien durch einen festen Punct gehen, und nehmen wir diesen festen Punct zum Anfangs-Puncte, so ist:

$$\varepsilon = \varepsilon' = 0.$$

Hiernach nehmen die beiden Gleichungen (1) folgende Form an:

$$\begin{aligned} y^2+2\alpha xy+\beta x^2+2\gamma y+2\delta x &= 0, \\ y^2+2\alpha' xy+\beta' x^2+2\gamma' y+2\delta' x &= 0. \end{aligned} \qquad (2)$$

Sollen die beiden Linien zweiter Ordnung noch durch einen zweiten festen Punct gehen, und legen wir durch denselben die zweite Axe, so kommt:

$$\gamma = \gamma'.$$

Wenn wir die beiden Gleichungen (2) auf irgend eine beliebige Weise zu einer neuen Gleichung verbinden, so stellt diese Gleichung eine neue Linie dar, welche durch die Durchschnitte der beiden gegebenen geht; wenn wir blofs abziehen, so kommt, mit Berücksichtigung der letzten Bedingungs-Gleichung:

$$2(\alpha-\alpha')xy+(\beta-\beta')x^2+2(\delta-\delta')x = 0:$$

die Gleichung eines Systems zweier geraden Linien, welche einzeln durch folgende beiden Gleichungen dargestellt werden:

$$\begin{aligned} x &= 0, \\ 2(\alpha-\alpha')y+(\beta-\beta')x+2(\delta-\delta') &= 0. \end{aligned} \qquad (3)$$

Die eine dieser beiden Gleichungen bezeichnet die zweite Axe, welche zwei Durchschnitte der beiden gegebenen Curven enthält; die andere eine gerade Linie, welche die übrigen (reellen oder imaginären) Durchschnitte enthalten mufs, und mithin eine gemeinschaftliche (reelle oder ideale) Chorde der beiden Curven ist. Beiläufig sehen wir, dafs zwei Linien zweiter Ordnung sich nur in vier Puncten schneiden können.

Die Gleichung (3) bleibt dieselbe, wenn wir annehmen, dafs die beiden gegebenen Curven die zweite Axe im Anfangs-Puncte berühren, d. h. wenn wir γ und γ' gleich Null setzen, und also statt der Gleichungen (2) folgende nehmen:

$$\begin{aligned} y^2+2\alpha xy+\beta x^2+2\delta x &= 0, \\ y^2+2\alpha' xy+\beta' x^2+2\delta' x &= 0. \end{aligned} \qquad (4)$$

Wir wollen in den folgenden Nummern die Gleichung (3) discutiren. Diese Discussion ergibt sich auf die leichteste Weise, und führt zu manchen Resultaten.

345. Wenn wir durch jede der Gleichungen (2) nach einander verschiedene, unter einander ähnliche Curven zweiter Ordnung darstellen, so ändert sich in diesen Gleichungen nur δ und δ'. In der Gleichung (3) bleiben also die Coefficienten von y und x immer dieselben, und nur das constante Glied $(\delta-\delta')$ erhält verschiedene Werthe. Die durch diese Gleichung dargestellte gemeinschaftliche Chorde bleibt also immer mit sich selbst parallel. Hierin ist folgender Satz enthalten:

Digitized by Google

Wenn man durch zwei feste Puncte zwei Reihen unter einander ähnlicher Curven legt, so sind die gemeinschaftlichen Chorden je zweier aus beiden Reihen genommenen Curven unter einander parallel. Diese Chorden bleiben auch dann parallel, wenn alle Curven sich in demselben Puncte berühren.

Alle Kreise insbesondere, welche irgend eine gegebene Curve zweiter Ordnung in denselben beiden Puncten schneiden oder in demselben Puncte berühren, haben mit dieser Curve eine parallele gemeinschaftliche Chorde.

Wir können ferner für eine der beiden durch die Gleichungen (2) dargestellten Linien zweiter Ordnung ein System zweier geraden Linien nehmen. Es bestimmen also in allen ähnlichen Curven, welche sich in denselben beiden Puncten schneiden oder in demselben Puncte berühren, zwei beliebige, durch die beiden Durchschnitte oder die Berührung gelegten, geraden Linien parallele Chorden. Wenn die durch die beiden Durchschnitte gelegten geraden Linien sich auf einer der ähnlichen Curven schneiden, so ordnet sich eine Tangente in die Reihe der parallelen Chorden. Wir erhalten lauter parallele Tangenten, wenn wir durch den gemeinschaftlichen Berührungs-Punct nach beliebiger Richtung eine gerade Linie ziehen, die wir als ein System von zwei zusammenfallenden geraden Linien betrachten.

Nach der 279. Nummer gehören mit ähnlichen Hyperbeln Systeme zweier den beiden Asymptoten parallelen geraden Linien und mit ähnlichen Parabeln Systeme irgend zweier Durchmesser derselben zusammen. Wenn also eine Hyperbel oder Parabel in irgend zweien Puncten von einer beliebigen Linie zweiter Ordnung (namentlich von einem Systeme zweier geraden Linien) geschnitten wird; so bestimmen zwei durch diese beiden Puncte den Asymptoten der Hyperbel parallel gezogene gerade Linien, oder zwei Durchmesser der Parabel, auf den beiden sich schneidenden Linien zweiter Ordnung zwei parallele Chorden. Hiernach können wir eine Parabel beschreiben, wenn drei Puncte derselben und die Richtung ihrer Durchmesser gegeben sind. Seyen nemlich M, M′ und M″ die drei gegebenen Puncte, MA und M′B zwei Durchmesser. Alsdann ziehe man MM″, welche dem Durchmesser M′B in B begegne, ziehe ferner nach beliebiger Richtung M′S, welche dem Durchmesser MA in A begegne, und endlich M″S parallel mit AB: so ist S ein Punct der gesuchten Parabel. Es ist leicht, diese Parabel durch eine stetige Bewegung des Punctes S zu beschreiben. Wenn MA und M′B nicht parallel sind, so erhalten wir, gerade nach derselben Construction als eben, eine Hyperbel, die durch M, M′ und M″ geht, und deren Asymptoten mit jenen Linien MA und M′B parallel sind. Fig. 28.

Beschreibt man endlich irgend ein Parallelogramm, dessen zwei gegenüberstehende Winkel-Puncte in dem Umfange irgend einer gegebenen Linie zweiter Ordnung liegen, so bestimmen die beiden Paare in den übrigen beiden Winkel-Puncten zusammenstoßender Seiten (die als zwei ähnliche Linien zweiter Ordnung anzusehen sind) auf der gegebenen Linie zweiter Ordnung zwei parallele Chorden.

346. Auf eine Weise, die sich von selbst darbietet und gar keine Rechnung erfordert, knüpft sich an die Gleichung (3) die Theorie der Osculation irgend zweier beliebigen Linien zweiter Ordnung.

Wir legen den nächsten Entwicklungen die Gleichungen (4) zu Grunde, welche zwei die Axe der y im Anfangs-Puncte berührende und sich im Allgemeinen noch in zwei Puncten schneidende Linien zweiter Ordnung darstellen. Wenn wir irgend eine Bestimmung über die, durch die beiden Durchschnitte dieser Curven gehende gemeinschaftliche

Digitized by Google

Chorde derselben machen, so setzen wir dadurch eine Beziehung zwischen den beiden Curven, eine Bedingungs-Gleichung zwischen den Constanten ihrer Gleichungen fest. Soll die gemeinschaftliche Chorde durch den Anfangs-Punct der Coordinaten, der zugleich der Berührungs-Punct ist, gehen, so heifst diefs, dafs drei Durchschnitts-Puncte der beiden Curven in einen einzigen zusammenfallen, oder, mit anderen Worten, dafs die beiden Curven sich einfach (dreipunctig) osculiren, oder einen Contact der zweiten Ordnung haben. Damit aber die in Rede stehende gemeinschaftliche Chorde durch den Anfangs-Punct der Coordinaten gehe, mufs aus ihrer Gleichung:

$$2(\alpha-\alpha')y+(\beta-\beta')x+2(\delta-\delta') = 0,$$

das constante Glied verschwinden, was nur dann geschieht, wenn:

$$\delta = \delta'.$$

Diefs ist also die Bedingung der einfachen Osculation.

Die Gleichung der gemeinschaftlichen Chorde wird bei dieser Voraussetzung folgende:

$$2(\alpha-\alpha')y+(\beta-\beta')x = 0. \qquad (5)$$

Da wir über die Richtung der ersten Axe durchaus keine Bestimmung gemacht haben, so können wir für dieselbe jene gemeinschaftliche Chorde nehmen, und also dieselbe durch den Osculations-Punct und den Durchschnitts-Punct der beiden Curven legen. Damit aber die letzte Gleichung die Gleichung der ersten Axe werde und mithin folgende Form:

$$y = 0,$$

annehme, mufs folgende Gleichung Statt finden:

$$\beta = \beta'.$$

Indem man also die gemeinschaftliche Tangente im Osculations-Puncte als zweite Axe nimmt, und die erste Axe durch diesen Punct und den Durchschnitts-Punct der beiden Curven legt, so hat man zwischen den Constanten ihrer Gleichungen:

$$y^2+2\alpha xy+\beta x^2+2\delta x = 0,$$
$$y^2+2\alpha' xy+\beta' x^2+2\delta' x = 0,$$

zugleich folgende beiden Bedingungs-Gleichungen:

$$\beta = \beta', \quad \delta = \delta'.$$

Für die in dieser Nummer bestimmte Art der Osculation findet jedesmal ein sich Durchschneiden der beiden Curven Statt, was sogleich daraus sich ergibt, dafs die durch (5) dargestellte gerade Linie, welche die Curven im Anfangs-Puncte schneidet, nothwendig jeder derselben noch in einem zweiten Puncte begegnet; und dieser Punct fällt mit dem Anfangs-Puncte so lange nicht zusammen, als jene gerade Linie nicht in eine Tangente übergeht. (Wir sehen hierbei von dem speciellen Falle ab, dafs die beiden sich osculirenden Curven Hyperbeln sind, die eine parallele Asymptote haben. Dieser Fall tritt dann ein, wenn $\beta = \beta' = 0$.) Daraus, dafs zwei sich osculirende Curven zweiter Ordnung aufser dem Osculations-Puncte nur noch einen einzigen Durchschnitts-Punct gemein haben, folgt, dafs jede der Curven in diesen beiden Puncten in solche zwei Theile getheilt wird, von welchen der eine aufserhalb, der andere innerhalb der andern Curve liegt.

347. Wenn die durch die Gleichung:

$$2(\alpha-\alpha')y+(\beta-\beta')x = 0,$$

dargestellte gerade Linie eine Tangente ist, so fällt der Durchschnitts-Punct mit dem Osculations-Puncte zusammen, es vereinigen sich also alle vier Durchschnitte in einen einzigen; es findet zwischen den beiden Curven der höchste Grad der Osculation Statt,

Digitized by Google

ein Contact der dritten Ordnung oder von vier Puncten. Damit aber die letzte Gleichung eine Tangente darstelle, mufs sie mit der zweiten Axe zusammenfallen, und also folgende Form annehmen können:

$$x = 0,$$

und hierzu ist erforderlich, dafs:

$$\alpha = \alpha'.$$

Indem man also die gemeinschaftliche Tangente im Osculations-Puncte zweier sich vierpunctig osculirenden Curven zur zweiten Axe nimmt, während man der ersten Axe irgend eine beliebige Richtung gibt, so hat man zwischen den Constanten in den Gleichungen der beiden Curven:

$$y^2+2\alpha xy+\beta x^2+2\delta x = 0,$$
$$y^2+2\alpha' xy'+\beta' x^2+2\delta' x = 0,$$

zugleich folgende beiden Bedingungs-Gleichungen:

$$\alpha = \alpha', \quad \delta = \delta'.$$

Zu denselben beiden Bedingungs-Gleichungen kommen wir auch auf folgendem Wege. Wenn nemlich die gemeinschaftliche Chorde zweier sich berührenden Curven zweiter Ordnung der gemeinschaftlichen Tangente parallel seyn soll, so ergibt sich, bei der bisherigen Coordinaten-Bestimmung, sogleich aus dem Anblick der Gleichung (3) folgende Bedingungs-Gleichung:

$$\alpha = \alpha'.$$

Die eben angezogene Gleichung der Chorde wird alsdann:

$$(\beta-\beta')x+2(\delta-\delta') = 0.$$

Wenn diese Chorde (indem wir etwa eine Curve als gegeben, die andere als veränderlich betrachten) ihre Richtung beibehaltend der Tangente so lange immer näher rückt, bis sie endlich ganz mit ihr zusammenfällt, wo alsdann vier Durchschnitte sich in einen einzigen Punct vereinigen: so mufs aus der letzten Gleichung der Coefficient von x verschwinden, und wir erhalten also neben der obigen Bedingungs-Gleichung noch folgende:

$$\delta = \delta',$$

welche, für sich allein, eine dreipunctige Osculation anzeigt.

348. Die Resultate der beiden letzten Nummern sind symmetrisch und einfach, und hiervon können wir schon mit Zuversicht abnehmen, dafs alle geometrischen Beziehungen zweier sich osculirenden Curven zu einander, sich auf eine leichte Weise aus der Combination der Gleichungen (4) werden herleiten lassen, indem wir die jedem Falle entsprechenden Bedingungs-Gleichungen zwischen den Constanten dieser Gleichungen berücksichtigen.

Einen Augenblick wollen wir noch bei den Betrachtungen verweilen, auf welchen die vorstehenden Entwicklungen beruhen. Jede Tangenten-Theorie und jede Theorie der Osculation gründet sich auf die Voraussetzung, dafs zwei und mehrere Durchschnitts-Puncte in einen einzigen zusammenfallen, eine Voraussetzung, die man auf verschiedene Arten umschreiben, aber, nach meiner Meinung, nicht ganz umgehen oder mit einer andern Betrachtungs-Weise, welche eine deutlichere und allgemeinere Idee von der Sache gibt, vertauschen kann.

Der erste Gedanke, der sich darbietet, um das Zusammenfallen zweier oder mehrerer Durchschnitts-Puncte zweier beliebigen Curven in einen einzigen Punct analytisch auszudrücken, ist, zwischen den Gleichungen derselben eine der veränderlichen Gröfsen zu eliminiren. Auf diese Weise erhält man eine Gleichung in der übrig bleibenden ver-

änderlichen Gröfse, deren Wurzeln die Ordinaten oder Abscissen der Durchschnitts-Puncte sind. Wenn wir alsdann die Constanten in den Gleichungen der beiden Curven als unbestimmte Coefficienten betrachten, und bei dieser Voraussetzung Bestimmungen über die Realität oder Imaginärität, Gleichheit oder Ungleichheit der Wurzeln der durch Elimination resultirenden Gleichung machen, so unterwerfen wir dadurch die beiden Curven gewissen Bedingungen. Wenn wir uns auf zwei Linien zweiter Ordnung beschränken, so erhalten wir im Allgemeinen in Beziehung auf jede der veränderlichen Gröfsen eine Gleichung vom vierten Grade, deren Wurzeln die Coordinaten ihrer Durchschnitte bezeichnen. Soll zwischen den beiden Curven eine einfache Berührung Statt finden, so müssen die beiden eben bezeichneten Gleichungen zwei gleiche Wurzeln haben, soll eine zwiefache Berührung Statt finden, so mufs es zwei Paare gleicher Wurzeln geben. Verlangt man, dafs die beiden Curven sich dreipunctig osculiren, so müssen drei Wurzeln einander gleich seyn, und da die vierte Wurzel allein nicht imaginär seyn kann, so müssen in diesem Falle die beiden Curven sich zu gleicher Zeit schneiden. Sollen endlich die beiden Curven zweiter Ordnung einen Contract der höchsten Ordnung unter einander haben, so müssen alle Wurzeln einander gleich seyn, und ein sich Durchschneiden der Curven kann nicht mehr Statt finden. Der hierdurch angezeigte Gang der Discussion hat den Mangel, dafs eine der resultirenden Gleichung, für sich allein, unbestimmt läfst, ob zwei gleiche Wurzeln einen Berührungs-Punct, oder zwei solche Puncte anzeigen, die auf einer der einen Coordinaten-Axe parallelen geraden Linie liegen. Bei den Entwicklungen in den vorigen Nummern ist diefs nicht der Fall, und zugleich führen dieselben leichter zum Ziele.

Die Theorie der Osculation ist also die geometrische Deutung eines analytischen Factums, nemlich der gleichen Wurzeln solcher Gleichungen, zu denen wir durch Elimination einer veränderlichen Gröfse zwischen zweien Gleichungen mit zweien veränderlichen Gröfsen gelangen *).

---

*) Die im Texte in Beziehung auf zwei Linien zweiter Ordnung entwickelte Theorie der Osculation beschränkt sich nicht auf diesen besondern Fall. Um diefs durch Beispiele zu belegen, wollen wir in einer Note die Linien dritter Ordnung mit einer geraden Linie und den Linien zweiter Ordnung zusammenstellen, und dann einige allgemeine Bemerkungen anknüpfen. Die allgemeine Gleichung des dritten Grades sey:

$$y^3+Ay^2x+Byx^2+Cx^3+Dy^2+Exy+Fx^2+Gy+Hx+I = o.$$

Setzen wir in dieser Gleichung $x = o$, so erhalten wir folgende Gleichung:

$$y^3+Dy^2+Gy+I = o,$$

zur Bestimmung der Durchschnitte der zweiten Axe mit der Curve. Der Anblick dieser Gleichung zeigt, dafs $I = o$ seyn mufs, wenn der Anfangs-Punct auf dem Umfange der Curve angenommen wird, und dafs überdiefs noch $G = o$ seyn mufs, wenn die zweite Axe die Curve im Anfangs-Puncte berühren soll. Es kann aber auch in der Gleichung der Curve zugleich noch $D = o$ seyn: alsdann hat die zweite Axe mit der Curve einen dreipunctigen Contact, den wir mit vollem Rechte Osculation nennen können. Es ist aber im Allgemeinen möglich, aus der Gleichung der Linien dritter Ordnung durch Verlegung des Anfangs-Punctes und durch Veränderung der Richtung der zweiten Axe das constante Glied und die mit y und y^2 behafteten Glieder fortzuschaffen. Hieraus erhellet, dafs zwischen einer gera-

349. Man mifst die Krümmung einer Curve in irgend einem ihrer Puncte nach dem Radius desjenigen Kreises, von welcher dieselbe im gegebenen Puncte osculirt wird, der

---

den Linie und einer Linie dritter Ordnung im Allgemeinen zwar nur eine einfache Berührung, für gewisse Puncte aber eine dreipunctige Osculation Statt finden kann.

Wenn wir irgend eine gegebene Linie dritter Ordnung auf irgend einen Punct ihres Umfanges, als Anfangs-Punct, und die Tangente in diesem Puncte, als zweite Axe, beziehen und durch denselben Punct eine Linie zweiter Ordnung, die ebenfalls von der zweiten Axe berührt wird, legen, so erhalten wir für die beiden Curven Gleichungen von folgenden Formen:

$$y^3+Ay^2x+Bxy^2+Cx^3+Dy^2+Exy+Fx^2+Hx = 0, \quad (1)$$

$$y^2+2\alpha xy+\beta x^2+2\delta x = 0, \quad (2)$$

Substituiren wir in die erste Gleichung $-y(2\alpha xy+\beta x^2+2\delta x)$ für y^3 und $-D(2\alpha xy+\beta x^2+2\delta x)$ für Dy^2, so erhalten wir die Gleichung einer neuen Linie dritter Ordnung, von welcher (2) in denselben Puncten geschnitten wird als von (1). Diese Gleichung, der wir folgende Form geben können:

$$x((A-2\alpha)y^2+(B-\beta)xy+Cx^2+(E-2\delta-2D\alpha)y+(F-D\beta)x+(H-2D\delta)) = 0,$$

stellt das System einer Linie zweiter Ordnung und der zweiten Axe dar. Es liegen also zwei, in einen Berührungs-Punct zusammenfallende Durchschnitte der beiden Curven (1) und (2) auf dieser Axe, die eine gemeinschaftliche Tangente derselben ist, die übrigen vier Durchschnitte liegen auf der durch folgende Gleichung dargestellten Linie zweiter Ordnung:

$$(A-2\alpha)y^2+(B-\beta)xy+Cx^2+(E-2\delta-2D\alpha)y+(F-D\beta)x+(H-2D\delta) = 0. \quad (3)$$

Wenn sich also die beiden Curven (1) und (2) drei-, vier-, fünf- oder endlich sechspunctig osculiren sollen, so mufs die Curve (3) durch den Anfangs-Punct der Coordinaten gehen, in diesem Puncte mit der Curve (2) eine gemeinschaftliche Tangente haben, dieselbe dreipunctig oder endlich vierpunctig osculiren. Diefs führt uns zu folgenden Bedingungs-Gleichungen:

$$H-2D\delta = 0, \quad (4)$$

$$E-2\delta-2D\alpha = 0, \quad (5)$$

$$F-D\beta = (A-2\alpha)2\delta, \quad (6)$$

$$B-\beta = (A-2\alpha)2\alpha. \quad (7)$$

Die einfache Osculation der beiden Curven (1) und (2) wird durch die erste dieser Gleichungen angezeigt. Die osculirende Linie zweiter Ordnung kann auch ein Kreis seyn, und somit erhalten wir, bei der Annahme rechtwinkliger Coordinaten, für den Krümmungs-Halbmesser, abgesehen vom Zeichen, folgenden Werth: $\frac{H}{2D}$. In dem Falle der vierpunctigen Osculation müssen die beiden Gleichungen (4) und (5) zugleich bestehen; es gibt noch unendlich viele osculirende Linien zweiter Ordnung, aber im Allgemeinen gehört in die Reihe derselben kein Kreis mehr. Diefs findet nur in demjenigen Falle Statt, dafs folgende Bedingungs-Gleichung:

$$H = DE, \quad (8)$$

zu der wir kommen, wenn wir $\alpha = 0$ setzen, und alsdann 2δ zwischen den Gleichungen (4) und (5) eliminiren, zwischen den Constanten der Linie dritter Ordnung besteht. In dem Falle der fünfpunctigen Osculation müssen die Gleichungen (4), (5) und (6) zugleich

Digitized by Google

Radius dieses Kreises heifst aus diesem Grunde der Krümmungs-Halbmesser der Curve in dem gegebenen Puncte. Die 345. Nummer gibt sogleich eine Construction des Oscu-

---

Statt haben; wir erhalten alsdann für α, β und δ bestimmte und einzige Werthe: es gibt nur eine einzige osculirende Linie zweiter Ordnung. Soll diese Linie ein Kreis seyn, so erhalten wir, ähnlich wie eben, folgende Bedingungs-Gleichung:

$$F-D = AE, \qquad (9)$$

die zugleich mit (8) bestehen mufs. Der höchstmögliche Grad der Osculation ist ein sechspunctiger, der aber nicht in jedem Puncte der gegebenen Linie dritter Ordnung Statt finden kann. Denn in diesem Falle müssen die Gleichungen (4)—(7) alle vier befriedigt werden, wodurch wir nach der Elimination von α, β und δ zu folgender Bedingungs-Gleichung zwischen den Constanten der Gleichung (1) kommen:

$$BD^4-(F+AE)D^3+(2AH+E^2)D^2-3EHD+2H^2 = 0. \qquad (10)$$

Diese Gleichung reducirt sich vermittelst der Bedingungs-Gleichungen (8) und (9) auf:

$$B = 1,$$

und diese Gleichung mufs zugleich mit (8) und (9) befriedigt werden, wenn die sechspunctig osculirende Curve ein Kreis seyn soll. Die letzte Gleichung ergibt sich unmittelbar aus (7). Wenn eine Curve des dritten Grades durch mehr als sechs, auf dem Umfange einer Linie zweiter Ordnung beliebig angenommene, Puncte, die namentlich auch in einen einzigen Punct zusammenfallen können, gehen soll, so mufs die Gleichung der letztern Curve als Factor der Gleichung der Linie dritter Ordnung erscheinen, und diese daher das System der Linie zweiter Ordnung und irgend einer geraden Linie seyn.

Bei einiger Aufmerksamkeit können wir die vorstehenden Entwicklungen auch auf die Zusammenstellung beliebiger andern Curven ausdehnen. Es können überhaupt zwei Linien der m. und n. Ordnung einen Contact von mn. Puncten haben, deren Zahl derjenigen der möglichen Durchschnitts-Puncte der beiden Curven gleichkommt. Wenn wir die Curve des m. Grades als eine gegebene betrachten, so können wir aber nur durch so viele, beliebig auf derselben angenommenen Puncte, die auch zusammenfallen können, eine Linie der n. Ordnung legen, als diese Linien Constante hat, deren Zahl $2+3+..(n+1) = \frac{n(n+3)}{1.2}$ beträgt. Diese Zahl müssen wir, wenn $m = n$ ist, damit die beiden Curven nicht zusammenfallen, noch um Eins vermindern. Es kann also auch eine Curve vom m. Grade in einem gegebenen Puncte von einer Curve des n. Grades im Allgemeinen nur $\frac{n(n+3)}{1.2}$ punctig osculirt werden. Die osculirende Curve ist alsdann vollkommen bestimmt und einzig. Es kann eine Linie des n. Grades in einem gegebenen Puncte, im Allgemeinen, von einer andern (und zwar von unendlich vielen anderen) desselben Grades höchstens $\left(\frac{n(n+3)}{1.2}-1\right)$ punctig osculirt werden. Ist in den beiden letzten Fällen die zu osculirende Curve eine gegebene, der Osculations-Punct aber irgend ein beliebiger, so steigt der höchstmögliche Grad der Osculation um Eins. Dafs dieser Grad für gewisse Curven des m. und n. Grades in gewissen Puncten derselben bis zum mn. steigen kann, ist daraus offenbar, dafs die diesen Fall anzeigenden mn. Bedingungs-Gleichungen im Allgemeinen befriedigt

Digitized by Google

lations-Kreises. Denn da die gemeinschaftlichen Chorden einer gegebenen Linie zweiter Ordnung und aller Kreise, welche mit derselben in einem gegebenen Puncte eine gemein-

---

werden können, da die Zahl der Constanten der Gleichungen der beiden Curven zusammen, nemlich

$$\frac{m(m+3)}{1.2}+\frac{n(n+3)}{1.2}=mn+\frac{(m-n)^2+3(m+n)}{2},$$

gröfser ist als mn.

Wenn eine Linie der n. Ordnung gegeben ist, so läfst sich durch irgend $\left(\frac{n(n+3)}{2}-1\right)$ Puncte derselben eine neue Linie derselben Ordnung legen. Diese Linie schneidet die gegebene in n^2 Puncte. Aber auch wenn diese n^2 Puncte bekannt sind, bleibt die Construction der zweiten Curve eine unbestimmte Aufgabe. Denn durch die n^2 Durchschnitte irgend zweier Curven des n. Grades, deren Gleichungen wir durch $A = 0$ und $A' = 0$ darstellen wollen, lassen sich unendlich viele Curven desselben Grades legen, deren allgemeine Gleichung (indem μ einen unbestimmten Coefficienten bedeutet) folgende ist: $A+\mu A' = 0$. Um die zweite Curve vollständig zu bestimmen, gehört noch die Annahme irgend eines $\frac{n(n+3)}{1.2}$. Punctes, der nicht auf der ersten Curve liegt. Es folgt hieraus, dafs alle Curven des n. Grades, welche durch $\left(\frac{n(n+3)}{1.2}-1\right)$ gegebene Puncte gehen, sich aufser in diesen gegebenen Puncten noch in denselben

$$n^2-\frac{n(n+3)}{1.2}+1=\frac{n(n-3)}{1.2}+1$$

Puncten schneiden. Also wird auch eine gegebene Curve des n. Grades von allen Curven desselben Grades, von welchen sie in einem gegebenen Puncte $\left(\frac{n(n+3)}{1.2}-1\right)$ punctig osculirt wird, in denselben $\left(\frac{n(n-3)}{1.2}+1\right)$ Puncten geschnitten. Diese Durchschnitts-Puncte können in besonderen Fällen alle oder zum Theil mit dem Osculations-Puncte zusammenfallen, alsdann kann die gegebene Curve in dem gegebenen Puncte von Curven desselben Grades nur in dem hierdurch bestimmten höhern Grade osculirt werden. Alle Curven des dritten Grades, um ein einzelnes Beispiel hervorzuheben, die eine gegebene Curve desselben Grades in einem gegebenen Puncte achtpunctig osculiren, schneiden dieselbe überdiefs noch in ein und demselben Puncte; in gewissen Puncten der gegebenen Curve kann dieselbe von einer andern neunpunctig osculirt werden; alsdann gibt es in einem solchen Puncte keine acht-, sondern nur eine neunpunctige Osculation. Hierher gehört endlich auch der Fall zweier gleichseitigen Hyperbeln, die sich in vier Puncten schneiden, und deren Gleichungen eben so viele Constante haben (285, 351).

Es gibt überhaupt, indem wir $n > m$ und $nm \geqq \frac{n(n+3)}{1.2}$ nehmen, unendlich viele Curven des n. Grades, welche durch $\left(\frac{n(n+3)}{1.2}-1\right)$ beliebig auf dem Umfange einer gegebenen Linie des m. Grades angenommenen Puncte gehen, oder welche insbesondere die letztgenannte Linie in einem beliebig angenommenen Puncte $\left(\frac{n(n+3)}{1.2}-1\right)$ punctig osculiren.

Digitized by Google

schaftliche Tangente haben, in deren Zahl auch der verlangte Osculations-Kreis gehört, parallel sind, so brauchen wir nur irgend einen dieser Berührungs-Kreise zu construiren, und parallel mit der gemeinschaftlichen Chorde der Curve und dieses Kreises, durch den gegebenen Punct eine gerade Linie zu ziehen. Der Osculations-Kreis geht alsdann durch den Durchschnitt dieser geraden Linie mit der Curve, und ist mithin leicht zu construiren.

350. Bei derselben Axen-Bestimmung als früher sey:

$$y^2+2\alpha' xy+\beta' x^2+2\delta' x = 0, \qquad (1)$$

die Gleichung irgend einer Curve zweiter Ordnung, die wir als gegeben betrachten; alsdann können wir die Gleichungen aller Curven derselben Ordnung, welche die gegebene

---

Alle diese Linien der m. Ordnung schneiden die gegebene Linie der n. Ordnung überdiefs noch in denselben

$$nm-\frac{n(n+3)}{1.2}+1 = \frac{n(2m-n-3)}{2}+1$$

Puncten. Alle Curven des 9. Grades z. B., welche durch 53 beliebig auf einer gegebenen Curve des 6., 7., oder endlich des 8. Grades geht, schneiden die gegebene Curve aufserdem noch in 1, 10 oder endlich in 19 constanten Puncten.

Wir wollen noch zum Schlusse dieser Note eine allgemeine Construction des Krümmungs-Halbmessers einer Curve irgend eines beliebigen Grades in einem gegebenen Puncte derselben entwickeln. Indem wir wiederum diesen Punct zum Anfangs-Puncte und die Tangente in demselben zur zweiten Axe nehmen, sey die Gleichung der Curve:

$$y^n + ay^{n-1}x \ldots + cx^n + dy^{n-1} + ey^{n-2}x \ldots + gy^2 + hyx + ix^2 + kx = 0,$$

Alsdann ist offenbar, bei der Annahme rechtwinkliger Coordinaten, der Krümmungs-Halbmesser gleich $k:2g$. Es ist aber ferner, wenn wir die Abstände der Durchschnitte der Tangente und der Normalen mit der Curve (den Anfangspunct nicht mitgerechnet) durch:

$$y_1, y_2 \ldots y_{n-2}; \qquad x_1, x_2 \ldots x_{n-1};$$

bezeichnen:

$$k:e = x_1 . x_2 \ldots x_{n-1}; \qquad g = y_1 . y_2 \ldots y_{n-2}.$$

Es ist endlich, wenn wir durch irgend einen beliebigen Punct der Normalen eine gerade Linie der Tangente parallel ziehen, und die Abstände der Durchschnitte dieser Parallelen und der Normalen mit der Curve von jenem beliebigen Puncte durch:

$$\eta_1, \eta_2 \ldots \eta_n; \qquad \xi_1, \xi_2 \ldots \xi_n;$$

bezeichnen:

$$c = \frac{\eta_1 . \eta_2 \ldots \eta_n}{\xi_1 . \xi_2 \ldots \xi_n},$$

und mithin der in Rede stehende Krümmungs-Halbmesser:

$$\tfrac{1}{2} . \frac{\eta_1 . \eta_2 \ldots \eta_n}{\xi_1 . \xi_2 \ldots \xi_n} . \frac{x_1 . x_2 \ldots x_{n-2} . x_{n-1}}{y_1 . y_2 \ldots y_{n-2}}.$$

Wir können diesen Ausdruck leicht construiren, und somit, wenn irgend eine Curve gegeben ist, in einem beliebigen Puncte derselben den Krümmungs-Halbmesser bestimmen. Nur dürfen wir hierbei nicht übersehen, dafs, um diese Construction graphisch auszuführen, alle Durchschnitte reell seyn müssen. Dieser Bestimmung können wir bei Linien dritter Ordnung immer Genüge leisten, wenn wir, was nur eine leichte Modification in die vorstehende Entwicklung bringt, statt der Normalen eine gerade Linie nehmen, welche mit der Tangente irgend einen beliebigen Winkel bildet.

Digitized by Google

im Anfangs-Puncte der Coordinaten einfach osculiren, in folgende Gleichung zusammenfassen:

$$y^2+2\alpha xy+\beta x^2+2\delta' x = 0, \qquad (2)$$

indem wir α und β als unbestimmte Coefficienten betrachten. Die letzte Gleichung kann hiernach eine Parabel, eine Ellipse mit jedem beliebigen Axen-Verhältnifs oder eine Hyperbel mit jedem beliebigen Asymptoten-Winkel darstellen. Bei der Voraussetzung rechtwinkliger Coordinaten ist die Gleichung des Osculations-Kreises folgende:

$$y^2+x^2+2\delta' x = 0,$$

und hiernach ist der Krümmungs-Halbmesser gleich δ', und nach §. 3 leicht zu construiren.

Wenn wir die Coordinaten-Axen irgend einem beliebigen Systeme zweier zugeordneten Durchmesser der Curve parallel nehmen, und also an die Stelle der Gleichung (1) folgende setzen:

$$y^2+\beta' x^2+2\delta' x = 0,$$

so ist, indem wir den Coordinaten-Winkel durch ξ bezeichnen, die Gleichung des Osculations-Kreises folgende:

$$y^2+2xy\cos\xi+x^2+2\delta' x = 0.$$

Dieser Kreis schneidet auf der ersten Axe, d. h. auf demjenigen Durchmesser, der durch den Berührungs-Punct geht, ein Segment $(-2\delta')$ ab, und dieses Segment ist, wenn wir die Gröfse des eben bezeichneten Durchmessers $2A$ und die Gröfse seines zugeordneten $2B$ nennen, gleich $\frac{2B^2}{A}$ (243), welchen Ausdruck man auch wohl den Parameter des erstgenannten Durchmessers nennt. Hiernach ergibt sich die gewöhnliche Construction des Osculations-Kreises.

Für den Fall der gleichseitigen Hyperbel ist die vom Osculations-Kreise auf dem durch den Osculations-Punct gehenden Durchmesser interceptirte Chorde der Länge dieses Durchmessers gleich.

Der Krümmungs-Halbmesser überhaupt ist gleich $\frac{B^2}{A\sin\xi}$.

Auch bei der Parabel ist das vom Osculations-Kreise auf dem durch den Osculations-Punct gehenden Durchmesser bestimmte Segment gleich dem Parameter dieses Durchmessers; der Krümmungs-Halbmesser ist

$$\frac{\delta'}{\sin\xi} = \frac{p}{\sin^3\xi}.$$

351. Wir wollen statt der Gleichung (2) der vorigen Nummer nun folgende nehmen:

$$y^2+2\alpha xy+\beta' x^2+2\delta' x = 0, \qquad (3)$$

welche bei einer schicklichen Annahme von α alle Linien zweiter Ordnung darstellt, die die gegebene im Anfangs-Puncte der Coordinaten osculiren und in einem constanten Puncte der ersten Axe sich schneiden. Diese Gleichung kann nicht mehr jede besondere Art von Linien zweiter Ordnung darstellen; sie bezeichnet z. B. bei der Voraussetzung rechtwinkliger Coordinaten nur gleichseitige Hyperbeln, wenn die gegebene Curve eine gleichseitige Hyperbel, und also der Coefficient β' gleich (-1) ist. Solcher Hyperbeln gibt es unendlich viele, die sich alle in demselben Puncte osculiren und in demselben Puncte der ersten Axe, die senkrecht auf der Tangente im Osculations-Puncte steht, schneiden. Hieraus folgt, dafs alle gleichseitige Hyperbeln, welche sich in demselben Puncte osculiren, sich auch in demselben Puncte schneiden.

Digitized by Google

Indem wir $\beta' = 0$ setzen, stellt die Gleichung (3) unendlich viele sich in demselben Puncte osculirende Hyperbeln dar, die eine Asymptote parallel, und keinen Punct aufser dem Osculations-Puncte mit einander gemein haben. In die Reihe derselben ordnet sich eine Parabel, deren Durchmesser den parallelen Asymptoten parallel sind.

Soll die Gleichung (3), bei einer beliebigen Coordinaten-Annahme, auch die Gleichung eines Kreises in sich schliefsen, so mufs in der Gleichung der gegebenen Curve β gleich Eins seyn. Diefs vorausgesetzt, brauchen wir alsdann, um die Gleichung des Kreises selbst zu erhalten, nur den unbestimmten Coefficienten α dem Cosinus des Coordinaten-Winkels gleich zu nehmen. Damit aber β in der Gleichung der zu osculirenden Curve gleich Eins sey, müssen die Coordinaten-Axen mit der Haupt-Axe der Curve gleiche Winkel bilden. Wenn man also in irgend einem gegebenen Puncte einer gegebenen Curve zweiter Ordnung eine Tangente (die Axe der y) legt, und durch denselben Punct eine gerade Linie (die Axe der x), welche die Axen der Curve unter denselben Winkeln schneidet, als die Tangente es thut, so begegnet diese gerade Linie der Curve in einem Puncte, durch welchen zugleich auch derjenige Kreis geht, welcher die gegebene Curve im gegebenen Puncte osculirt. Hiernach können wir diesen Kreis auf die leichteste Weise construiren.

352. Indem wir wieder von folgender Gleichung einer gegebenen Curve zweiter Ordnung ausgehen:

$$y^2+2\alpha' xy+\beta' x^2+2\delta' x = 0,$$

können wir alle diejenigen Curven, welche die gegebene im Anfangs-Puncte der Coordinaten vierpunctig osculiren, durch nachstehende Gleichung, in der β allein unbestimmt bleibt, darstellen:

$$y^2+2\alpha' xy+\beta x^2+2\delta' x = 0.$$

Diese Gleichung kann wiederum nicht alle besonderen Arten von Linien zweiter Ordnung darstellen, z. B. bei der Annahme rechtwinkliger Coordinaten keinen Kreis, als nur in dem besondern Falle, wo in der Gleichung der gegebenen Curve das zweite mit xy behaftete Glied ganz ausfällt. Diefs heifst, mit anderen Worten, dafs eine gegebene Linie zweiter Ordnung nur in den End-Puncten ihrer Axen (eine Hyperbel nur in den beiden Scheiteln der Quer-Axe, eine Parabel nur in dem Scheitel ihres Haupt-Durchmessers) mit einem Kreise einen Contact von vier Puncten haben kann.

Wenn wir die Krümmung irgend einer Curve in einem ihrer Puncte noch genauer darstellen wollen, als vermittelst des Osculations-Kreises, so können wir diefs am füglichsten vermittelst einer Osculations-Parabel. Sey insbesondere:

$$y^2+\beta x^2+2\delta x = 0,$$

die Gleichung einer Linie zweiter Ordnung, die auf einen ihrer Durchmesser und der Tangente in einem Scheitel desselben, als Coordinaten-Axen, bezogen ist: so ist:

$$y^2+2\delta x = 0,$$

die Gleichung der Osculations-Parabel; die erste Axe ist ein Durchmesser dieser Parabel, und der Parameter desselben ist gleich:

$$2\delta = \frac{2B^2}{A}.$$

353. Alle sich in demselben Puncte berührende Linien zweiter Ordnung können wir, indem wir die Coordinaten-Axen wie bisher bestimmen, durch folgende Gleichung darstellen:

$$y^2+2\alpha xy+\beta x^2+2\delta x = 0.$$

Digitized by Google

Hiernach erhalten wir für die Gleichungen zweier Durchmesser:

$$y+\alpha x = 0,$$
$$\alpha y+\beta x+\delta = 0.$$

Die erste dieser Gleichungen zeigt, dafs die Mittelpuncte aller sich in demselben Puncte vierpunctig osculirenden Curven zweiter Ordnung auf einer geraden Linie liegen. Die Elimination von α zwischen den letzten beiden Gleichungen führt zu einer Gleichung des zweiten Grades in Beziehung auf y und x; es liegen also die Mittelpuncte aller derjenigen Linien zweiter Ordnung, welche sich in denselben beiden Puncten dreipunctig osculiren und schneiden, auf einer neuen Linie zweiter Ordnung. Der Ort der Mittelpuncte aller gleichseitigen Hyperbeln, die sich in demselben Puncte osculiren, ist ein Kreis.

354. Herr Poncelet giebt in den Annalen von Gergonne *), um den Vorzug der ihm eigenthümlichen, rein geometrischen, Behandlungs-Weise vor der analytischen bei der Behandlung geometrischer Aufgaben zu zeigen, unter anderen Constructionen die Construction folgender Aufgabe an:

„Wenn eine Curve zweiter Ordnung und zwei Puncte, von welchen der eine auf dem „Umfange der Curve sich befindet, der andere irgend ein beliebiger ist, gegeben sind: be„liebig viele Puncte einer andern Linie zweiter Ordnung, welche durch die beiden gege„benen Puncte geht, und in dem ersten derselben mit der gegebenen Curve einen Con„tact der dritten Ordnung hat, zu bestimmen, und zwar mit blofser Hülfe eines Lineals."

Wir wollen nach unserer Verfahrungs-Weise eine Construction dieser Aufgabe suchen; zu diesem Ende sey wiederum wie früher:

$$y^2+2\alpha xy+\beta x^2+2\delta x = 0, \qquad (1)$$

die Gleichung irgend einer Linie zweiter Ordnung. Die Gleichung eines Systems irgend zweier geraden Linien, die durch den Anfangs-Punct der Coordinaten, also durch denjenigen Punct, in welchem die Curve von der zweiten Axe berührt wird, gehen, sey folgende:

$$y^2+(\varkappa+\varkappa')xy+\varkappa\varkappa' x^2 = 0. \qquad (2)$$

Indem wir die beiden Gleichungen (1) und (2) von einander abziehen und die resultirende Gleichung durch x dividiren, ergibt sich:

$$(2\alpha-(\varkappa+\varkappa'))y+(\beta-\varkappa\varkappa')x+2\delta = 0, \qquad (3)$$

für die Gleichung derjenigen Chorde, die diejenigen Puncte verbindet, in welchen die beiden, durch den Berührungs-Punct gehenden, geraden Linien der Curve zum zweiten Male begegnen. Wenn wir einen der drei Coefficienten α, β und γ als eine beliebig zu bestimmende Gröfse betrachten, so stellt die Gleichung (1) unendlich viele, gewissen Bedingungen unterworfene, Linien zweiter Ordnung dar, während die Gleichung (3) unendlich viele gerade Linien darstellt, die ebenfalls gewisse Bedingungen erfüllen müssen. Betrachten wir erstens α und β als unveränderlich, so bleibt die durch (3) dargestellte gerade Linie immer mit sich selbst parallel. Die Discussion dieses Falles ist in der 345. Nummer einschliefslich enthalten.

Betrachten wir zweitens α und δ als constant, so haben alle durch (1) dargestellte Curven unter einander eine vierpunctige Osculation; die durch (3) dargestellten geraden Linien schneiden die Axe der y alle in demselben Puncte, dessen Ordinate ist:

$$y = -\frac{2\delta}{2\alpha-(\varkappa+\varkappa')}.$$

*) Gerg. Ann. VIII. p. 153.

Digitized by Google

Betrachten wir drittens β und δ als constant, so osculiren sich alle Curven dreipunctig im Anfangs-Puncte, und schneiden sich überdiefs in demselben Puncte der ersten Axe; alle gerade Linien (3) schneiden sich in demselben Puncte der ersten Axe, dessen Abscisse ist:

$$x = -\frac{2\delta}{\beta - xx}.$$

Fig. 29. 355. Der zweite Fall führt gerade zur Poncelet'schen Construction der oben angeführten Aufgabe, denn die geometrische Deutung dieses Resultates gibt folgenden Satz:

Wenn man durch den Osculations-Punct mehrerer, sich in demselben Puncte vierpunctig osculirenden, Curven nach beliebiger Richtung zwei diesen Curven zum zweiten Male begegnende, gerade Linien zieht, so schneiden sich die, durch die beiden zweiten Durchschnitte auf jeder der Curven bestimmten, Chorden in demselben Puncte der gemeinschaftlichen Tangente.

In der 29. Figur ist O der Osculations-Punct zweier solcher Curven, OM und ON sind zwei beliebige durch O gehende gerade Linien, MN und M'N' die beiden Chorden, die sich in S, einem Puncte der gemeinschaftlichen Tangente, schneiden. Wenn mithin eine der beiden sich osculirenden Curven, OMN, ein Punct M' der andern und zugleich des Osculations-Punct O gegeben sind, so können wir sogleich auf einer beliebig durch O gezogenen geraden Linie ON einen neuen Punct N' der zweiten Curve bestimmen.

Wenn die beiden geraden Linien OM und ON in eine einzige zusammenfallen, wo wir, dem entsprechend, in der Gleichung (2) $x = x'$ nehmen müssen, so gehen die durch (3) dargestellten Chorden in Tangenten über. Hiernach haben wir also auch folgenden Satz:

Wenn man durch den Osculations-Punct mehrerer sich in demselben Puncte vierpunctig osculirenden Curven nach beliebiger Richtung eine diesen Curven zum zweiten Male begegnende gerade Linie zieht, so vereinigen sich die Tangenten in allen diesen zweiten Durchschnitten in ein und demselben Puncte der gemeinschaftlichen Tangente.

In der 29. Figur sey ON die beliebig durch O gelegte gerade Linie, NQ und N'Q sind alsdann zwei Tangenten, die sich in einem Puncte Q der gemeinschaftlichen Tangente OQ schneiden. Wenn also in der eben behandelten Aufgabe statt des Punctes M' eine gerade Linie QN', von der die zweite gesuchte Curve berührt werden soll, gegeben ist, so können wir die so modificirte Aufgabe auf die frühere zurückführen, indem wir auf QN' den Berührungs-Punct bestimmen. Man lege zu diesem Ende von Q aus, dem Durchschnitte von QN' und der Tangente in O, eine zweite Tangente an die gegebene Curve, von welcher diese in N berührt werde, und ziehe ON; diese gerade Linie bestimmt alsdann auf der gegebenen Tangente QN' den gesuchten Berührungs-Punct N'. Auch diese Aufgabe erfordert nur den Gebrauch eines Lineals. (311).

Fig. 30. 356. Die geometrische Deutung des dritten Falles in der 354. Nummer gibt folgenden Satz:

Wenn mehrere Linien zweiter Ordnung sich in denselben beiden Puncten dreipunctig osculiren und schneiden, und man durch den Osculations-Punct nach beliebiger Richtung zwei den Curven zum zweiten Male begegnende gerade Linien zieht, so schneiden sich die durch die zweiten Durchschnitte auf jeder dieser Curven bestimmten Chorden in demselben Puncte derjenigen geraden Linie, welche den gemeinschaftlichen Osculations- und Durchschnitts-Punct verbindet.

Digitized by Google

In der Construction der 30. Figur sind O und P der Osculations- und Durchschnitts-Punct zweier in Rede stehenden Curven, ON und OM' zwei nach beliebiger Richtung durch O gelegte gerade Linien, und MN und M'N' die beiden sich in S, einem Puncte der geraden Linie OP, schneidenden Chorden.

Nach dem letzten Satze können wir folgende Aufgabe construiren:

„Wenn eine Curve zweiter Ordnung, und drei Puncte, von welchen zwei auf dem „Umfange derselben sich befinden, und der dritte ein ganz beliebiger ist, gegeben sind: „beliebig viele Puncte einer neuen Curve derselben Ordnung zu finden, welche die gege„bene in einem der beiden ersten gegebenen Puncte dreipunctig osculirt, im andern schnei„det, und endlich noch durch den dritten gegebenen Punct geht."

Sey nemlich OMPN die gegebene Curve, O der erste, P der zweite und M' der dritte gegebene Punct. Man ziehe OM' und nach beliebiger Richtung ON, von welchen beiden geraden Linien die gegebene Curve in M und N getroffen werde, man ziehe ferner MN und OP, welche einander in S begegnen, und endlich M'S, die, genugsam verlängert, die beliebig durch O gezogene gerade Linie ON in einem Puncte N' der zu bestimmenden zweiten Curve schneidet.

Wir können leicht die zweite Curve durch eine stete Bewegung beschreiben, indem wir den Punct N auf der gegebenen Curve fortrücken lassen, wodurch der Punct S verschiedene Lagen auf OP annimmt. Eine ähnliche Bemerkung gilt für die entsprechende Consruction der vorigen Nummer. Wir können überhaupt diese Construction als einen besondern Fall der letztgegebenen ansehen. Denn, wenn sich der Punct P immer mehr dem Puncte O nähert, und endlich mit demselben zusammenfällt, so geht die dreipunctige Osculation in eine vierpunctige, und die gerade Linie OP in eine Tangente im Osculations-Puncte über.

Wenn wir annehmen, dafs die beiden geraden Linien OM' und ON in eine einzige zusammenfallen, so erhalten wir folgenden Satz:

Wenn man durch den Osculations-Punct zweier oder mehrerer sich in denselben beiden Puncten osculirenden und schneidenden Curven zweiter Ordnung nach beliebiger Richtung eine gerade Linie zieht, welche die verschiedenen Curven zum zweiten Male schneidet, so vereinigen sich die Tangenten in diesen zweiten Durchschnitten alle in ein und demselben Puncte der durch den Osculations- und Durchschnitts-Punct gehenden geraden Linie.

In der 30. Figur vereinigen sich in Q die beiden Tangenten in N und N'.

Hiernach können wir, ähnlich wie in der vorigen Nummer, die obige Aufgabe nun auch dahin modificiren, dafs statt des dritten Punctes eine gerade Linie gegeben ist, von welcher die gesuchte Curve berührt werden soll.

Wir können endlich, nach dem an die Spitze dieser Nummer gestellten Satze, ganz allgemein eine Linie zweiter Ordnung construiren, die eine gegebene in einem gegebenen Puncte osculirt und überdiefs durch irgend zwei andere gegebene Puncte geht. Sey, indem wir uns wieder auf die 30. Figur beziehen, OMN die gegebene Curve, die in O osculirt werden soll, und M' und N' zwei Puncte, durch welche die verlangte Curve gehen soll. Man ziehe OM' und ON', die der gegebenen Curve in M und N begegnen, und ziehe ferner M'N' und MN, die sich in S, einem Puncte von OP, schneiden. Hiernach erhalten wir den Punct P, und können alsdann, nach dem Frühern, so viele Puncte der verlangten Curve finden, als wir wollen.

Digitized by Google

357. Die beiden Puncte, welche wir in den Constructionen der beiden vorigen Nummern S genannt haben, sind, nach dem Vorstehenden, constant für unendlich viele, gewissen Bedingungen unterworfene, Curven; sie sind es auch für unendlich viele Linien-Systeme, die wir nun näher bestimmen wollen. Zu diesem Ende gehen wir zur 3. Gleichung der 354. Nummer zurück:

$$(2\alpha-(\varkappa+\varkappa'))y+(\beta-\varkappa\varkappa')x+2\delta = 0, \qquad (3)$$

und betrachten in derselben α, β und δ als gegebene Coefficienten, $\varkappa$ und $\varkappa'$ aber als noch zu bestimmende Gröfsen. Diese Gleichung bezeichnet gerade Linien, welche die Axe der y, d. h. die Tangente im Anfangs-Puncte, in einem festen und unveränderlichen Puncte schneiden, wenn $(\varkappa+\varkappa')$ constant ist. Um Systeme zweier geraden Linien, die diesen Bedingungen entsprechen, zu construiren, ziehe man irgend eine gerade Linie der Tangente parallel, und bestimme auf dieser geraden Linie verschiedene Paare von Puncten, die von einem festen, beliebig angenommenen, Puncte derselben gleichweit abstehen, und verbinde endlich die Puncte jedes Paares mit dem Berührungs-Puncte. Auf diese Weise erhält man verschiedene Systeme zweier geraden Linien, die auf der Curve Chorden bestimmen, die alle in ein und demselben Puncte der Tangente sich vereinigen.

Wenn die verschiedenen durch die Gleichung (3) dargestellten geraden Linien sich in demselben Puncte der ersten Axe, die eine beliebig zu bestimmende Richtung hat, schneiden sollen, so mufs $\varkappa\varkappa'$ constant seyn. Wenn wir uns auf den Fall rechtwinkliger Coordinaten beschränken, und überdiefs:

$$\varkappa\varkappa'+t = 0,$$

setzen, so haben wir folgenden bekannten Satz *):

Wenn man einen rechten Winkel, dessen Scheitel in irgend einem Puncte einer Linie zweiter Ordnung angenommen wird, um diesen Scheitel sich drehen läfst, so gehen die durch die Schenkel des Winkels in allen seinen verschiedenen Lagen auf der Curve bestimmten Chorden durch einen festen Punct, der auf der im beliebig angenommenen Puncte errichteten Normalen sich befindet.

Hiernach kann man, wenn irgend eine Linie zweiter Ordnung gegeben ist, in einem beliebigen Puncte derselben, mit blofser Hülfe eines rechten Winkels, die Normale construiren.

Wenn, bei den vorhin gemachten Voraussetzungen, überdiefs noch $\beta = -1$, und also die Curve eine gleichseitige Hyperbel ist, so sind alle durch (3) dargestellten Chorden unter einander und mit der Normalen parallel. Wir verweilen nicht bei der Aussage dieses Satzes, der schon in der 295. Nummer enthalten ist.

358. Wir wollen in dieser Nummer diejenigen Beziehungen aufsuchen, welche zwischen den Constanten der Gleichungen zweier Linien zweiter Ordnung Statt finden müssen, damit diese sich in zweien Puncten berühren. Zu diesem Ende nehmen wir wieder zwei Gleichungen von folgenden Formen:

$$\begin{aligned} y^2+2\alpha xy+\beta x^2+2\delta x &= 0, \\ y^2+2\alpha' xy+\beta' x^2+2\delta' x &= 0, \end{aligned} \qquad (1)$$

*) *Théorêmes nouveaux sur les lignes et surfaces du second ordre. Par M.* Fregier. *Gerg. Ann.* VI. p. 229. Man vergleiche ferner, wegen der Verallgemeinerung des Satzes: *Gerg. Ann.* VI. p. 321 und VII. p. 95.

indem wir die beiden Curven auf eine gemeinschaftliche Tangente, als zweite, und eine beliebige, durch den Berührungs-Punct gezogene, gerade Linie, als erste Axe, beziehen. Zwischen diesen beiden Gleichungen wollen wir die mit der ersten Potenz von x behafteten Glieder eliminiren; wir brauchen zu diesem Ende nur die beiden Gleichungen von einander abzuziehen, nachdem wir die erste mit δ', die zweite mit δ multiplicirt haben. Auf diese Weise kommen wir zu folgender Gleichung:

$$(\delta'-\delta)y^2+2(\alpha\delta'-\alpha'\delta)xy+(\beta\delta'-\beta'\delta)x^2 = 0, \qquad (2)$$

die ein System zweier geraden Linien darstellt, die durch den Anfangs-Punct der Coordinaten gehen, und alle Durchschnitte der beiden Curven enthalten. In dem Falle, dafs die Curven aufser dem Berührungs-Puncte keinen Punct mehr mit einander gemein haben, stellt die letzte Gleichung nicht mehr zwei gerade Linien, sondern nur den Berührungs-Punct dar. Wir können in dem Falle, dafs die beiden Curven sich schneiden, die letzte Gleichung noch vereinfachen, indem wir die erste Axe, deren Richtung wir bisher ganz unbestimmt gelassen haben, nun durch einen der beiden Durchschnitte legen. Alsdann mufs die Gleichung (2) sich auf ihre beiden ersten Glieder reduciren und mithin in folgende übergehen:

$$(\delta'-\delta)y^2+2(\alpha\delta'-\alpha'\delta)xy = 0, \qquad (3)$$

und endlich, wenn die beiden Durchschnitte der beiden Linien zweiter Ordnung in einen einzigen zusammenfallen sollen, in folgende:

$$y^2 = 0.$$

Hiernach erhalten wir, damit die beiden durch (1) dargestellten Curven sich zwiefach berühren, indem wir als zweite Axe die Tangente in einem der Berührungs-Puncte nehmen, und die erste Axe durch die beiden Berührungs-Puncte legen, folgende beiden Bedingungs-Gleichungen zwischen den Constanten:

$$\beta\delta'-\beta'\delta = 0, \qquad \alpha\delta'-\alpha'\delta = 0, \qquad (4)$$

und diese bringen folgende dritte mit sich;

$$\alpha\beta'-\alpha'\beta = 0.$$

Dieselben Bedingungen sind auch in folgendem Ausdrucke enthalten:

$$\frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{\beta}{\beta'} = \frac{\delta}{\delta'}. \qquad (5)$$

359. Sey nun:

$$y^2+2\alpha xy+\beta x^2+2\delta x = 0, \qquad (6)$$

die Gleichung einer der in der vorigen Nummer betrachteten, sich berührenden, Curven; die beiden Berührungs-Puncte liegen auf der ersten Axe, der eine im Anfangs-Puncte, die Abscisse des andern ist $\left(-\frac{2\delta}{\beta}\right)$. Für die Gleichungen zweier, durch die Berührungs-Puncte nach beliebiger Richtung gezogenen, geraden Linien können wir hiernach folgende nehmen:

$$x+\varkappa y = 0,$$

$$x+\varkappa' y+\frac{2\delta}{\beta} = 0,$$

wo $\varkappa$ und $\varkappa'$ Gröfsen sind, die von der Richtung dieser Linien abhängen, und die wir ganz unbestimmt lassen. Das System der beiden geraden Linien können wir hiernach durch folgende Gleichung darstellen:

$$\beta\varkappa\varkappa' y^2+\beta(\varkappa+\varkappa')xy+\beta x^2+2\delta\varkappa y+2\delta x = 0, \qquad (7)$$

Digitized by Google

Ziehen wir diese Gleichung von der Gleichung der Curve ab, und dividiren alsdann alle Glieder der resultirenden Gleichung durch y, so kommt:

$$(1-\beta xx')y+(2\alpha-\beta(x+x'))x-2\delta x = 0. \qquad (8)$$

Diese Gleichung stellt diejenige Chorde dar, welche durch die beiden Puncte geht, in welchen die beiden durch die Berührungs-Puncte gezogenen geraden Linien der Curve zum zweiten Male begegnen. Diese Chorde schneidet die erste Axe, d. h. diejenige gerade Linie, welche durch die beiden Berührungs-Puncte geht, in einem Puncte, dessen Abscisse ist:

$$x = \frac{2\delta x}{2\alpha-\beta(x+x')} = \frac{2.\frac{\delta}{\alpha}x}{2-\frac{\beta}{\alpha}(x+x')}. \qquad (9)$$

Aus den Gleichungen (4) der vorigen Nummer geht aber hervor, dafs, wenn wir durch die Gleichung (6) (indem wir α, β und δ als unbestimmte Coefficienten betrachten) alle möglichen Curven, welche sich in denselben beiden Puncten der ersten Axe berühren, darstellen: $\frac{\delta}{\alpha}$ und $\frac{\beta}{\alpha}$ constante Werthe haben, und mithin auch für alle diese Curven der durch die Gleichung (9) bezeichnete Punct ein fester und unveränderlicher ist. Wir haben mithin folgenden Satz bewiesen:

Wenn zwei oder mehrere Linien zweiter Ordnung sich in denselben beiden Puncten berühren, und man durch die beiden Berührungs-Puncte nach beliebiger Richtung zwei gerade Linien zieht, die den verschiedenen Curven zum zweiten Male begegnen, so bestimmen diese zweiten Durchschnitte auf jeder derselben eine Chorde, die durch einen festen Punct der die Berührungen verbindenden geraden Linie geht.

Nach diesem Satze können wir mit blofser Hülfe eines Lineals folgende, den frühern analoge, Aufgabe construiren:

„Wenn eine Linie zweiter Ordnung und auf dem Umfange derselben irgend zwei „Puncte gegeben sind, beliebig viele Puncte einer andern Linie derselben Ordnung zu „finden, welche die gegebene in den beiden gegebenen Puncten berührt, und überdiefs „noch durch einen dritten gegebenen Punct geht."

Wenn statt des zweiten Berührungs-Punctes irgend ein zweiter beliebiger Punct gegeben ist, so können wir unmittelbar jenen finden, und somit die allgemeinere Aufgabe auf die vorstehende zurückführen.

Wenn Alles wie im letzten Satze bleibt, und die beiden durch die Berührungs-Puncte gezogenen geraden Linien in einem Puncte einer der Curven sich schneiden, so ordnet sich die Tangente in diesem Puncte in die Reihe der eben bezeichneten Chorden.

Man sieht sogleich ein, dafs in dem Satze der gegenwärtigen Nummer, als besonderer Fall, der Satz der 355. Nummer enthalten ist. Wir können nemlich den Osculations-Punct als einen solchen Punct ansehen, in welchem die beiden Berührungs-Puncte zusammenfallen; die Chorde, welche die letztgenannten Puncte verbindet, geht alsdann in eine Tangente über.

Fig. 31. 360. Es gehören hierher noch zwei einzelne Sätze, von welchen wir den einen unmittelbar in der Gleichung (8) lesen können. Die durch diese Gleichung dargestellte gerade Linie schneidet nemlich die zweite Axe in einem Puncte, dessen Ordinate unabhängig von α ist. Dieser Durchschnitt bleibt mithin ein constanter Punct für alle Curven,

Digitized by Google

welche die Gleichung (6) darstellt, indem wir β und δ als ein für alle Mal gegeben, α aber als durchaus beliebig betrachten; für alle Curven also, welche die zweite Axe im Anfangs-Puncte osculiren, und sich in demselben Puncte der ersten Axe schneiden. Die Abscisse dieses Durchschnittes ist $\left(-\frac{2\delta}{\beta}\right)$, und mithin stellt die Gleichung (7) zwei nach beliebiger Richtung durch den Osculations-Punct und jenen Durchschnitts-Punct gezogene gerade Linien dar. Also:

Wenn man durch den Osculations- und den Durchschnitts-Punct zweier sich dreipunctig osculirenden Linien zweiter Ordnung nach beliebiger Richtung zwei gerade Linien zieht, so vereinigen sich die durch diese Linien auf den beiden Curven bestimmten Chorden in einem Puncte der gemeinschaftlichen Tangente im Osculations-Punete.

Dieser Satz liefert eine zweite Construction einer Linie zweiter Ordnung, welche eine gegebene OMN in einem gegebenen Puncte O osculirt, und überdiefs durch irgend zwei gegebene Puncte M' und N' geht. Man ziehe nemlich M'N', die der Tangente in O im Puncte S begegnet, ferner M'O (oder N'O), welche die gegebene Curve in M (oder N) schneidet, ziehe SM (oder SN), welche derselben in m (oder n) zum zweiten Male begegnet, und endlich N'm (oder M'n), die denjenigen Punct P bestimmt, in welchem die gegebene Curve von der gesuchten geschnitten wird. Sobald dieser Punct bestimmt ist, können wir den Durchschnitt jeder durch O oder P gehenden geraden Linie mit der verlangten Curve leicht bestimmen.

361. Den zweiten Satz erhalten wir ebenfalls ohne alle Mühe. Wir nehmen

$$\begin{aligned} y^2+2\alpha xy+\beta x^2+2\delta x &= 0, \\ y^2+2\alpha' xy+\beta' x^2+2\delta' x &= 0, \end{aligned} \qquad (1)$$

für die Gleichungen zweier sich im Anfangs-Puncte berührenden Curven, und ziehen nach einander von jeder dieser beiden Gleichungen die Gleichung eines Systems zweier durch den Berührungs-Punct gehenden geraden Linien:

$$y^2+(\varkappa+\varkappa')xy+\varkappa\varkappa' x^2 = 0,$$

ab. Alsdann ergibt sich, wenn wir zugleich alle Glieder der resultirenden Gleichung durch x dividiren, ähnlich wie in der 354. Nummer:

$$\begin{aligned} (2\alpha-(\varkappa+\varkappa'))y+(\beta-\varkappa\varkappa')x+2\delta &= 0, \\ (2\alpha'-(\varkappa+\varkappa'))y+(\beta'-\varkappa\varkappa')x+2\delta' &= 0, \end{aligned} \qquad (2)$$

und wenn wir diese beiden Gleichungen wiederum von einander abziehen, kommt:

$$2(\alpha-\alpha')y+(\beta-\beta')x+2(\delta-\delta') = 0. \qquad (3)$$

Die beiden durch (2) dargestellten Chorden schneiden sich also auf einer geraden Linie (3), welche dieselbe bleibt, wie wir auch die Richtung der beiden, durch den Berührungs-Punct gezogenen, geraden Linien bestimmen mögen, und die keine andere ist, als die gemeinschaftliche Chorde der beiden Linien zweiter Ordnung. Denn, wir kommen ebenfalls zu der Gleichung (3), indem wir die Gleichungen (1) von einander abziehen, und alle Glieder der resultirenden Gleichung durch x dividiren. Also:

Wenn man durch den Berührungs-Punct zweier sich einfach berührenden Linien zweiter Ordnung zwei gerade Linien zieht, so bestimmen diese Linien auf den beiden Curven zwei Chorden, die sich auf der gemeinschaftlichen Chorde der Curven schneiden.

Der in diesem Satze bezeichnete Durchschnitt ist ein constanter auch für alle andere Curven, welche mit den beiden gegebenen denselben Berührungs-Punct und dieselben beiden Durchschnitts-Puncte haben. Wenn wir den durch den Berührungs-Punct ge-

henden geraden Linien veränderte Richtungen gehen, so bleibt jener Durchschnitt immer auf einer geraden Linie, jener gemeinschaftlichen Chorde. Diese Chorde wird eine gemeinschaftliche Tangente, wenn die beiden Curven sich zum zweiten Male berühren. Dieſs können wir leicht geradezu zeigen. Führen wir nemlich die erste Axe durch die beiden Berührungs-Puncte, so ist nach der letzten Bedingungs-Gleichung der 358. Nummer die Gleichung (3) identisch mit folgenden beiden:

$$2\alpha y+\beta x+2\delta = 0,$$
$$2\alpha' y+\beta' x+2\delta' = 0,$$

in welchen wir ohne Mühe die gemeinschaftliche Tangente der beiden gegebenen Curven im Puncte $\left(0, -\frac{2\delta}{\beta}\right)$ wiederkennen.

Man hemerkt sogleich, dafs aus dem Satze der vorigen Nummer sowol als dieser sich wiederum derjenige Satz, auf welchem die Construction der Ponceletschen Anfgabe beruht, unmittelbar ergibt; überhaupt ist unverkennbar, dafs alle bisher erhaltenen Resultate specielle Fälle eines einzigen allgemeinen Satzes sind. Die folgende Nummer wird zeigen, wie wir zu diesem Satze auf eine eben so leichte Weise gelangen, als zu jedem speciellen Falle desselben.

362. Seyen:

$$y^2+2\alpha' xy+\beta' x^2+2\gamma' y+2\delta' x+\varepsilon' = 0,$$
$$y^2+2\alpha xy+\beta x^2+2\gamma y+2\delta x+\varepsilon = 0, \qquad (1)$$

die Gleichungen zweier sich in denselben beiden Puncten der zweiten Axe schneidenden Linien zweiter Ordnung. Alsdann erhalten wir nach der ersten Nummer dieses Paragraphen:

$$2(\alpha'-\alpha)y+(\beta'-\beta)x+2(\delta'-\delta) = 0 \qquad (2)$$

für die Gleichung derjenigen Chorde, welche durch die beiden übrigen (reellen oder imaginären) Durchschnitte der beiden Curven geht. Betrachten wir nun die erste Curve als ein für alle Mal gegeben, die zweite Curve aber einzig der Bedingung unterworfen, dafs sie der ersten in denselben beiden Puncten der zweiten Axe begegnet, d. h. nehmen wir α', β', γ', δ' und ε' als constant, ferner $\gamma = \gamma'$, $\varepsilon = \varepsilon'$ und also nur noch α, β und δ als unbestimmte Coefficienten: so schneiden sich alle durch (2) dargestellte Chorden in demselben Puncte der ersten Axe, über die bisher keine nähere Bestimmung getroffen worden ist, wenn in der zweiten der Gleichungen (1) auch noch β und δ constant sind. Damit aber die Bedingung erfüllt werde, dafs β, γ $(=\gamma')$, δ und ε $(=\varepsilon')$ constant seyen, müssen alle durch die eben angeführte Gleichung dargestellte Curven sich in denselben vier Puncten schneiden, und überdiefs mufs die erste Axe durch diejenigen beiden Durchschnitte gehen, welche nicht schon auf der zweiten Axe liegen. Hiermit ist folgender Satz bewiesen:

Wenn beliebig viele Linien zweiter Ordnung, die sich in denselben vier Puncten schneiden, gegeben sind, und man legt durch zwei dieser Durchschnitte eine, übrigens ganz beliebige, Linie derselben Ordnung, welche aufser der einen, allen Curven gemeinschaftlichen, Chorde mit jeder der gegebenen insbesondere noch eine zweite gemeinschaftliche Chorde hat: so gehen alle diese zweiten gemeinschaftlichen Chorden durch ein und denselben Punct, welcher zugleich auf der gemeinschaftlichen Chorde aller gegebenen Curven liegt.

Wenn wir bei drei Curven stehen bleiben, so haben wir also folgenden Satz:

Digitized by Google

Wenn irgend drei Linien zweiter Ordnung sich in denselben beiden Puncten schneiden, so vereinigen sich die, durch die übrigen Durchschnitte je zweier derselben bestimmten, drei gemeinschaftlichen Chorden in ein und demselben Puncte.

Dieser Satz ist einer der an Folgerungen reichsten in der Theorie der Linien zweiter Ordnung. Wir begnügen uns hier damit, blofs die Aussage desselben zu geben; in dem letzten Paragraphen dieses Abschnittes werden wir auf denselben zurückkommen, und bei der Discussion desselben länger verweilen.

§. 9.

Verbindung der Gleichungen zweier gegebenen Linien zweiter Ordnung zu der Gleichung einer Linie derselben Ordnung. Chordal-System. Chordal-Punct.

363. Seyen:

$$\begin{aligned} y^2+2\alpha xy+\beta x^2+2\gamma y+2\delta x+\varepsilon &= 0, \\ y^2+2\alpha' xy+\beta' x^2+2\gamma' y+2\delta' x+\varepsilon' &= 0, \end{aligned} \qquad (1)$$

die Gleichungen zweier gegebenen, auf irgend ein beliebiges Coordinaten-System bezogenen, Curven zweiter Ordnung. Wenn wir eine dieser Gleichungen, etwa die zweite, mit einem unbestimmten Coefficienten μ multipliciren, und alsdann zur andern addiren, so erhalten wir die allgemeine Gleichung aller derjenigen Curven derselben Ordnung, welche durch die (reellen oder imaginären) Durchschnitte der beiden gegebenen Curven gehen. Diese Gleichung nimmt, wenn wir die Coefficienten von y^2 auf Eins bringen, folgende Form an:

$$y^2+2\frac{\alpha+\mu\alpha'}{1+\mu}xy+\frac{\beta+\mu\beta'}{1+\mu}x^2+2\frac{\gamma+\mu\gamma'}{1+\mu}y+2\frac{\delta+\mu\delta'}{1+\mu}x+\frac{\varepsilon+\mu\varepsilon'}{1+\mu}=0. \qquad (2)$$

Wenn diese Gleichung ein System zweier geraden Linien oder einen Punct darstellen soll, so haben wir (234) folgende Bedingungs-Gleichung:

$$\begin{aligned} &(1+\mu)(\delta+\mu\delta')^2-2(\alpha+\mu\alpha')(\gamma+\mu\gamma')(\delta+\mu\delta')+(\beta+\mu\beta')(\gamma+\mu\gamma')^2+((\alpha+\mu\alpha')^2-(1+\mu)(\beta+\mu\beta'))\\ &\qquad(\varepsilon+\mu\varepsilon')=0, \end{aligned}$$

die, wenn wir entwickeln und nach den Potenzen von μ ordnen, in folgende übergeht:

$$\begin{aligned} &(\delta'^2-2\alpha'\delta'\gamma'+\beta'\gamma'^2+(\alpha'^2-\beta')\varepsilon')\mu^3+(\delta^2+2\delta\delta'-2\alpha\gamma'\delta'-2\alpha'\gamma\delta'-2\alpha'\gamma'\delta+\beta\gamma'^2+2\beta\gamma\gamma'+(\alpha'^2-\beta')\varepsilon\\ &+2\alpha\alpha'\varepsilon'-(\beta+\beta')\varepsilon')\mu^2+(\delta^2+2\delta\delta'-2\alpha'\gamma\delta-2\alpha\gamma'\delta-2\alpha\gamma\delta'+\beta'\gamma^2+2\beta\gamma\gamma'+(\alpha^2-\beta)\varepsilon'+2\alpha\alpha'\varepsilon \qquad (3)\\ &-(\beta+\beta')\varepsilon)\mu+(\delta^2-2\alpha\delta\gamma+\beta\gamma^2+(\alpha^2-\beta)\varepsilon)=0. \end{aligned}$$

Diese Gleichung gibt wenigstens einen reellen Werth für μ; sie reducirt sich nur dann auf den zweiten Grad, oder mit anderen Worten, eine ihrer Wurzeln wird Null oder unendlich, wenn eine der nachstehenden Gleichungen Statt findet:

$$\begin{aligned} \delta'^2-2\alpha'\delta'\gamma'+\beta'\gamma'^2+(\alpha'^2-\beta')\varepsilon' &= 0, \\ \delta^2-2\alpha\delta\gamma+\beta\gamma^2+(\alpha^2-\beta)\varepsilon &= 0, \end{aligned}$$

d. h. wenn eine der gegebenen Linien zweiter Ordnung selbst schon ein Linien-System oder ein Punct ist.

Nach der in der 324. Nummer angewendeten Schlufs-Weise ist *a priori* ersichtlich, dafs unter den durch die allgemeine Gleichung (2) dargestellten Linien zweiter Ordnung sich immer ein System zweier reellen geraden Linien befindet, und hiernach ergeben sich,

nach der 286. und 287. Nummer, unmittelbar die nachstehenden Folgerungen. Wenn die Gleichung (3) nur einen einzigen reellen Werth für μ gibt, so haben die beiden Curven (1) nur zwei reelle Durchschnitts-Puncte, und ihre Gleichungen lassen sich nur zu der Gleichung eines einzigen Linien-Systems und nicht zu der Gleichung eines Punctes oder einer imaginären Curve verbinden. Wenn die Gleichung (3) drei reelle Wurzeln hat, so sind die Durchschnitts-Puncte der beiden gegebenen Curven alle vier reell oder alle vier imaginär; im ersten Falle sind in der allgemeinen Gleichung die Gleichungen dreier Linien-Systeme, im zweiten Falle die Gleichungen eines Linien-Systems und zweier Puncte enthalten. Wenn die Gleichung (3) zwei gleiche Wurzeln hat, so müssen zwei der vier Durchschnitts-Puncte der beiden gegebenen Curven zusammenfallen und mithin diese Curven sich berühren; wenn diese Gleichung drei gleiche Wurzeln hat, so müssen die beiden gegebenen Curven sich dreipunctig osculiren. Wenn ein resultirendes System aus zwei Parallellinien bestehen soll, so mufs eine Wurzel der Gleichung (3) folgenden Ausdruck annulliren:

$$(\alpha+\mu\alpha')^2-(1+\mu)(\beta+\mu\beta');$$

geschieht diefs von zweien gleichen Wurzeln dieser Gleichung, so berühren sich die beiden gegebenen Curven zweimal. Diese doppelte Berührung kann aber auch, wenn wir uns diesen Ausdruck erlauben dürfen, imaginär werden; was dann Statt findet, wenn die Elimination von y und x zwischen den beiden gegebenen Gleichungen (1) zu solchen Gleichungen in x und y führt, die zwei Paar gleicher imaginären Wurzeln haben. Man überzeugt sich leicht, dafs in diesem Falle in der allgemeinen Gleichung (2) die Gleichungen zweier identischen Systeme von zwei zusammenfallenden Parallellinien und eines Punctes, und zwar des Poles derjenigen geraden Linie, in welche jene Parallellinien zusammenfallen, enthalten sind. Der Uebergang von der wirklichen zur imaginären doppelten Berührung bezeichnet die vierpunctige Osculation; die Gleichungen zweier sich vierpunctig osculirenden Curven zweiter Ordnung lassen sich zu den Gleichungen dreier identischen Systeme von zwei in die Tangente im Osculations-Puncte zusammenfallenden Parallellinien verbinden.

Wir nennen jedes derjenigen Systeme von zwei geraden Linien, zu dessen Gleichung wir durch Verbindung der Gleichungen zweier Curven zweiter Ordnung gelangen können, ein Chordal-System der beiden Curven, und diejenigen beiden Puncte, welche an die Stelle zweier dieser Chordal-Systeme treten können, Chordal-Puncte.

364. Indem wir für μ eine Wurzel der Gleichung (3) nehmen, erhält die Gleichung (2) folgende Form:

$$y^2+(\xi+\xi')xy+\xi\xi'x^2+(\zeta+\zeta')y+(\xi\zeta'+\xi'\zeta)x+\zeta\zeta' = 0,$$

und wir haben alsdann:

$$2\frac{\alpha+\mu\alpha'}{1+\mu} = \xi+\xi',$$

$$\frac{\beta+\mu\beta'}{1+\mu} = \xi\xi',$$

$$2\frac{\gamma+\mu\gamma'}{1+\mu} = \zeta+\zeta',$$

$$2\frac{\delta+\mu\delta'}{1+\mu} = \xi\zeta'+\xi'\zeta,$$

$$\frac{\epsilon+\mu\epsilon'}{1+\mu} = \zeta\zeta'.$$

Die Elimination von ξ, ξ', ζ und ζ' zwischen diesen fünf Gleichungen führt wiederum zur Gleichung (3) zurück.

In den nächsten beiden Nummern wollen wir beispielsweise zeigen, wie wir aus diesen Gleichungen, ähnlich, wie es im 8. Paragraphen geschehen ist, geometrische Resultate herleiten können.

365. Wir wollen zu diesem Ende die dritte der letzten fünf Gleichungen betrachten, nemlich folgende:

$$2\frac{\gamma+\mu\gamma'}{1+\mu} = \zeta+\zeta'.$$

Aus dieser Gleichung verschwindet μ, wenn wir $\gamma = \gamma'$ setzen, und wir erhalten alsdann:

$$2\gamma = 2\gamma' = \zeta+\zeta'. \qquad (4)$$

Wir kommen auf dieselbe Weise noch zu einem allgemeinern Resultate, wenn wir für μ irgend einen beliebigen Werth nehmen, so dafs die Gleichung (2) irgend eine derjenigen Curven, welche durch die vier Durchschnitte der beiden gegebenen (1) gehen, darstellt. Indem wir diese Gleichung folgendermafsen schreiben:

$$y^2+2\alpha''xy+\beta''x^2+2\gamma''y+2\delta''x+\varepsilon'' = 0,$$

ergibt sich:

$$\frac{\gamma+\mu\gamma'}{1+\mu} = \gamma'',$$

und mithin, wenn wir, wie vorhin, $\gamma = \gamma'$ setzen:

$$\gamma = \gamma' = \gamma''.$$

Wenn wir bei der Deutung dieses Resultates nur auf denjenigen Fall Rücksicht nehmen, dafs die zweite Axe den Curven wirklich begegne, so erhalten wir folgenden Satz:

Wenn eine gerade Linie zwei gegebene Linien zweiter Ordnung so schneidet, dafs die Mitten der auf ihr interceptirten Chorden beider Curven zusammenfallen, und also zwischen den beiden Curven gleiche Segmente der geraden Linie liegen, so liegen auch gleiche Segmente derselben zwischen je zwei anderen Curven, welche durch die (reellen oder imaginären) Durchschnitte der beiden gegebenen Curven gehen.

Die Construction der 32. Figur bezieht sich auf den besonderen Fall der Gleichung (4), wo die resultirende Curve ein System von zwei geraden Linien ist. NN' nemlich ist eine gerade Linie, die den beiden Curven in M, M' und N, N' so begegnet, dafs MN = M'N'. Diese beiden Curven schneiden einander in den vier Puncten A, B, C und D; verbinden wir diese Puncte, paarweise genommen, (was auf dreifache Weise geschehen kann,) durch zwei gerade Linien, AB und CD, die der geraden Linie NN' in den Puncten S und S' begegnen, so ist MS = M'S'. Fig. 32.

Wir gehen hier in kein ausführliches Detail ein, wie wir es in der 298. Nummer in Beziehung auf denjenigen Fall gethan haben, wo eine der gegebenen Linien zweiter Ordnung ein System zweier geraden Linien ist, und bemerken nur noch, dafs wir auch drei Linien-Systeme zusammenstellen können.

366. Als zweites Beispiel wollen wir die beiden Gleichungen: Fig. 33.

$$2\frac{\gamma+\mu\gamma'}{1+\mu} = \zeta+\zeta',$$

$$\frac{\varepsilon+\mu\varepsilon'}{1+\mu} = \zeta\zeta',$$

Digitized by Google

in Verbindung mit einander, näher betrachten. Wenn wir γ, ε, γ', ε' und ζ als gegeben ansehen, so sind diese beiden Gleichungen zur Bestimmung von μ und ζ' hinreichend. ζ bezeichnet die Ordinate des Durchschnittes S einer Chordalen CF der beiden gegebenen Curven CEK und ABE mit der zweiten Axe; ζ' die Ordinate des Durchschnittes S' der zugehörigen Chordalen DE mit derselben Axe. Wir wollen nun die eine der gegebenen Curven, etwa die erste CEK, als ein für alle Mal gegeben betrachten, neben der zweiten ABE aber irgend eine dritte ABK bestimmen, welche die zweite Axe, über die durchaus keine nähere Bestimmung getroffen ist, in denselben beiden (reellen oder imaginären) Puncten A und B schneidet, als die zweite Curve, und welche überdiefs mit der ersten Curve eine Chordale GH hat, die durch den Punct (ζ, o) oder S geht. Alsdann haben wir dieselben Werthe für γ, ε, γ', ε' und ζ und mithin auch für ζ': gleichviel, ob wir die erste Curve mit der zweiten oder dritten zusammenstellen. Es schneiden sich also auch die mit CF und GH zusammengehörigen Chordalen DE und LK in demselben Puncte S' der zweiten Axe AB, die eine Chordale der zweiten und dritten Curve ist.

Wir können die dritte Curve ABK construiren, indem wir durch irgend einen Punct S, der auf einer Chordalen CF der beiden ersten Curven CEK und ABE liegt, nach beliebiger Richtung zwei gerade Linien SH und SB ziehen, von welchen die eine der ersten Curve in G und H, die andere der zweiten Curve in A und B begegne, und alsdann irgend eine Linie zweiter Ordnung durch die vier Puncte G, H, A und B legen.

Um der Aussage des eben bewiesenen Satzes die bequemste und allgemeinste Form zu geben, wollen wir die drei gegebenen Curven als irgend drei gegebene betrachten, die blofs der Bedingung unterworfen sind, dafs drei Chordalen dreier Chordal-Systeme je zweier derselben, z. B. GH, CF und AB, durch denselben Punct S gehen. Alsdann vereinigen sich in S' ebenfalls drei Chordalen, und da die Beziehung der drei Curven zu einander durchaus dieselbe ist, so schneiden sich auch noch in zweien anderen Puncten S'' und S''' drei Chordalen. Also:

Wenn drei Chordalen je zweier dreier Linien zweiter Ordnung sich in demselben Puncte schneiden, so bilden diese drei Chordalen und die drei zugehörigen ein Viereck mit seinen beiden Diagonalen, so dafs also in jedem Winkel-Puncte dieses Vierecks drei Chordalen sich vereinigen.

Wenn die drei erstgenannten Chordalen unter einander parallel sind, so liegt ein Winkel-Punct des Vierecks unendlich weit. Wenn unter den drei in Rede stehenden Linien zweiter Ordnung sich zwei einander ähnliche befinden, so liegt eine der sechs Chordalen, und also liegen auch zwei Winkel-Puncte des obigen Vierecks, unendlich weit, oder, mit anderen Worten, die beiden Chordal-Systeme der beiden ähnlichen Curven, zusammengestellt mit der beliebigen dritten, bilden ein Parallelogramm, dessen eine Diagonale die Chordale der beiden ähnlichen Curven ist. Wenn durch den Durchschnitt der drei sich in demselben Puncte schneidenden Chordalen noch eine vierte Chordale geht, so fallen die vier Winkel-Puncte des obigen Vierecks in einen einzigen Punct zusammen, so dafs also in diesem Falle alle sechs Chordalen durch denselben Punct gehen.

Wenn man die letzten Bemerkungen berücksichtigt, und überdiefs erwägt, dafs die drei zusammengestellten Linien zweiter Ordnung, paarweise genommen, in mannigfacher Beziehung zu einander stehen, z. B. sich einfach und zwiefach berühren, sich drei- und vierpunctig osculiren können, und dafs man ferner auch zwei Curven mit einem Systeme zweier geraden Linien, eine Curve mit zweien Systemen und endlich drei Systeme zusam-

Digitized by Google

menstellen kann, so ist offenbar, wie eine lange Reihe von einzelnen Sätzen und Constructionen unmittelbar aus dem allgemeinen Satze sich ergibt. In den folgenden Nummern wollen wir beispielsweise bei einem besondern Falle länger verweilen.

367. Wir wollen nemlich zwei Linien zweiter Ordnung betrachten, zwischen denen eine zwiefache Berührung Statt findet. Wenn man aus irgend einem Puncte Q derjenigen geraden Linie, welche durch die beiden Berührungs-Puncte M und M' geht, und in welche zwei Chordalen der beiden Curven zusammenfallen, zwei gerade Linien QH und QF zieht, von welchen die erste der einen Curve in G und H, die zweite der andern Curve in E und F begegnet, so schneidet jede dritte Linie zweiter Ordnung, welche durch die vier Puncte G, H, E und F geht, jede der beiden gegebenen noch in solchen zwei Puncten, die mit dem Puncte Q in gerader Linie liegen. In der bezüglichen Figur, wo für die dritte Linie zweiter Ordnung ein System zweier geraden Linien PA und PB genommen ist, sind A und B, C und D diese mit Q in gerader Linie liegenden Durchschnitts-Puncte. Fig. 34.

Wenn wir ferner die eine Curve, für welche wir die äufsere nehmen wollen, als ursprünglich gegeben und die beiden Puncte E und F als zwei feste und unveränderliche Puncte betrachten, so können wir zwei gerade Linien PA und PB construiren, welche durch E und F gehen und der gegebenen Curve in den vier Puncten A, B, G und H so begegnen, dafs zwei durch diese vier Puncte gezogene gerade Linien sich auf EF schneiden. Wir brauchen zu diesem Ende nur den Pol der durch E und F gelegten geraden Linie in Beziehung auf die gegebene Curve zu construiren, und diesen Pul, den Punct P, mit den beiden Puncten E und F durch zwei gerade Linien zu verbinden; alsdann erhalten wir die vier Durchschnitte A, B, G und H, und sowohl AB und GH, als auch AH und BG schneiden sich auf EF (306), erstere Linien im Puncte Q, letztere in Q'. Da die eben construirte Aufgabe also eine durchaus bestimmte ist, und wir zwei Durchschnitts-Puncte Q und Q' erhalten; von der andern Seite aber durch E und F unendlich viele Curven gehen, welche die gegebene zweimal berühren, so haben wir folgenden Satz bewiesen, auf den wir auch später noch zurückkommen werden:

Wenn irgend eine Linie zweiter Ordnung und zwei Puncte gegeben sind, und beliebig viele andere Linien derselben Ordnung die gegebene zweimal berühren, und überdiefs durch die beiden gegebenen Puncte gehen, so gehen alle Berührungs-Chorden durch einen von zwei festen Puncten derjenigen geraden Linie, welche die beiden gegebenen Puncte verbindet.

368. Wir können, nach der vorigen Nummer, wenn zwei Linien zweiter Ordnung sich zweimal berühren, einen Punct der Berührungs-Chorde finden, in der Voraussetzung, dafs nur eine dieser Curven gegeben ist und von der andern zwei Puncte E und F bekannt sind. Die letztgenannte Curve ist alsdann vollständig bestimmt, wenn wir noch die Bedingung hinzufügen, dafs die beiden Berührungs-Puncte in einen einzigen zusammenfallen, oder, mit anderen Worten, die beiden Curven sich vierpunctig osculiren sollen. Alsdann liegen nemlich die beiden Puncte Q und Q', deren Construction eben angezeigt worden ist, auf der Tangente im Osculations-Puncte. Den Osculations-Punct finden wir also, indem wir von Q oder Q' eine Tangente an die gegebene Curve legen, und mithin (355) können wir folgende Aufgabe construiren:

Eine Linie zweiter Ordnung zu beschreiben, die eine gegebene vierpunctig osculirt, und überdiefs durch zwei gegebene Puncte geht.

Digitized by Google

Wenn einer der beiden gegebenen Puncte E und F innerhalb, der andere aufserhalb der gegebenen Curve liegt, so ist offenbar, dafs eine der beiden geraden Linien, PE und PF, der Curve nicht begegnet, und mithin die Aufgabe unmöglich wird. Wenn in dem Falle, dafs die Puncte E und F beide innerhalb oder beide aufserhalb liegen, die durch diese beiden Puncte gehende gerade Linie EF der Curve begegnet, so liegt der Pol P derselben aufserhalb der Curve, und mithin (P, Q und Q' sind drei zugeordnete Puncte) fällt einer der beiden Constructions-Puncte Q und Q' aufserhalb, der andere innerhalb. Liegen die Puncte E und F beide innerhalb, so erhalten wir unmittelbar die beiden Puncte Q und Q', und von einem derselben können wir zwei Tangenten an die gegebene Curve legen; liegen E und F beide aufserhalb, so begegnet keine der beiden durch P, den Pol von EF, gezogenen geraden Linien der Curve, nichts desto weniger bleiben die beiden Puncte Q und Q' reell (diese Puncte sind diejenigen, zu deren Gleichungen sich die Gleichungen des Systems der beiden geraden Linien PE und PF und der gegebenen Curve verbinden lassen (384)), und von einem derselben lassen sich zwei Tangenten an die gegebene Curve legen; in diesen Fällen gestattet also obige Aufgabe zwei Auflösungen. Wenn endlich die durch E und F gehende gerade Linie der gegebenen Curve nicht begegnet, so liegt der Pol derselben innerhalb, mithin sind die vier Durchschnitts-Puncte A, B, G und H alle vier reell, und die Puncte Q und Q' liegen beide aufserhalb, so dafs wir von jedem derselben zwei Tangenten an die gegebene Curve legen können: es gibt also in diesem Falle vier verschiedene Curven, welche den Forderungen der Aufgabe Genüge leisten.

369. Wir können ferner nach der 367. Nummer auch folgende Aufgabe construiren:

Eine Linie zweiter Ordnung zu beschreiben, welche eine gegebene Linie derselben Ordnung zweimal berührt, und überdiefs durch drei gegebene Puncte geht.

Seyen D, E und F die drei gegebenen Puncte, durch welche eine Linie zweiter Ordnung gelegt werden soll, die die gegebene ABHG zweimal berührt. Wir können, indem wir zwei der drei gegebenen Puncte, E und F, nehmen, wie bisher die beiden Constructions-Puncte Q und Q' finden; eben so können wir für eine andere Zusammenstellung zweier der drei gegebenen Puncte, etwa für D und E, zwei den Puncten Q und Q' entsprechende Puncte, die wir, ohne die Construction auszuführen, hier R und R' nennen wollen, bestimmen. Wenn wir alsdann die beiden Puncte Q und Q' mit den beiden Puncten R und R' durch vier gerade Linien QR, QR', Q'R und Q'R' verbinden, so erhalten wir die Berührungs-Chorden derjenigen vier Curven, welche den Forderungen der Aufgabe Genüge leisten. Wenn die gegebene Curve von einer der letztbezeichneten geraden Linie, etwa von QR, geschnitten wird, so wird dieselbe von der bezüglichen Constructions-Curve wirklich in zwei Puncten berührt; wenn sie von jener geraden Linie QR berührt wird, so findet eine vierpunctige Osculation statt, und endlich, wenn sie von QR gar nicht getroffen wird, wird die doppelte Berührung, während die verlangte Curve selbst reell bleibt, imaginär. Fassen wir diese Fälle alle drei unter dem Namen der doppelten Berührung zusammen, so sind die Auflösungen der Aufgabe immer reell, falls nur die drei gegebenen Puncte alle drei innerhalb oder alle drei aufserhalb liegen. Wenn einer dieser Puncte auf der Curve selbst liegt, gibt es zwei Auflösungen; wenn zwei Puncte auf derselben liegen, nur eine einzige Auflösung. In nähere Determinationen gehen wir hier nicht ein.

Digitized by Google

Da wir auf dreifache Weise die drei gegebenen Puncte D, E und F paarweise zusammenstellen können, so erhalten wir neben Q, Q', R und R' noch zwei entsprechende Puncte. Von diesen sechs Puncten können wir viermal drei nehmen, welche in gerader Linie liegen.

370. Wenn die beiden gegebenen Puncte, die wir E und F genannt haben, aufserhalb der gegebenen Curve liegen, so können wir unmittelbar Linien-Systeme construiren, die in die Reihe derjenigen Linien zweiter Ordnung gehören, welche durch die beiden gegebenen Puncte gehen und die gegebene Curve zweimal berühren; wir brauchen nemlich zu diesem Ende nur irgend zwei Tangenten durch die beiden gegebenen Puncte zu legen. Wir erhalten hiernach vier solcher Linien-Systeme und vier Berührungs-Chorden, die sich, paarweise genommen, in den beiden festen Puncten Q und Q' der durch E und F gehenden geraden Linie schneiden. Hiernach erhalten wir eine neue Construction dieser Puncte.

Die in der 367. Nummer angezeigte Construction der Puncte Q und Q' wird in dem Falle, dafs die gegebene Curve ein System zweier geraden Linien ist, illusorisch. Die eben angezeigte Construction wird es in diesem Falle auch; doch können wir hier durch eine leichte Modification diesem Mangel abhelfen. Zu dieser Modification führt uns die Bemerkung, dafs die Constructions-Puncte Q und Q' dieselben bleiben, wenn wir statt der gegebenen Curve irgend eine andere nehmen, welche durch diejenigen beiden Puncte e und f geht, in welchen die gegebene Curve von der durch E und F gehenden geraden Linie geschnitten wird. Diefs ist eine Folge davon, dafs die Lage von Q und Q' einzig von der Lage der vier Puncte E, F, e und f und nicht von der Natur der gegebenen Curve abhängt. Da nemlich PQ' die Polare von Q sowohl in Beziehung auf die gegebene Curve ABHG ist, als auch in Beziehung auf CDFE, und jede andere, welche durch E und F geht, und die gegebene Curve zweimal berührt, so sind (309) die Puncte Q und Q' dadurch vollkommen bestimmt, dafs die durch die gegebenen Puncte gehende gerade Linie sowohl in Q, Q', E und F, als auch in Q, Q', e und f harmonisch geschnitten wird, wonach die directe Bestimmung derselben in der Construction einer quadratischen Gleichung besteht. Dafs aber PQ' die Polare von Q in Beziehung auf beide Curven ABHG und CDFE ist, ergibt sich daraus, dafs AH und BG, CF und ED sich in zwei Puncten Q' und q schneiden, die mit P, dem Durchschnitte von AG und BH, in gerader Linie liegen (64).

371. *Eine Linie zweiter Ordnung zu beschreiben, die zwei gegebene gerade Linien berührt und überdiefs durch drei gegebene Puncte geht.* Fig. 35, 36.

Die beiden geraden Linien, die wir als eine Linie zweiter Ordnung, die zweimal berührt werden soll, betrachten, seyen AB und AC, zwei der drei gegebenen Puncte E und F, und wir wollen erstens annehmen, dafs diese Puncte wie in der 35. Figur aufserhalb des von AB und AC gebildeten Winkels liegen. Diefs vorausgesetzt, ziehe man EF, wovon die beiden gegebenen geraden Linien in e und f geschnitten werden, und lege durch e und f irgend einen Kreis. An diesen Kreis construire man zwei Tangenten von jedem der beiden gegebenen Puncte aus, welche denselben in U und V, W und T berühren. Verbindet man diese vier Berührungs-Puncte durch die vier geraden Linien TU, WV, UW und VT, so schneiden sich die beiden ersten dieser geraden Linien in Q, die beiden letzten in Q'.

Digitized by Google

Wenn wir statt der beiden Puncte E und F einen derselben und den dritten gegebenen Punct nehmen und für diese Puncte die eben angezeigte Construction wiederholen, so erhalten wir zwei neue den Puncten Q und Q' entsprechende Puncte, die wir R und R' nennen wollen. Jede der vier durch Q und R, Q und R', Q' und R und durch Q' und R' gezogenen geraden Linien bestimmt auf den beiden gegebenen zwei solche Puncte, in welchen eine der vier, den Forderungen der Aufgabe genügenden, Curven diese Linien berührt.

Wenn zweitens die beiden Puncte E und F, wie in der 36. Figur, innerhalb des Winkels BAC liegen, so brauchen wir nur in der Construction des eben behandelten Falles die Puncte E und F mit den Puncten e und f zu vertauschen; d. h. einen Kreis durch E und F zu legen, und an denselben durch e und f Tangenten zu ziehen. Das Uebrige der Construction bleibt gerade wie vorhin. Wir können zur Erleichterung derselben den durch E und F gelegten Kreis so bestimmen, dafs er zugleich durch den dritten gegebenen Punct geht.

In den beiden Constructionen der 35. und 36. Figur ergibt sich unmittelbar nach bekannten Sätzen (310), dafs Q, Q', E und F sowohl als Q, Q', e und f harmonische Theilungs-Puncte sind.

Fig. 35, 36. 372. *Eine Linie zweiter Ordnung zu beschreiben, die drei gegebene gerade Linien berührt, und überdiefs durch zwei gegebene Puncte geht.*

Seyen E und F wiederum die beiden gegebenen Puncte und AB und AC zwei der drei gegebenen geraden Linien, die wir, mit einander verbunden, als eine Linie zweiter Ordnung betrachten. Alsdann bestimmen sich, wie in der vorigen Nummer, die beiden Constructions-Puncte Q und Q'. Indem wir nach einander die dritte gegebene gerade Linie mit AB und AC zusammenstellen, erhalten wir auf der, durch die beiden gegebenen Puncte E und F gehenden, geraden Linien gerade auf dieselbe Weise noch zwei Paar anderer Puncte, die den Puncten Q und Q' entsprechen, und die wir R und R', S und S' nennen wollen. Drei der so bestimmten sechs Puncte liegen zwischen E und F, so wie zwischen e und f, und für diese drei Puncte wollen wir Q', R' und S' nehmen. Es sind im Allgemeinen vier Curven möglich, die den Forderungen der Aufgabe Genüge leisten; die drei Berührungs-Chorden jeder derselben geben durch drei jener sechs in gerader Linie liegenden Puncte. Wenn die gegebenen Puncte beide innerhalb des von den drei gegebenen geraden Linien gebildeten Dreiecks oder innerhalb ein und desselben der drei von diesen Linien nach drei Seiten hin begränzten unendlichen Flächen-Räumen sich befinden, und mithin auf einer Ellipse, Parabel oder demselben Hyperbel-Zweige liegen, so erhalten wir folgende Zusammenstellung für jene viermal drei Puncte:

Q, R, S; Q, R', S'; Q', R, S'; Q', R', S.

Wenn aber die beiden gegebenen Puncte in zweien von zwei der drei geraden Linien gebildeten Scheitel-Winkeln liegen, und überdiefs zu beiden Seiten der dritten dieser Linien, in welchem Falle die zu construirenden Curven Hyperbeln sind und die beiden gegebenen Puncte auf beiden Zweigen derselben liegen: so haben wir statt des letztern Schema folgendes:

Q', R', S'; Q', R, S; Q, R', S; Q, R, S'.

Die Construction unserer Aufgabe ist also darauf zurückgeführt, in ein gegebenes Dreieck eine Linie zweiter Ordnung so zu beschreiben, dafs die drei Berührungs Chorden durch drei bekannte, in gerader Linie liegende, Puncte gehen. Durch zwei dieser drei

Puncte ist die Aufgabe bestimmt. Folgende Bemerkung führt zur Construction derselben. In der 35. Figur wird FQ in F, Q', E und Q harmonisch geschnitten; eben so wird also jede andere durch F, den Durchschnitt der Tangenten in T und W, gehende gerade Linie von den beiden Berührungs-Chorden TV und WV und von der Tangente in V harmonisch geschnitten. Ist daher der Punct F, irgend ein Punct Q der Berührungs-Chorde WV und die Tangente in V bekannt, so können wir auf FQ denjenigen Punct Q' leicht construiren, der zugleich auf der Berührungs-Chorde TV liegt. Die letztgenannte Berührungs-Chorde ist also vollkommen bestimmt, wenn wir schon einen Punct derselben kennen. Hiernach ergibt sich folgende Construction der an die Spitze dieser Nummer gestellten Aufgabe.

Seyen (Fig. 37) AB, AC und BC die drei gegebenen geraden Linien, E und F die beiden gegebenen Puncte und Q, Q', R, R', S und S' die sechs auf EF liegenden Constructions-Puncte. Man ziehe QB, von der AC in D geschnitten werde, suche (nach 61) zu B, D und Q den vierten harmonischen Theilungs-Punct O, und verbinde diesen Punct durch zwei gerade Linien mit S und S'. Alsdann bestimmen diese beiden Linien auf AC und BC diejenigen Puncte N' und N'', M' und M'', in welchen zwei der vier gesuchten Curven diese Linien berühren, und zwar diejenigen beiden Curven, deren drei Berührungs-Chorden durch Q, R, S und durch Q, R', S' gehen. Fig. 37.

373. In je zweien der vier Combinationen dreier Puncte in jedem beliebigen der beiden Schemata der vorigen Nummer kommt ein Punct zweimal vor, so z. B. in den beiden Combinationen Q, R, S und Q, R', S' der Punct Q. Hieraus folgt, dafs zwei sich entsprechende Berührungs-Chorden, MM' und NN', zweier der durch E und F gehenden und in das Dreieck ABC beschriebenen Curven die durch E und F gehende gerade Linie in demselben Puncte Q schneiden. Die beiden in der 37. Figur construirten Curven MM'M'' und NN'N'' schneiden sich aber (was jedesmal geschieht) noch in zweien anderen Puncten G und H, die wir auch, ohne dafs irgend etwas in der Construction sich ändert, statt E und F als ursprünglich gegeben betrachten können. Es schneiden sich also wiederum zwei Berührungs-Chorden in demselben Puncte der durch G und H gehenden geraden Linie. Es ist leicht einzusehen, dafs diese beiden Berührungs-Chorden keine anderen sind, als MM' und NN', und dafs mithin diese beiden Linien, so wie EF und GH, alle vier, durch denselben Punct, durch Q, den Mittelpunct eines Chordal-Systems der beiden eingeschriebenen Curven, gehen. Eben so schneiden sich FG, EH, MM'' und NN'' in P, und EG, FH, M'M'' und N'N'' in O. Also: Fig. 37

Wenn zwei Linien zweiter Ordnung in ein gegebenes Dreieck beschrieben sind, so schneiden sich die entsprechenden Berührungs-Chorden der beiden Curven in denjenigen drei Puncten, welche die Mittelpuncte der drei Chordal-Systeme dieser Curven, und mithin zugeordnete Pole in Beziehung auf jede derselben sind.

374. Wir wollen der in der 366. Nummer angewandten Art der Beweisführung eine noch etwas gröfsere Ausdehnung geben. Wenn wiederum die drei Gleichungen:

$$\begin{aligned} y^2+2\alpha xy+\beta x^2+2\gamma y+2\delta x+\epsilon &= 0,\\ y^2+2\alpha' xy+\beta' x^2+2\gamma' y+2\delta' x+\epsilon' &= 0,\\ y^2+2\alpha'' xy+\beta'' x^2+2\gamma'' y+2\delta'' x+\epsilon'' &= 0, \end{aligned} \qquad (1)$$

drei durch dieselben vier Puncte gehende Linien zweiter Ordnung darstellen, so haben wir folgende beiden Gleichungen:

$$\frac{\gamma+\mu\gamma'}{1+\mu} = \gamma'', \qquad \frac{\epsilon+\mu\epsilon'}{1+\mu} = \epsilon'',$$

wo μ, wie früher, einen unbestimmten Coefficienten bezeichnet. Wenn wir zu diesen beiden Gleichungen noch eine Bedingungs-Gleichung, für welche wir nachstehende nehmen wollen:

$$\gamma''^2 - \epsilon'' = 0, \tag{2}$$

hinzufügen, so sind μ, ϵ'' und γ'' durchaus bestimmt, wenn wir γ, ϵ, γ' und ϵ' als gegeben betrachten. γ und ϵ behalten dieselben Werthe, so lange die erste Curve durch zwei feste Puncte geht, und wir durch diese beiden Puncte die zweite Axe legen. Die Bedingungs-Gleichung (2) findet Statt, wenn die dritte Curve diese Axe berührt. Die zweite Curve, und mithin γ' und ϵ', wollen wir als gegeben betrachten. Hierin liegt folgender Satz:

Wenn zwei Linien zweiter Ordnung von einer dritten geschnitten werden, so lassen sich durch die beidesmaligen vier Durchschnitte zwei Paar Linien derselben Ordnung legen, welche eine Chordale der beiden erstgenannten berühren: die beiden Berührungs-Puncte sind für beide Paare dieselben.

Wir gehen hier in kein Detail ein.

375. Wir wollen in dieser Nummer die beiden Gleichungen:

$$\frac{\alpha+\mu\alpha'}{1+\mu} = \alpha'', \qquad \frac{\beta+\mu\beta'}{1+\mu} = \beta', \tag{3}$$

welche zwischen den beiden ersten Constanten der Gleichungen (1) und dem unbestimmten Coefficienten μ Statt finden müssen, mit einer Bedingungs-Gleichung zwischen α'' und β'' zusammenstellen, und für diese Bedingungs-Gleichung folgende nehmen:

$$\alpha''^2 - \beta'' = 0, \tag{4}$$

d. h. voraussetzen, dafs die dritte Curve eine Parabel sey. Sobald wir α, β, α' und β' als gegeben betrachten, sind die vorstehenden drei Gleichungen zur Bestimmung von μ, α'' und β'' hinreichend. α und β oder α' und β' behalten aber dieselben Werthe, wenn wir die erste oder zweite Curve mit irgend einer andern, ihr ähnlichen und ähnlich liegenden, vertauschen. Hiernach ergibt sich folgender Satz:

Die Durchmesser aller Parabeln, welche sich durch die jedesmaligen vier Durchschnitte irgend einer von mehreren unter einander ähnlichen Linien zweiter Ordnung mit anderen, ebenfalls unter einander ähnlichen, Linien derselben Ordnung legen lassen, haben eine bestimmte Richtung.

Da durch vier Puncte sich zwei Parabeln legen lassen, ist diese Richtung eine zwiefache.

Wenn die eine Curve von der andern zweimal berührt wird, so berührt die entsprechende Parabel beide in denselben beiden Puncten, und die Richtung ihrer Durchmesser ist durch diejenige gerade Linie, welche durch die Mittelpuncte der beiden Curven und die Mitte der Berührungs-Chorde geht, bestimmt.

Als unter einander ähnliche Linien zweiter Ordnung können wir verschiedene Systeme von zwei geraden Linien nehmen, die eine bestimmte Richtung haben. Wenn nur eine Curve zweiter Ordnung gegeben ist, und wir auf derselben vier Puncte beliebig annehmen, so können wir diese Puncte durch zwei gerade Linien, die wir als eine Linie zweiter Ordnung betrachten, verbinden. Alsdann ist offenbar, dafs wir vier diesem Linien-Systeme ähnliche Linien zweiter Ordnung erhalten, wenn wir um die gegebene Curve ein Parallelogramm beschreiben, dessen Seiten jenen beiden geraden Linien des

Digitized by Google

Systems parallel sind, und von den vier Seiten desselben je zwei, an einander anstofsende, zusammenstellen. Die Richtung der Durchmesser der beiden, durch die vier angenommenen Puncte gehenden, Parabeln ist durch die beiden Diagonalen dieses Parallelogrammes bestimmt. Da diese beiden Diagonalen in dem Mittelpuncte der gegebenen Curve sich schneiden, und wir die vier gegebenen Puncte auf dreifache Weise durch zwei gerade Linien verbinden können, so haben wir indirect folgenden Satz bewiesen:

Wenn in eine gegebene Linie zweiter Ordnung irgend ein Viereck beschrieben ist, und wir beschreiben um dieselbe drei Parallelogramme, deren Seiten den beiden Paaren gegenüberliegender Seiten und den beiden Diagonalen des eingeschriebenen Vierecks parallel sind, so liegen die Winkel-Puncte derselben auf denselben beiden Durchmessern der gegebenen Curve, und mithin sind die Seiten der drei eingeschriebenen Parallelogramme, die diesen umgeschriebenen entsprechen, parallel.

376. Statt der Gleichung (4) können wir jede andere Bedingungs-Gleichung zwischen α'' und β'' mit den beiden Gleichungen (3) zusammenstellen, und finden alsdann, übrigens ganz bei denselben Voraussetzungen als bisher, dafs α'' und β'' constant sind, d. h. die resultirenden Curven alle dasselbe Axen-Verhältnifs und eine ähnliche Lage haben. Wir wollen denjenigen Fall noch hervorheben, wo folgender Ausdruck:

$$\frac{(1+\beta'')-(4\alpha''^2+(1-\beta'')^2)^{1/2}}{(1+\beta'')+(4\alpha''^2+(1-\beta'')^2)^{1/2}},$$

einer gegebenen Gröfse gleich gesetzt wird, d. h. wo, bei der Annahme rechtwinkliger Coordinaten, das Axen-Verhältnifs der resultirenden Curven ein gegebenes ist (251). Diesem Falle entspricht folgender Satz:

Wenn zwei Reihen unter einander ähnlicher und ähnlich liegender Curven zweiter Ordnung gegeben sind, so haben diejenigen Curven von gegebenem Axen-Verhältnifs, welche sich durch die Durchschnitte je zweier, aus beiden Reihen genommenen, Curven legen lassen, ebenfalls eine ähnliche Lage.

Nach diesem Satze können wir folgende Aufgabe construiren:

Durch vier gegebene Puncte eine Linie zweiter Ordnung von gegebenem Axen-Verhältnifs zu legen.

Wenn wir nemlich voraussetzen, dafs durch die vier gegebenen Puncte irgend eine Linie zweiter Ordnung gehe, so können wir um diese Curve ein Parallelogramm beschreiben, dessen Seiten zweien geraden Linien parallel sind, die die gegebenen Puncte, paarweise genommen, mit einander verbinden. Alsdann bezeichnen die beiden Diagonalen dieses Parallelogrammes die Richtungen zweier zugeordneten Durchmesser der in Rede stehenden Curve so wie jeder andern, welche dieselbe in den beiden auf jener Berührungs-Chorde liegenden Puncten, berührt. Hiernach folgt aus dem letzten Satze, dafs jene Richtungen auch die Richtungen zweier zugeordneten Durchmesser jeder durch die vier gegebenen Puncte gehenden Linie zweiter Ordnung sind.

Diese beiden zugeordneten Durchmesser sind den Durchmessern der beiden, durch die vier gegebenen Puncte gehenden, Parabeln parallel.

Wenn wir statt der, durch die vier gegebenen Puncte gehenden, Curve durch diese Puncte ein Linien-System legen, so erhalten wir die Richtungen jener beiden zugeordneten Durchmesser, indem wir die Gleichungen des eben bezeichneten Linien-Systems und eines zweiten, dessen beide gerade Linien denen eines der beiden übrigen, durch die vier

gegebenen Puncte gehenden, Systeme parallel sind, zu den Gleichungen zweier zusammenfallenden geraden Linien verbinden. Nehmen wir zu diesem Ende für die Gleichungen der beiden Linien-Systeme, die denselben Mittelpunct haben müssen:

$$xy = 0, \quad y^2+(x+x')xy+xx'x^2 = 0,$$

so ergeben sich aus der Verbindung derselben, folgende beiden, in eine einzige zusammengezogenen, Gleichungen:

$$(y\pm\sqrt{xx'}.x)^2 = 0.$$

Hiernach sind die beiden in Rede stehenden Durchmesser den, durch die beiden Gleichungen:

$$y = \sqrt{xx'}.x, \quad y = -\sqrt{xx'}.x,$$

gegebenen, und sehr leicht zu construirenden, geraden Linien parallel.

Es ist zugleich aus der Form der letzten beiden Gleichungen ersichtlich, dafs, wenn wir (was auf dreifache Art geschehen kann) durch die vier gegebenen Puncte zwei gerade Linien und durch den Durchschnitt derselben noch zwei andere parallel mit jenen beiden zugeordneten Durchmessern ziehen: von diesen vier geraden Linien jede beliebige gerade Linie harmonisch geschnitten wird. Wir hätten hiernach auch in der 370. Nummer die beiden Puncte Q und Q' construiren können.

Wenn das Verhältnifs der beiden Axen ein gegebenes ist, so ergibt sich, nach den Entwicklungen des 2. Paragraphen dieses Abschnittes, das Verhältnifs derjenigen zugeordneten Durchmesser, die irgend einen gegebenen Winkel mit einander bilden. Hiernach ist also die vorstehende Aufgabe auf die Aufgabe der 284. Nummer zurückgeführt. Sie gestattet, da die Richtung der gröfsern und kleinern Axe insbesondere nicht näher bestimmt ist, eine doppelte Auflösung.

Wenn die vier gegebenen Puncte auf dem Umfange eines Kreises liegen, so müssen die beiden Durchmesser, deren Richtung wir oben bestimmt haben, nothwendig auf einander senkrecht stehen. Im Allgemeinen müssen die von jenen Durchmessern gebildeten Winkel denjenigen Winkeln gleich seyn, welche von den gleichen Durchmessern derjenigen durch die vier gegebenen Puncte gehenden Ellipse, deren Axen-Verhältnifs der Einheit am nächsten kommt, gebildet werden. Von der andern Seite läfst sich durch vier gegebene Puncte keine Hyperbel legen, deren Asymptoten-Winkel mehr von einem rechten Winkel abweicht, als diejenigen Winkel, welche die beiden zugeordneten Durchmesser, deren Richtung dieselbe für alle durch jene vier Puncte gehende Linien zweiter Ordnung ist, einschliefsen. Hiernach erhalten wir als besondere Fälle die Constructionen folgender beiden Aufgaben:

„Durch vier gegebene Puncte diejenige Ellipse zu legen, welche dem Kreise am nächsten kommt, und diejenige Hyperbel, deren Asymptoten-Winkel ein *maximum* oder „*minimum* ist."

Der Nerv der letzten Beweisführungen liegt in vorstehenden Beispielen so offen am Tage, dafs es überflüfsig wäre, bei diesem Gegenstande noch länger zu verweilen.

377. Seyen (264):

$$\begin{aligned} y^2+2\alpha xy+\beta x^2+2\gamma y+2\delta x+\varepsilon &= 0, \\ y^2+2\alpha' xy+\beta x^2+2\gamma y+2\delta x+\varepsilon &= 0, \end{aligned} \qquad (1)$$

die Gleichungen irgend zweier Linien zweiter Ordnung, bezogen auf zwei gerade Linien, die durch die vier Durchschnitte derselben gehen, und sey:

$$y = ax+b, \qquad (2)$$

die Gleichung irgend einer geraden Linie. Alsdann sind (244):

$$\begin{aligned}(\alpha+a)y+(\beta+\alpha a)x+(\delta+\gamma a) &= 0,\\ (\alpha'+a)y+(\beta+\alpha' a)x+(\delta+\gamma a) &= 0,\end{aligned} \qquad (3)$$

die Gleichungen derjenigen Durchmesser beider Curven, welche die der gegebenen geraden Linie parallelen Chorden halbiren. Ziehen wir diese beiden Gleichungen von einander ab, so wird $(\alpha-\alpha')$ gemeinschaftlicher Factor, nach dessen Hinweglassung wir folgende Gleichung erhalten:

$$y+ax = 0. \qquad (4)$$

Diese Gleichung ist von α und α' unabhängig, und bleibt also dieselbe für je zwei beliebige Curven, welche durch die (reellen oder imaginären) Durchschnitte der beiden gegebenen gehen.

Wir wollen ferner zwischen der ersten Gleichung bei (3) und der Gleichung (4) a eliminiren. Zu diesem Ende multipliciren wir zuvörderst die letztgenannte Gleichung mit α, und ziehen alsdann dieselbe von der ersten ab; hiernach bleibt:

$$ay+\beta x+\delta+\gamma a = 0,$$

und wenn wir für a seinen Werth $\left(-\frac{y}{x}\right)$ substituiren, kommt:

$$y^2-\beta x^2+\gamma y-\delta x = 0.$$

In dieser Gleichung erkennen wir sogleich die Gleichung des geometrischen Ortes für die Mittelpuncte aller derjenigen Linien zweiter Ordnung, die durch die (reellen oder imaginären) Durchschnitte der beiden gegebenen Curven gehen, wieder (326). Also:

Wenn irgend zwei Linien zweiter Ordnung oder mehrere derselben, welche ein gemeinschaftliches Chordal-System haben, gegeben sind, und man zieht nach beliebiger Richtung eine gerade Linie, so laufen diejenigen Durchmesser der verschiedenen Curven, deren zugeordnete dieser geraden Linie parallel sind, in demselben Puncte zusammen. Der geometrische Ort dieser Puncte, für alle verschiedenen Richtungen der beliebig gezogenen geraden Linie, ist diejenige Linie zweiter Ordnung, welche die Mittelpuncte aller derjenigen enthält, welche dasselbe Chordal-System haben.

Der erste Theil dieses Satzes ist bekannt*). In der nächsten Nummer wollen wir dem Beweis desselben, der ebenfalls schon in der 365. Nummer enthalten ist, noch eine andere Form geben.

378. Sey:

$$\mu y^2+2\alpha xy+\beta x^2+2\gamma y+2\delta x+\varepsilon = 0, \qquad (1)$$

die Gleichung irgend einer Linie zweiter Ordnung. Wir können diese Gleichung, indem wir jeden Coefficienten beliebig in zwei Theile zerlegen, folgendermaafsen schreiben:

$$(\mu' y^2+2\alpha' xy+\beta' x^2+2\gamma' y+2\delta' x+\varepsilon')+(\mu'' y^2+2\alpha'' xy+\beta'' x^2+2\gamma'' y+2\delta'' x+\varepsilon'') = 0;$$

wonach wir also folgende Gleichungen haben:

$$\mu'+\mu'' = \mu,\quad \alpha'+\alpha'' = \alpha,\quad \beta'+\beta'' = \beta,\quad \gamma'+\gamma'' = \gamma,\quad \delta'+\delta'' = \delta,\quad \varepsilon'+\varepsilon'' = \varepsilon.$$

Bei dieser Voraussetzung drücken:

$$\begin{aligned}\mu' y^2+2\alpha' xy+\beta' x^2+2\gamma' y+2\delta' x+\varepsilon' &= 0,\\ \mu'' y^2+2\alpha'' xy+\beta'' x^2+2\gamma'' y+2\delta'' x+\varepsilon'' &= 0,\end{aligned} \qquad (2)$$

je zwei mögliche Linien zweiter Ordnung aus, welche sich auf der gegebenen schneiden.

Diejenigen Durchmesser der drei Curven (1) und (2), deren Ordinaten der zweiten Axe parallel sind, werden durch folgende Gleichungen:

---

*) Gerg. Ann. VII, p. 229.

Digitized by Google

$$\mu y+\alpha x+\gamma = 0,$$
$$\mu' y+\alpha' x+\gamma' = 0,$$
$$\mu'' y+\alpha'' x+\gamma'' = 0,$$

dargestellt. Addiren wir die beiden letzten dieser Gleichungen, so erhalten wir die erste. Da über die zweite Axe durchaus keine nähere Bestimmung gemacht worden ist, so ist obiger Satz bewiesen.

Fig. 38. 379. Da zu den durch vier gegebene Puncte M, M', M'' und M''' gehenden Linien zweiter Ordnung drei Systeme von zwei geraden Linien gehören, so ist in dem Vorstehenden beiläufig ein Satz vom Viereck enthalten. Wenn nemlich AB' irgend eine gerade Linie ist, die den beiden Paaren gegenüberstehender Seiten und den beiden Diagonalen eines gegebenen Vierecks in A und B, A' und B', A'' und B'' begegnet, so laufen diejenigen drei geraden Linien, welche einerseits durch die drei Durchschnitte der beiden Paare gegenüberstehender Seiten und der beiden Diagonalen, durch P, Q und O, und andrerseits durch die Mitten von AB, A'B' und A''B'', durch C, C' und C'', gehen, in ein und demselben Puncte S zusammen. Der Punct S ist also leicht durch den Durchschnitt zweier von diesen drei geraden Linien zu construiren.

Wenn fünf Puncte gegeben sind, so können wir dieselbe auf fünf verschiedene Arten zu vier combiniren, und erhalten also, wenn wir wie eben construiren, in Beziehung auf jede gegebene gerade Linie, fünf in gerader Linie liegende Puncte. Die so bestimmte neue gerade Linie ist derjenige Durchmesser der durch die fünf gegebenen Puncte gehenden Linie zweiter Ordnung, dessen zugeordneter Durchmesser der gegebenen geraden Linie parallel ist. Durch die Construction von zwei jener fünf in gerader Linie liegenden Puncte ist also die Aufgabe direct gelöset: wenn eine Linie zweiter Ordnung durch fünf Puncte gegeben ist, denjenigen Durchmesser derselben zu bestimmen, dessen zugeordneter einer gegebenen geraden Linie parallel ist.

Wenn wir der gegebenen geraden Linie irgend eine andere Richtung geben, so erhalten wir fünf auf einer neuen geraden Linie liegende Puncte. Alle solche gerade Linien schneiden sich in einem constanten Puncte, dem Mittelpuncte der durch die fünf gegebenen Puncte bestimmten Linie zweiter Ordnung.

Wir können nach dem Vorstehenden auch eine Linie zweiter Ordnung construiren, wenn vier Puncte derselben und die Richtung zweier zugeordneten Durchmesser gegeben sind. Wenn nemlich M, M', M'' und M''' die vier gegebenen Puncte sind, und AB' die Richtung des einen zugeordneten Durchmessers anzeigt, so geht der zugeordnete durch den Constructions-Punct S, und ist mithin vollkommen bestimmt. Die Aufgabe gestattet nur eine einzige Auflösung, kann aber nach der 376. Nummer unbestimmt seyn.

380. Bei denselben Bestimmungen als in der 378. Nummer erhalten wir:

$$2\gamma y+2\delta x+\varepsilon = 0, \qquad y y+\delta x+\varepsilon = 0,$$
$$2\gamma' y+2\delta' x+\varepsilon' = 0, \quad (3) \qquad \gamma' y+\delta' x+\varepsilon' = 0, \quad (4)$$
$$2\gamma'' y+2\delta'' x+\varepsilon'' = 0; \qquad \gamma'' y+\delta'' x+\varepsilon'' = 0;$$

für die Gleichungen der drei Asymptoten-Chorden des Anfangs-Punctes (d. h. derjenigen geraden Linien, die durch die beiden Durchschnitte jeder der drei Curven (1) und (2) mit zweien, den Asymptoten derselben parallelen, und durch den Anfangs-Punct gehenden geraden Linien bestimmt werden), und der drei Polaren desselben. Jede der Gleichungen (3) und (4) ist eine Folge der beiden andern. Wir haben also, da der Anfangs-Punct der Coordinaten jeder beliebige seyn kann, folgende beiden Sätze bewiesen:

Digitized by Google

Wenn mehrere Linien zweiter Ordnung sich in denselben vier Puncten schneiden, und man durch irgend einen beliebigen Punct den Asymptoten jeder derselben zwei gerade Linien parallel zieht, so vereinigen sich diejenigen Chorden, welche durch die beiden auf jeder Linie zweiter Ordnung auf diese Weise bestimmten Durchschnitte gehen, in ein und demselben Puncte.

Wenn mehrere Linien zweiter Ordnung sich in denselben vier Puncten schneiden, so gehen die Polaren jedes beliebig angenommenen Punctes auf allen diesen Linien zweiter Ordnung durch ein und denselben Punct.

381. In Beziehung auf den letztern Satz wollen wir in ein ausführlicheres Detail eingehen, und zu diesem Ende, wie in der 377. Nummer, zwei jener Curven betrachten und ihre Gleichungen auf ein gemeinschaftliches Chordal-System beziehen. Diese Gleichungen seyen:

$$y^2+2\alpha xy+\beta x^2+2\gamma y+2\delta x+\epsilon = 0,$$
$$y^2+2\alpha' xy+\beta x^2+2\gamma y+2\delta x+\epsilon = 0,$$

wonach wir für die Polaren irgend eines Punctes (y', x') folgende Gleichungen erhalten:

$$\begin{aligned}(y'+\alpha x'+\gamma)y+(\alpha y'+\beta x'+\delta)x+\gamma y'+\delta x'+\epsilon &= 0,\\ (y'+\alpha' x'+\gamma')y+(\alpha' y'+\beta x'+\delta)x+\gamma y'+\delta x'+\epsilon &= 0.\end{aligned} \qquad (1)$$

Ziehen wir diese letzten beiden Gleichungen von einander ab, so kommt, wenn wir zugleich durch $(\alpha-\alpha')$ dividiren:

$$x'y+y'x = 0. \qquad (2)$$

Hieraus folgt (was auch, indem wenigstens ein Linien-System in die Reihe der in Rede stehenden Linien zweiter Ordnung gehört, *a priori* ersichtlich ist (268)), dafs diejenige gerade Linie, welche durch den Punct (y', x') und denjenigen Punct geht, in welchem sich die Polaren von $(y' x')$ schneiden, von den beiden Coordinaten-Axen, d. h. von zwei zusammengehörigen Chordalen, harmonisch geschnitten wird.

Hiernach kann man, wenn eine Chordale irgend zweier Linien zweiter Ordnung gegeben ist, die zugehörige Chordale finden. Man lege nemlich zu diesem Ende von irgend einem beliebigen Puncte an die beiden Curven Tangenten, und ziehe die beiden Berührungs-Chorden. Den Durchschnitt dieser beiden Chorden und den beliebig angenommenen Punct verbinde man durch eine gerade Linie, und suche zu diesen beiden Puncten und demjenigen, in welcher die letztgezogene gerade Linie der gegebenen Chordalen begegnet, den vierten harmonischen Theilungs-Punct. Der so bestimmte Punct gehört der gesuchten Chordalen an, zu deren vollständigen Bestimmung man die eben angezeigte Construction nur noch einmal zu wiederholen braucht.

Diese Construction können wir noch verschiedenfach modificiren und vereinfachen. Wenn wir z. B. annehmen, der beliebige Punct liege auf einer gegebenen geraden Linie in unendlicher Entfernung, so sind die beiden Polaren dieses Punctes diejenigen Durchmesser der beiden Curven, deren zugeordnete der gegebenen geraden Linie parallel sind. (Hiernach erscheint der erste Theil des Satzes der 377. Nummer als ein besonderer Fall des letztern Satzes der vorigen Nummer.) Ziehen wir also durch den Durchschnitt der beiden Durchmesser der gegebenen geraden Linie eine andere parallel, so ist, da ein harmonischer Theilungs-Punct unendlich weit liegt, dieser Durchschnitt die Mitte des auf der letztgezogenen geraden Linie von den beiden Chordalen interceptirten Stückes.

Wir können für den beliebigen Punct auch den Mittelpunct einer der beiden Curven nehmen. Alsdann ergibt sich, ähnlich wie eben, dafs die durch jenen Mittelpunct mit

Digitized by Google

der Polaren desselben auf der andern Curve parallel gezogene, und von zweien zusammengehörigen Chordalen begränzte, gerade Linie in jenem Puncte halbirt wird.

Wenn wir endlich den beliebigen Punct auf einer der Curven selbst annehmen, so wird die Tangente in diesem Puncte von der Polaren desselben auf der zweiten Curve und von je zwei zusammengehörigen Chordalen harmonisch geschnitten.

Nach dem Vorstehenden sind die Chordal-Systeme zweier Linien zweiter Ordnung dadurch bestimmt, dafs sie drei gerade Linien, auf deren jeder zwei Puncte gegeben sind, harmonisch schneiden (die drei geraden Linien können parallel genommen werden); oder auch dadurch, dafs sie drei gerade Linien (die aber alsdann nicht mehr parallel genommen werden können) so schneiden, dafs die von ihnen auf denselben interceptirten Stücke in drei gegebenen Puncten halbirt werden.

382. Da sowol jede der Gleichungen (1), als auch die Gleichung (2) der vorigen Nummer, in Beziehung auch y', x' und y, x symmetrisch sind, so folgt, dafs die Beziehung des beliebig angenommenen Punctes (y', x') und des Constructions-Punctes (y, x) zu einander eine durchaus gegenseitige ist.

Wenn der angenommene Punct in eine der Coordinaten-Axen fällt, und also y' oder x' verschwindet, so geht die Gleichung (2) über in $y = 0$ oder $x = 0$, d. h. in die Gleichung derselben Axe, auf welcher der angenommene Punct liegt. Also:

Wenn man von irgend einem Puncte einer gemeinschaftlichen (reellen oder idealen) Chorde zweier oder mehrerer Curven zweiter Ordnung Tangenten an dieselben legt, so schneiden sich die Berührungs-Chorden in einem zweiten Puncte derselben gemeinschaftlichen Chorde.

Die Chorde wird in diesen beiden Puncten und ihren Durchschnitten mit der Curve harmonisch getheilt.

Wenn wir in dem letzten Satze mehrere Linien zweiter Ordnung zusammenstellen, so brauchen dieselben nur eine gemeinschaftliche Chorde zu haben. Dieſs ist sogleich aus den Gleichungen (1) der vorigen Nummer ersichtlich, in denen β und δ ausfällt, indem wir zugleich $x' = 0$ und $x = 0$ setzen.

Wenn wir zugleich $y' = 0$ und $x' = 0$ setzen, so werden die beiden Gleichungen (1) identisch: die beiden Polaren des Mittelpunctes eines Chordal-Systems fallen in eine einzige gerade Linie zusammen.

§. 10.

Allgemeine Schemata.

383. Wir wollen, der Kürze halber, die Gleichungen dreier Linien zweiter Ordnung durch folgende Symbole bezeichnen:

$$A = 0, \quad A' = 0, \quad A'' = 0;$$

wir wollen ferner voraussetzen, dafs diese drei Linien zweiter Ordnung eine gemeinschaftliche (reelle oder ideale) Chorde haben, deren Gleichung wir durch

$$c = 0$$

darstellen, so wie die Gleichungen der zweiten gemeinschaftlichen (reellen oder idealen) Chorde der ersten und zweiten, der ersten und dritten und der zweiten und dritten Linie zweiter Ordnung durch:

$$a'' = 0, \quad a' = 0, \quad a = 0.$$

Alsdann erhalten wir, indem μ'', μ' und μ gehörig zu bestimmende Coefficienten bedeuten, folgende Ausdrücke:

$$\begin{aligned} A - \mu''A' &= c.a'' = 0, \\ A - \mu'A'' &= c.a' = 0, \\ A' - \mu A'' &= c.a = 0. \end{aligned} \qquad (1)$$

Wenn wir die beiden ersten dieser drei Gleichungen von einander abziehen, so kommt:

$$\mu''A' - \mu'A'' = c(a' - a'') = 0.$$

Die Form dieser Gleichung zeigt, dafs dieselbe ein System zweier geraden Linien, von welchen eine die gemeinschaftliche Chorde der drei Linien zweiter Ordnung ist, darstellt, und dafs sie mithin mit der letzten der Gleichungen (1) identisch ist. Hieraus folgt:

$$\mu = \frac{\mu'}{\mu''}, \qquad a = \frac{a' - a''}{\mu''}.$$

Aus dem letzten dieser beiden Ausdrücke erhellet, dafs die zweiten gemeinschaftlichen Chorden je zweier der drei Linien zweiter Ordnung sich in demselben Puncte schneiden. Also:

Wenn irgend drei Linien zweiter Ordnung eine gemeinschaftliche (reelle oder imaginäre) Chorde haben, so vereinigen sich die zugehörigen Chorden je zweier derselben, alle drei, in ein und demselben Puncte (362).

Wir wollen die Discussion der einzelnen Fälle dieses Satzes mehr andeuten als ausführen. Zuerst können wir für die in Rede stehenden drei Linien zweiter Ordnung drei wirkliche Curven nehmen; ferner auch, wenn wir voraussetzen, dafs die beiden ersten Curven sich wirklich schneiden oder sich berühren, statt der dritten Curve ein System von zwei geraden Linien, die durch zwei Durchschnitts-Puncte gehen oder sich im Berührungs-Puncte schneiden, und alsdann auch in eine einzige gerade Linie zusammenfallen können. Wenn man also durch jeden von zwei Durchschnitten zweier Linien zweiter Ordnung (welche Durchschnitte auch in einen Berührungs-Punct zusammenfallen können) nach beliebiger Richtung eine gerade Linie zieht, so ist der Ort für die Durchschnitte derjenigen beiden Chorden, welche auf den beiden Curven durch jene beiden geraden Linien bestimmt werden, eine neue gerade Linie, und zwar die zweite Chordale desjenigen Chordal-Systems, das durch obige beiden Durchschnitte bestimmt wird. Hiernach kann man (Fig. 39.) die zweite Chordale zweier sich in zwei Puncten M und m schneidenden Curven mit blofser Hülfe eines Lineals construiren. Zu diesem Ende ziehe man durch die beiden Durchschnitts-Puncte nach beliebiger Richtung zwei gerade Linien NN' und nn', welche der einen Curve in N und n, der andern in N' und n' begegnen, alsdann schneiden sich Nn und N'n' in einem Puncte L der gesuchten Chordalen. Auf dieselbe Weise erhalten wir einen zweiten Punct derselben und somit diese Linie selbst. Fig. 39.

Wenn wir annehmen, dafs zwei der drei in Rede stehenden Curven sich vierpunctig oder dreipunctig osculiren oder zweimal berühren, so bestimmt jede beliebige dritte Curve, die die beiden ersten im Osculations-Puncte oder in einem der beiden Berührungs-Puncte berührt, auf diesen beiden Curven zwei Chorden, die sich auf der Tangente im Osculations-Puncte, oder derjenigen geraden Linie, die den Osculations-Punct mit dem Durchschnitts-Puncte verbindet, oder endlich auf der Tangente im zweiten Berührungs-Puncte

schneiden. Wenn man ferner durch den Osculations- und Durchschnitts-Punct zweier sich dreipunctig osculirenden Curven, oder durch die Berührungs-Puncte zweier sich zweimal berührenden Curven, irgend eine dritte Curve legt, so bestimmt dieselbe auf den beiden erstern zwei Chorden, die sich auf der Tangente im Osculations-Puncte oder auf der Berührungs-Chorde schneiden.

Wenn wir für die dritte Curve in den vorstehenden Resultaten ein System von zwei geraden Linien nehmen, so erhalten wir die Entwicklungen der 354. — 356. und der 358. — 361. Nummer.

Wenn wir annehmen, dafs zwei der drei in Rede stehenden Linien zweiter Ordnung unter einander ähnlich sind, so liegt ihre zweite Chordale unendlich weit entfernt, mithin sind die beiden auf denselben durch die dritte Curve bestimmten Chordalen parallel. Bei diesem Falle haben wir mit einiger Ausführlichkeit schon in der 345. Nummer verweilt.

Fig. 17. Wir können ferner eine beliebige Curve mit zwei Systemen von zwei geraden Linien zusammenstellen, und erhalten alsdann den Satz vom eingeschriebenen Sechseck (292) und die verschiedenen Modificationen desselben für die besonderen Fälle, dafs Winkel-Puncte desselben zusammenfallen. Wenn wir uns nämlich wiederum auf die 17. Figur beziehen, so haben die beiden Linien-Systeme M‴M′ und M′M, M„M und M„M′ mit der Curve die gemeinschaftliche Chorde MM′, die drei zweiten Chorden sind AB, M′M‴ und M„M„. Diese drei Linien schneiden sich also in demselben Puncte, oder, was dasselbe heifst, der Durchschnitt der letztgenannten beiden Chorden, D, liegt mit A und B in gerader Linie.

Wenn wir endlich drei Systeme von zwei geraden Linien zusammenstellen, so erhalten wir unmittelbar die Sätze der 70. — 76. Nummer.

Der Nerv der Beweisführung in dieser Nummer liegt darin, dafs, wenn wir die beiden ersten der Gleichungen (1) von einander abziehen, die resultirende Gleichung wiederum ein System zweier geraden Linien darstellt. Dieſs wird in dem vorstehenden Falle dadurch bedingt, dafs in diesen beiden Gleichungen ein gemeinschaftlicher Factor des ersten Grades, c, vorkommt. Aber auch wenn diese beiden Gleichungen die Form vollständiger Quadrate annehmen, läfst sich diejenige Gleichung, die wir durch Abziehen derselben von einander erhalten, in zwei Factoren des ersten Grades zerlegen. Diese Bemerkung führt uns zu einem zweiten Schema.

384. Seyen wiederum:

$$A = 0, \quad A' = 0, \quad A'' = 0,$$

die Gleichungen dreier Linien zweiter Ordnung; die erste dieser Linien berühre die zweite und dritte jede zweimal, und die dadurch bestimmten Berührungs-Chorden seyen durch die Gleichungen:

$$p = 0, \quad q = 0,$$

dargestellt. Alsdann haben wir folgende beiden Ausdrücke:

$$\left.\begin{aligned} A - \mu' A' &= p^2 = 0, \\ A - \mu'' A'' &= q^2 = 0, \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

und, indem wir abziehen, ergiht sich:

$$\mu' A' - \mu'' A'' = q^2 - p^2 = (q+p)(q-p) = 0. \quad (2)$$

Diese Gleichung bezeichnet ein Chordal-System der zweiten und dritten Linie zweiter Ordnung; vergleichen wir dieselbe mit folgender Gleichung:

$$A' - \mu A'' = a \cdot a' = 0,$$

indem die beiden Chordalen durch

$$a = o, \quad a' = o,$$

dargestellt werden, so erhalten wir:

$$\mu = \frac{\mu''}{\mu'}, \quad a.a' = \frac{1}{\mu'}(q+p)(q-p),$$

mithin, indem wir durch ξ und ξ' zwei unbestimmte Coefficienten bezeichnen, deren Product gleich ist μ':

$$\xi a = q+p, \quad \xi' a' = q-p,$$

woraus ersichtlich ist, dafs die geraden Linien:

$$p = o, \quad q = o, \quad a = o, \quad a' = o,$$

alle vier durch denselben Punct gehen. Wir haben also folgenden Satz, den wir auch unmittelbar an die 367. Nummer hätten anknüpfen können, bewiesen:

Wenn zwei Linien zweiter Ordnung beide von einer dritten zweimal berührt werden, so schneiden sich die beiden Berührungs-Chorden in dem Mittelpuncte eines Chordal-Systems der beiden erstgenannten Linien zweiter Ordnung.

Die doppelte Berührung kann durch vierpunctige Osculation hindurch in eine imaginäre übergehen. Andere Modificationen ergeben sich nach der verschiedenen Natur der zusammengestellten Linien zweiter Ordnung. Wir können zuvörderst ein System zweier geraden Linien nehmen, die von irgend zwei Curven berührt werden; wenn wir beliebig viele Curven nehmen, die jene beiden geraden Linien berühren, und überdiefs durch irgend zwei feste Puncte gehen, oder überhaupt eine gemeinschaftliche Chordale haben, so gehen alle Berührungs-Chorden durch einen festen Punct. Wir können ferner voraussetzen, dafs ein gegebenes Linien-System von einer Curve und von irgend einem zweiten Linien-System zweimal berührt werde *), und kommen alsdann unmittelbar zu der allgemeinen Theorie der Pole und Polaren (306). Wenn wir eine Curve betrachten, welche von zwei Paar gerader Linien berührt wird, so erhalten wir den Newtonschen Satz vom umschriebenen Viereck (310). Wir können endlich auch eine Curve nehmen, die von einer andern zweimal, und überdiefs noch von zwei geraden Linien berührt wird. Dieser letzte Fall liefert die Construction folgender Aufgabe:

„Eine Linie zweiter Ordnung zu beschreiben, die eine gegebene vierpunctig osculirt, „und überdiefs zwei gegebene gerade Linien berührt."

Wir können nemlich diese Aufgabe als aufgelöset betrachten, wenn wir den Osculations-Punct bestimmt haben (356). Um diesen zu finden, verbinde man die vier Durchschnitte der beiden geraden Linien und der Curve noch durch zwei Paar gerader Linien, und lege von den Durchschnitten der Linien jedes Paares Tangenten an die gegebene

*) Wir sagen von zwei Linien-Systemen, der Analogie nach, dafs sie einander berühren, wenn alle vier Linien in demselben Puncte sich schneiden. In der Uebertragung des allgemeinen Satzes auf diesen besondern Fall liegt durchaus nichts Gewagtes. Denn Alles kommt nur auf die Form der Gleichungen (1) an, und wir können offenbar immer die Gleichungen:

$$y^2+2\alpha xy+\beta x^2 = o, \quad sy = o,$$

zu einer Gleichung von folgender Form:

$$(y+\varkappa x)^2 = o,$$

verbinden (376), so lange nur β positiv ist, d. h. das eine Linien-System in dieselben beiden der von dem andern Systeme gebildeten Scheitel-Winkel fällt.

Curve. Die Berührungs-Puncte sind alsdann diejenigen Puncte, in welchen die gegebene Curve von denjenigen osculirt wird, die den Bedingungen der Aufgabe Genüge leisten. Die Determination ist derjenigen in der 368. Nummer ganz analog.

Wir können, eben so leicht als die vorige, auch folgende Aufgabe auflösen:

„Eine Linie zweiter Ordnung zu beschreiben, die eine gegebene zweimal und über„diefs drei gegebene gerade Linien berührt."

Indem wir nemlich die gegebene Curve nach einander mit je zwei der gegebenen geraden Linien, als einer Linie zweiter Ordnung, zusammenstellen, erhalten wir, ähnlich wie in der 369. Nummer, viermal drei Puncte, die auf den vier Berührungs-Chorden liegen, welche den vier, der Aufgabe im Allgemeinen Genüge leistenden, Curven entsprechen. Wir müssen hierbei nicht übersehen, dafs die doppelte Berührung, wenn jene Chorden der gegebenen Curve nicht begegnen, eine imaginäre ist.

Fig. 17. In diesem Beweise ist zugleich auf indirectem Wege der in der vorigen Nummer begriffene Satz, dafs in jedem in eine Linie zweiter Ordnung eingeschriebenen Sechseck die gegenüberliegenden Seiten sich in solchen drei Puncten schneiden, die in gerader Linie liegen, bewiesen; und zugleich ist dargethan, dafs eine solche gerade Linie, etwa ADB, diejenige ist, welche durch zwei (reelle oder imaginäre) Puncte geht, in denen die gegebene Curve von einer solchen Curve berührt wird, die überdiefs drei Diagonalen des Sechsecks, MM', $M''M_{''}$ und $M'''M_{'''}$, berührt.

Um dem Schema dieser Nummer die ganze Allgemeinheit zu geben, die es mit sich bringt, müssen wir die zweiten Theile der beiden Gleichungen (1) mit doppeltem Vorzeichen behaften. Wenn wir diese Gleichungen von einander abziehen, indem wir in denselben verschiedene Vorzeichen nehmen, so kommt statt (2):

$$\mu'A' - \mu''A'' = \pm(p^2+q^2) = 0,$$

eine Gleichung, die nicht mehr ein Chordal-System der zweiten und dritten Curve, sondern einen Chordal-Punct derselben darstellt. Diesen Punct können wir construiren, indem wir zugleich:

$$p = 0, \quad q = 0,$$

setzen; die beiden Berührungs-Chorden schneiden sich also im Chordal-Puncte, der hier an die Stelle des Mittelpunctes des im Anfange dieser Nummer betrachteten Chordal-Systems tritt.

Fig. 40. Wenn wir z. B. in der 40. Figur für die Linie zweiter Ordnung, die von jeder der beiden Curven zweimal berührt wird, zwei äufsere Tangenten nehmen, so vereinigen sich die beiden Berührungs-Chorden Tt und T't' im Puncte O, dem Mittelpuncte des Chordal-Systems POQ. Nehmen wir hingegen eine innere und eine äufsere gemeinschaftliche Tangente, so geht die Berührungs-Chorde durch einen der beiden Chordal-Puncte der beiden Curven: so geht z. B. Tr durch O'', und T'r' durch O'.

Wenn alle vier gemeinschaftliche Tangenten gezogen sind, so haben wir zwei Curven, welche die Seiten desselben Viereeks $Ss''\sigma s'''$ berühren, woraus denn nach dem oben angeführten Newtonschen Satze folgt, dafs die drei Diagonalen der durch die vier Tangenten gebildeten vollständigen vierseitigen Figur, nemlich s's, s'''s'' und $S\sigma$, zu je zwei genommen, sich in den drei Puncten O, O' und O'' schneiden. Hiernach können wir leicht die beiden Chordal-Puncte zweier sich nicht schneidenden Curven bestimmen, wenn ihre gemeinschaftlichen Tangenten bekannt sind, und diese ergeben sich durch eine einfache Construction (nach der 388. Nummer), wenn wir das Chordal-System kennen.

S, O'', σ und O' sind vier harmonische Theilungs-Puncte (50).

Digitized by Google

385. Wir gehen zu einem dritten, an die vorige Nummer sich anschliefsenden, Schema über. Seyen:

$$A = o, \quad A' = o, \quad A'' = o, \quad A''' = o,$$

die Gleichungen von vier Linien zweiter Ordnung, von welchen jede der drei letztern die erste zweimal berührt. Alsdann erhalten wir folgende Ausdrücke:

$$\begin{aligned} A+\mu'A' &= p^2 = o, \\ A+\mu''A'' &= q^2 = o, \\ A+\mu'''A''' &= r^2 = o, \end{aligned} \tag{1}$$

wobei wir durch μ', μ'' und μ''' drei unbestimmte Coefficienten und durch

$$p = o, \quad q = o, \quad r = o,$$

die drei Berührungs-Chorden bezeichnen. Wenn wir die Gleichungen (1), paarweise genommen, von einander abziehen, so erhalten wir:

$$\begin{aligned} \mu'A'-\mu''A'' &= p^2-q^2 = o, \\ \mu'A'-\mu'''A''' &= p^2-r^2 = o, \\ \mu''A''-\mu'''A''' &= q^2-r^2 = o, \end{aligned} \tag{2}$$

für die Gleichungen eines Chordal-Systems je zweier der drei letzten Curven: Gleichungen, von denen wir die dritte durch Abziehen der beiden ersten erhalten. Wir haben also folgenden Satz bewiesen:

Wenn eine gegebene Linie zweiter Ordnung von dreien andern zwiefach berührt wird, so gehen diejenigen Chordal-Systeme je zweier der drei letztgenannten Curven, in deren Mittelpuncten die drei Berührungs-Chorden, paarweise genommen, sich schneiden, alle drei durch dieselben vier Puncte.

In dem Falle, wo nach der Schlufs-Bemerkung der vorigen Nummer zwei Puncte (dafs deren immer zwei seyn müssen, ergibt sich sogleich aus dem Anblick der Gleichungen (2)) an die Stelle zweier Chordal-Systeme treten, fällt die directe geometrische Bedeutung des vorstehenden Satzes hinweg; wir erhalten alsdann zwei Puncte, d. h. zwei Ellipsen, die bis zum Verschwinden ihr Axen-Verhältnifs beibehalten haben, deren Gleichungen sich zu der Gleichung des Linien-Systems verbinden lassen.

Wir wollen die Discussion des vorstehenden Satzes nur auf einzelne besondere Fälle ausdehnen, und zu diesem Ende erstens irgend eine Curve zweiter Ordnung nehmen, um die ein Sechseck beschrieben ist, dessen drei Paare gegenüberstehender Seiten wir als drei jene Curve zweimal berührende Linien zweiter Ordnung betrachten. Alsdann erhalten wir sechs leicht zu bestimmende gerade Linien, von denen viermal drei durch denselben Punct gehen; drei solcher geraden Linien, die sich in demselben Puncte schneiden, sind die drei Diagonalen des umschriebenen Sechsecks (320).

386. Wir wollen als zweiten Fall des Satzes der vorigen Nummer ein System zweier geraden Linien betrachten, welche von drei Linien zweiter Ordnung zweimal berührt werden, und überdiefs für eine dieser drei Linien zweiter Ordnung ein neues Linien-System nehmen. Wir haben also irgend zwei Curven, zwei ihrer gemeinschaftlichen Tangenten und zwei durch den Durchschnitt derselben gehende gerade Linien. Der diesem besondern Falle entsprechende Satz ist folgender: Fig. 40.

Wenn zwei Curven zweiter Ordnung beide von denselben beiden geraden Linien berührt werden, und man zieht durch den Durchschnitt dieser gemeinschaftlichen Tangenten irgend zwei den Curven begegnende gerade Linien, so lassen sich durch die auf jeder der beiden Curven bestimmten vier Durchschnitts-Puncte noch zwei Linien-Sy-

steme legen: die auf diese Weise sich ergebenden vier Linien-Systeme schneiden sich, paarweise genommen, in vier Puncten des Chordal-Systems der beiden Curven.

In der 40. Figur sind SM und SN die beiden, durch S, den Durchschnitt der gemeinschaftlichen Tangenten, gehenden geraden Linien. Es schneiden sich die beiden Linien-Systeme MN, $\mu\nu$ und M'N', $\mu'\nu'$ in vier solchen Puncten p, p', q und q', die auf zweien zusammengehörigen Chordalen der beiden Curven liegen. Statt der in der Figur ausgeführten Construction hätten wir auch die beiden (nicht gezogenen) Linien-Systeme Mν, Nμ und M'ν', Nμ' zusammenstellen können, und alsdann vier andere Puncte derselben beiden Chordalen Op und Oq erhalten.

Wir können für die eine, durch S gehende, gerade Linie, etwa für SM, eine der beiden Tangenten, etwa St, nehmen, und erhalten alsdann die beiden Linien-Systeme Nt, νt und N't', ν't', welche sich auf dem Chordal-Systeme der beiden Curven schneiden.

387. Indem wir eine durch den Durchschnitt zweier gemeinschaftlichen Tangenten gehende gerade Linie als ein System zweier zusammenfallenden betrachten, ergibt sich folgender Satz:

Wenn man durch den Durchschnitt zweier gemeinschaftlichen Tangenten irgend zweier Curven zweiter Ordnung eine beiden Curven begegnende gerade Linie zieht, so bilden die, in den vier Durchschnitten an beide Curven gelegten, Tangenten ein vollständiges Viereck, dessen zwei Diagonalen ein Chordal-System der beiden Curven sind, und dessen dritte Diagonale wiederum durch den Durchschnitt derselben beiden gemeinschaftlichen Tangenten geht.

Fig. 40. Der letzte Theil dieses Satzes ergibt sich sogleich. In der 40. Figur ist durch den Punct S die gerade Linie SN gelegt, die den beiden Curven in N, ν, N' und ν' begegnet. Die Tangenten in diesen vier Puncten schneiden sich in den sechs Puncten P, P', Q, Q' A und A'. PP' und QQ' bilden das Chordal-System der beiden Curven. AA' geht durch den Punct S; denn AT wird in t und B, so wie A'T' in t' und B' harmonisch getheilt (309), und da T und T', B und B', t und t' mit S in gerader Linie liegen, so liegen auch A und A' nothwendig mit demselben Puncte in gerader Linie.

388. Nach den vorigen beiden Nummern erhalten wir auf leichte Weise die Chordal-Systeme zweier gegebenen Curven zweiter Ordnung, wenn die Durchschnitte ihrer gemeinschaftlichen Tangenten bekannt sind. Wir wollen in dieser Nummer die gemeinschaftlichen Tangenten vermittelst eines Chordal-Systems construiren.

Fig. 40. In der in der vorigen Nummer angezeigten Construction (wir betrachten zuerst den Fall der 40. Figur, wo die beiden Curven keinen Punct mit einander gemein haben) schneiden sich die beiden äufseren und die beiden inneren Tangenten in zwei Puncten P' und P der zwischen beide Curven hindurch gehenden Chordalen; hingegen schneiden die ungleichnamigen Tangenten beider Curven sich in zwei Puncten Q' und Q der andern Chordalen. Wenn wir daher die Construction umkehren, und von irgend einem Puncte der Chordalen PP' zwei innere oder zwei äufsere Tangenten an beide Curven legen, oder von irgend einem Puncte der andern Chordalen QQ' eine innere Tangente an die eine, und eine äufsere Tangente an die andere Curve, so geben die, durch die jedesmaligen beiden Berührungs-Puncte gehenden, geraden Linien durch den festen Punct S, den Durchschnitt der gemeinschaftlichen äufsern Tangenten.

Wenn wir statt des Punctes S den Durchschnitt der inneren gemeinschaftlichen Tangenten der beiden Curven nehmen, und durch diesen Punct σ irgend eine den Curven be-

gegnende gerade Linie legen, so bleibt Alles wie in dem vorigen Falle, nur dafs die Durchschnitte zweier inneren oder zweier äufseren Tangenten in die Chordale QQ', hingegen die Durchschnitte zweier ungleichnamigen Tangenten der beiden Curven in die Chordale PP' fallen. Wenn wir daher, umgekehrt, von einem beliebigen Puncte der Chordalen QQ' zwei innere oder zwei äufsere Tangenten an beide Curven ziehen, oder von einem beliebigen Puncte der Chordalen PP' eine innere Tangente an eine Curve ond eine äufsere an die andere, so gehen diejenigen geraden Linien, welche die jedesmaligen beiden Berührungen verbinden, durch den festen Punct σ, den Durchschnitt der beiden inneren gemeinschaftlichen Tangenten.

Aus dem Vorstehenden erhellet, dafs, wenn wir von irgend einem Puncte einer der beiden Chordalen, PP' ond QQ', an die beiden Curven vier Tangenten legen und die Berührungen auf der einen Curve mit den Berührungen aof der andern durch vier gerade Linien verbinden: diese Linien, paarweise genommen, in den beiden Durchschnitten der beiden inneren nnd der beiden äufseren gemeinschaftlichen Tangenten sich schneiden. Diese Durchschnitte σ ond S liegen, nach der Schlufs-Bemerkung der 334. Nummer, auf der Polaren des Durchschnittes O der Chordalen PP' nnd QQ', die in Beziehung auf beide Curven ein und dieselbe gerade Linie ist.

Wir haben noch zwei Paar Durchschnitte gemeinschaftlicher Tangenten der beiden sich nicht schneidenden Curven, s nnd s', s'' nnd s''', die auf den Polaren von O'' nnd O' liegen. Durch diese Durchschnitte können wir aber keine, beiden Curven begegnende, gerade Linie legen, wonach die Sätze der beiden vorigen Nummern, so wie die Umkehrung des letztern dieser Sätze, hier keine Anwendung finden.

Wenn die beiden gegebenen Curven sich in vier Puncten schneiden, so finden die Fig. 41.
Constructionen der beiden vorigen Nummern für die sechs Durchschnitte je zweier der vier gemeinschaftlichen Tangenten Statt. Diese sechs Puncte, paarweise genommen, S nnd S', s nnd s', s'' und s''', entsprechen den drei Chordal-Systemen, deren Mittelpuncte O, O' nnd O'' sind, nnd wenn irgend ein Punct eines dieser Systeme gegeben ist, so erhalten wir sogleich die entsprechenden beiden Durchschnitts-Puncte der gemeinschaftlichen Tangenten. Ziehen wir z. B. von einem Puncte Q der Chordalen MM' zwei Tangenten RU und RV, RU' nnd RV', an jede der beiden Curven, so schneiden sich die durch die Berührungen gehenden geraden Linien UU' und VV', UV' nnd U'V in den Puncten S und S'.

Wenn die beiden gegebenen Curven sich nur in zwei Puncten schneiden, so gibt es Fig. 42.
nur zwei gemeinschaftliche Tangenten; Alles bleibt für den Durchschnitt derselben wie zuvor. Wenn man von irgend einem Puncte des einzig reellen Chordal-Systems, etwa von R, Tangenten an die beiden Curven zieht, so schneiden sich wiederum UU' nnd VV' in S; es schneiden sich aber auch UV' nnd U'V in einem festen, innerhalb beider Curven liegenden, Puncte, der die Rolle des Durchschnittes der beiden übrigen, imaginären, Tangenten spielt.

Wenn zwei Curven, von denen eine ganz innerhalb der andern liegt, und das Chordal-System derselben gegeben ist, nnd man zieht von einem Puncte des letztern wie bisher Tangenten an die beiden Curven, so schneiden sich die vier durch die Berührungen gelegten geraden Linien in zwei festen innerhalb beider Curven liegenden Puncten, von denen sich mithin keine Tangenten an dieselben legen lassen.

Digitized by Google

Fig. 41, 42. Wir haben also allgemein, wenn wir zugleich noch auf die 382. Nummer, nach der UV und U'V' sich in R', einem Puncte der Chordalen MM', schneiden, Rücksicht nehmen, folgenden Satz:

Wenn man von irgend einem Puncte einer Chordalen irgend zweier Curven zweiter Ordnung zwei Tangenten an jede derselben zieht, so lassen sich durch die vier Berührungs-Puncte drei Paare gerader Linien legen, von denen die Linien zweier Paare sich in zweien festen Puncten und die Linien des dritten Paares sich in einem solchen Puncte schneiden, der immer auf derjenigen Chordalen bleibt, von deren einem Puncte aus die Tangenten gezogen worden sind *).

Fig. 43. 389. Zwei Parabeln können nicht mehr als drei gemeinschaftliche Tangenten haben. Wenn vier Puncte gegeben sind, so können wir auf der Stelle (261, 270) die drei gemeinschaftlichen Tangenten der beiden durch diese vier Puncte gehenden Parabeln bestimmen. Seyen nemlich A, B, C und D die vier gegebenen Puncte, die beiden Paare gegenüberliegender Seiten und die beiden Diagonalen schneiden sich in den Winkel-Puncten des Dreiecks O''O'O, und die drei gesuchten Tangenten bilden das Dreieck T'T''T, dessen Winkel-Puncte in den Mitten der Seiten des eben bezeichneten Dreiecks O''O'O liegen.

---

*) Sobald dieser Satz für eine besondere Lage der beiden Curven zweiter Ordnung bewiesen ist, ist seine Gültigkeit allgemein dargethan. Denn wenn wir von einem Normalfalle, etwa dem Falle der 41. Figur, ausgehen, und die beiden Curven auf dasjenige Chordal-System beziehen, auf welchem wir den Punct R angenommen haben, so können wir die Coordinaten der vier Berührungs-Puncte U, V, U' und V' zwischen den Gleichungen der durch R gehenden Tangenten und den Gleichungen der beiden Curven eliminiren. Zwischen diesen Coordinaten finden die, dem Satze des Textes entsprechenden, Beziehungen Statt. Es ändert sich aber nichts in den Formen der Rechnung, durch welche wir zu jenen Coordinaten-Werthen gelangen, wenn wir irgend zwei andere Curven nehmen, die eine beliebige Lage zu einander haben, und dieselben auf ein entsprechendes Coordinaten-System beziehen: also ändert sich auch nichts in den obigen Beziehungen der vier Berührungs-Puncte zu einander. Diese Art zu schliefsen fliefst aus demselben allgemeinen Princip, aus welchem auch die Bedeutung und der Gebrauch der verschiedenen Vorzeichen hervorgeht (4), und nach welchem die analytische Behandlung der Geometrie einen unschätzbaren Vorzug vor jeder andern, und namentlich, was die Theorie der Linien zweiter Ordnung anbelangt, vor der Projections-Methode behauptet.

Es ist leicht ersichtlich, dafs die beiden äufseren, so wie die beiden inneren Tangenten, durch eine Gleichung des zweiten Grades, in welcher als Constanten einzig die Constanten der beiden Curven vorkommen, gegeben sind. Es hängt aber von den Werthen dieser Constanten, also von der Natur und der gegenseitigen Lage der beiden Curven ab, ob diese Gleichung ein wirkliches Linien-System oder einen Punct ausdrückt. Im letztern Falle läfst offenbar diese Gleichung eines Punctes sich mit der Gleichung jeder der beiden Curven zu einer Gleichung von der Form: $(y+\varkappa x+\sigma)^2 = 0$ verbinden; und somit ist direct bewiesen, was aus dem Satze der vorstehenden Nummer durch Umkehrung folgt, dafs der Satz der 387. Nummer (so wie der vorhergehenden) sich auch auf die in Rede stehenden Durchschnitte imaginärer Tangenten, z. B. auf den Punct v der 42. Figur bezieht.

Digitized by Google

390. Wir wollen ein viertes Schema entwickeln. Seyen

$$A = 0, \quad A' = 0, \quad A'' = 0, \tag{1}$$

die Gleichungen irgend dreier gegebenen Linien zweiter Ordnung; alsdann stellen, wenn μ' und μ'' irgend zwei unbestimmte Coefficienten bedeuten, die Gleichungen:

$$\begin{aligned} A''+\mu A &= 0, \\ A''+\mu' A' &= 0, \end{aligned} \tag{2}$$

die wir, der Kürze wegen, durch:

$$B = 0, \quad B' = 0, \tag{3}$$

bezeichnen, irgend zwei neue Linien zweiter Ordnung dar, die durch die Durchschnitte der ersten und dritten und der zweiten und dritten gegebenen Curve gehen. Wenn wir die beiden Gleichungen (2) von einander abziehen, so erhalten wir:

$$\mu A-\mu' A' = B-B' = 0: \tag{4}$$

die Gleichung einer Linie zweiter Ordnung, welche einerseits durch die Durchschnitte der beiden Curven: $A = 0$ und $A' = 0$, andrerseits durch die Durchschnitte der beiden Curven: $B = 0$ und $B' = 0$, geht. Hiernach ergibt sich folgender allgemeine Satz;

Die (reellen oder imaginären) Durchschnitte irgend zweier gegebenen Linien zweiter Ordnung, so wie die (reellen oder imaginären) Durchschnitte irgend zweier anderen Linien derselben Ordnung, welche sich durch die Durchschnitte jener beiden gegebenen mit einer beliebigen dritten legen lassen, befinden sich auf dem Umfange ein und derselben neuen Linie zweiter Ordnung.

391. Folgendes fünfte Schema ist mit dem Schema der vorigen Nummer verwandt, und führt zu denselben geometrischen Constructionen. Bei der bisherigen Bezeichnung ist:

$$A+\mu' A'+\mu'' A'' = 0, \tag{5}$$

die Gleichung einer Linie zweiter Ordnung. Diese Gleichung wird befriedigt, wenn wir zugleich

$$\begin{aligned} A+\mu' A' &= 0, \quad \text{und} \quad A'' = 0, \\ A+\mu'' A'' &= 0, \quad \text{„} \quad A' = 0, \end{aligned} \tag{6}$$

setzen. Die beiden Paare durch diese letzten Gleichungen dargestellter Linien zweiter Ordnung schneiden sich also auf der durch die Gleichung (1) dargestellten. Also:

Wenn irgend drei Linien zweiter Ordnung gegeben sind, so wird jede der beiden ersteren von einer beliebigen Linie derselben Ordnung, die durch die (reellen oder imaginären) Durchschnitte der anderen derselben mit der gegebenen dritten geht, so geschnitten, dafs die beidesmaligen vier (reellen oder imaginären) Durchschnitte auf dem Umfange ein und derselben neuen Linie zweiter Ordnung liegen.

392. Die Schemata der letzten beiden Nummern gestatten eine ausführliche Discussion: wir begnügen uns hier damit, einige Einzelnheiten hervorzuheben. Fig. 44.

Wir wollen zuerst annehmen, dafs die gegebenen Linien zweiter Ordnung, so wie auch die durch die Durchschnitte derselben gelegten, Systeme von zwei geraden Linien seyen. Demgemäfs seyen in der 44. Figur A'B'C'D', ABCD und ELFM die drei durch $A'' = 0$, $A' = 0$ und $A = 0$, und hiernach EHFG und IMKL die beiden durch $A+\mu' A' = 0$ und $A+\mu'' A'' = 0$ dargestellten Linien zweiter Ordnung. Alsdann erhalten wir, nach der vorigen Nummer, die acht Puncte A', B', C', D', A, B, C und D, die auf ein und derselben Linie zweiter Ordnung liegen.

Dieselben acht Puncte erhalten wir nach dec 390. Nummer, wenn wir die Linien-Systeme ABCD, AMBL und ELFM durch A = o, A′ = o und A″ = o und hiernach ED′FC′ und AB′C′D′ durch B = o und B′ = o daestellen *).

---

*) Zu demselben Resultate kommen wir auch auf folgendem Wege. Seyen:

$$U = u, \quad U' = o,$$

die Gleichungen zweier gegebenen Linien vierter Ordnung. Alsdann stellt:

$$U+\mu U' = o,$$

die allgemeine Gleichung aller Linien derselben Ordnung dar, die durch die 16 Durchschnitte der beiden gegebenen gehen. Wenn der erste Theil der letzten Gleichung, bei gehöriger Bestimmung des unbestimmten Coefficienten μ, einen Factor des zweiten Grades hat, so ist der übrige Factor, im Allgemeinen, von demselben Grade. Wenn also 8 der 16 Durchschnitte der beiden gegebenen Curven auf einer Linie zweiter Ordnung liegen, so liegen die übrigen 8 auf einer andern Linie derselben Ordnung. In der 44. Figur seyen die beiden gegebenen Linien vierter Ordnung die beiden Systeme von vier geraden Linien AB, CD, A′B′, C′D′ und EH, FG, IM, KL; die 8 Durchschnitte E, F, G, H, I, K, L und M liegen auf dem Systeme zweier geraden Linien EL, FM, und mithin auch die 8 übrigen A, B, C, D, A′, B′, C′ und D′ auf ein und derselben Linie zweiter Ordnung.

Der Analogie wegen wollen wir noch die Gleichungen zweier gegebenen Linien dritter Ordnung:

$$V = v, \quad V' = o,$$

zu der allgemeinen Gleichung aller Linien derselben Ordnung, welche durch die 9 Durchschnitte der beiden gegebenen gehen:

$$V+\mu V' = o,$$

verbinden. Wenn der erste Theil dieser Gleichung, bei einer schicklichen Annahme von μ, einen Factor vom ersten Grade hat, so ist der andere Factor, im Allgemeinen, vom zweiten Grade. Wenn also 3 der 9 Durchschnitte der beiden gegebenen Curven in geradee Linie liegen, so liegen die übrigen 6 auf einer Linie zweiter Ordnung, und umgekehrt, wenn 6 der 9 Durchschnitte auf einer Linie zweiter Ordnung liegen, so liegen die übrigen drei in gerader Linie.

Der erste Theil dieses Satzes gibt eine neue Construction einer Linie zweiter Ordnung, die durch fünf gegebene Puncte geht. Es sey nemlich (indem wir uns die Figur in Gedanken hinzuthun) BM′AM irgend ein Viereck, AB eine Diagonale desselben, und auf dieser Diagonalen D ein beliebiger Punct, durch welchen irgend zwei gerade Linien gehen, von denen eine, M″M‴, zweien gegenüberliegenden Seiten des Vierecks, AM und BM′, in M″ und M‴ begegnet, und die andere, $M_{,,}M_{,,,}$, den beiden andern gegenüberliegenden Seiten, AM′ und $BM_{,}$, in $M_{,,}$ und $M_{,,,}$. Alsdann können wir die beiden Linien-Systeme AM, $M_{,,}M_{,,,}$, M′B und AM′, M″M‴, MB für jene gegebenen Linien dritter Ordnung nehmen, die sich in neun Puncten, A, D, B, $M_{,,}$, M′, M‴, $M_{,,,}$, M und M″, schneiden, von welchen die drei erstgenannten in gerader Linie und die sechs übrigen auf einer Linie zweiter Ordnung liegen. Wenn nun M‴, M, M″, $M_{,,}$ und M′ fünf gegebene Puncte sind, so ziehe man $M_{,,,}M$, MM″, $M_{,,}M'$ und beliebig durch M′ die gerade Linie M′B. Alsdann ist das Viereck BM′AM vollständig bestimmt, mithin auch die Diagonale AB, der Durchschnitt D derselben mit der geraden Linie, die $M_{,,,}$ und $M_{,,}$ verbindet, und endlich M″D, von welcher M′B in M‴, einem sechsten Puncte der durch M‴, M, M″, $M_{,,}$ und M′ gehenden Linie

393. Nach der vorigen Nummer ergibt sich eine hübsche Art, eine Linie zweiter Ordnung zu bestimmen, wenn irgend fünf Puncte derselben gegeben sind. Diese Puncte seyen A, B, C, D und A'. Durch vier dieser Puncte, etwa durch die vier ersten, lege man zwei Linien-Systeme, etwa ABCD und AMBL, durch den fünften Punct A' ziehe man nach beliebiger Richtung zwei gerade Linien, A'F, welche dem ersten jener Systeme in G und F, und A'B', welche dem zweiten Systeme in I und K begegnen. Man verbinde G und I, F und K durch zwei gerade Linien GI und FK, die den beiden Linien-Systemen ABCD und AMBL aufser in G und F, I und K noch in den Puncten E und H, L und M begegnen, und verbinde auch diese beiden Paare von Puncten durch die geraden Linien EH und LM. Alsdann schneiden die beiden Linien-Systeme A'FEH und A'B'LM sich in vier Puncten A', B', C' und D' der zu bestimmenden Linie zweiter Ordnung. Wir erhalten also auf diese Weise zu gleicher Zeit drei neue Puncte derselben. Fig. 44.

Wir hätten dieselben drei Puncte B', C' und D' gefunden, wenn wir in der eben angezeigten Construction, statt die Puncte G und I, F und K durch zwei gerade Linien zu verbinden, IF und GK gezogen hätten.

Wenn wir durch den fünften gegebenen Punct A', statt A'F und A'B', zwei solche gerade Linien legen, die zweien anderen, von denen jede durch irgend zwei der vier ersten gegebenen Puncte geht, parallel sind, so erhalten wir, nach der eben angezeigten Construction, zwei Paar paralleler Chorden der zu bestimmenden Linie zweiter Ordnung, und hiernach sogleich den Mittelpunct derselben.

394. In der 45. Figur sind DABC und D'A'B'C' zwei gegebene, sich nicht schneidende, Curven und ABCD ist ein System zweier geraden Linien, das den beiden Curven in den Puncten A, B, C, D und A', B', C', D' begegnet. Durch diese Durchschnitts-Puncte sind zwei neue Linien-Systeme ACBD und A'C'D'B' gelegt; diese schneiden sich Fig. 45.

---

zweiter Ordnung, geschnitten wird. Es ist leicht, diese Curve durch eine stetige Bewegung des Punctes M''' zu beschreiben. Bei dieser Gelegenheit begegnen wir folgendem Satze: der Ort für die dritten Winkel-Puncte (M''') aller Dreiecke, deren drei Seiten durch irgend drei feste Puncte (M'', M', A) gehen, und deren zwei erste Winkel-Puncte (D, B) auf irgend zweien festen geraden Linien ($M_{,,}M_{,,}$, $MM_{,,}$) fortrücken, ist eine Linie zweiter Ordnung, die durch fünf, als gegeben zu betrachtende, Puncte geht.

Der zweite Theil des obigen Satzes gibt unmittelbar den Satz vom eingeschriebenen Sechseck (292). Hiervon überzeugt uns ein Blick auf die 17. Figur, wenn wir wieder, wie vorhin, die beiden Linien-Systeme AM, $M_{,,}M_{,,}$, M'B und AM', M''M''', MB für die beiden Linien dritter Ordnung nehmen.

Endlich erhalten wir auch auf der Stelle die Sätze der 77. — 87. Nummern. Denn, denken wir uns in der 30. Figur der 2. Tafel das von den geraden Linien A'A, A'A'', B'B und B'B'' bestimmte Viereck ausgeführt, so schneiden sich AB und A''B'' auf derjenigen Diagonalen dieses Vierecks, die durch die beiden Winkel-Puncte A' und B' geht; und also liegen nach dem ersten Theile des obigen Satzes die beiden übrigen Winkel-Puncte des Vierecks (die Durchschnitte von A'A und B'B'', A'A'' und B'B) und die vier Puncte A, B, A'' und B'' auf derselben Linie zweiter Ordnung, und mithin nach dem zweiten Theile jenes Satzes, indem wir die beiden Linien-Systeme SB'', S'A; S''B' und SA', S'B'', S''A für die beiden Linien dritter Ordnung nehmen, die drei Puncte S, S' und S'' in gerader Linie,

in den vier Puncten α, β, γ und δ, welche (391) alle vier auf einer Linie zweiter Ordnung liegen, die mit den beiden gegebenen Curven dasselbe Chordal-System hat. Hiernach können wir folgende Aufgabe auflösen:

Eine Linie zweiter Ordnung zu beschreiben, die durch die imaginären Durchschnitte zweier gegebenen und überdiefs durch einen gegebenen Punct geht.

Sey α der gegebene Punct; durch denselben ziehe man nach beliebiger Richtung zwei gerade Linien, von welchen eine, AC, der einen Curve in A und C, die andere, A'C', der andern Curve in A' und C' begegne. Man ziehe ferner AA', welche die beiden Curven zum zweiten Male in B und B', so wie CC', welche dieselben zum zweiten Male in D und D' schneide, und endlich BD und B'D'. Alsdann schneiden die beiden geraden Linien AC und BD die beiden geraden Linien A'C' und B'D', aufser in α, noch in drei neuen Puncten β, γ und δ der zu construirenden Curve.

Statt einer der beiden gegebenen Curven kann auch das Chordal-System derselben gegeben seyn. Wenn die eine Chordale alsdann der Curve begegnet, die andere nicht, so ergibt sich eine der vorstehenden ganz entsprechende Construction einer Linie zweiter Ordnung, die durch drei gegebene Puncte und zugleich durch die beiden imaginären Durchschnitte einer gegebenen Linie zweiter Ordnung und einer, derselben nicht begegnenden, geraden Linie geht.

395. Wenn eine Curve und auf dem Umfange derselben zwei Puncte gegeben sind, so können wir durch diese beiden Puncte eine gerade Linie und in einem derselben eine Tangente an die gegebene Curve legen, und alsdann eine Curve construiren, welche durch irgend einen gegebenen Punct α geht, und überdiefs mit der gegebenen Curve jene gerade Linie und jene Tangente zum Chordal-Systeme hat, oder, mit anderen Worten, dieselbe in einem der beiden auf ihrem Umfange liegenden Puncten osculirt, in dem andern schneidet. Diese Construction können wir geradezu in der, in der vorigen Nummer angezeigten, lesen, wenn wir nur an die Stelle einer der beiden Curven, DABC und D'A'B'C', das eben bezeichnete Chordal-System setzen; und wir können zugleich, ähnlich wie in der 393. Nummer, die Richtung der durch α zu ziehenden geraden Linien so bestimmen, dafs wir den Mittelpunct der gesuchten Curve auf der Stelle erhalten.

Fig. 29. Wenn der Osculations-Punct und der Durchschnitts-Punct sich in einen Osculations-Punct der höchsten Ordnung vereinigen, so besteht das Chordal-System aus zwei, in die gemeinschaftliche Tangente zusammenfallenden, geraden Linien; alsdann erhalten wir nach der in Rede stehenden Construction unmittelbar nur einen einzigen neuen Punct der verlangten Curve.

Sey nemlich die äufsere der beiden Curven der 29. Figur die gegebene, die im Puncte O von einer durch α gehenden Curve vierpunctig osculirt werden soll. Man ziehe durch α die, übrigens beliebige, gerade Linie AC, die der Curve in A und C, und SN, die der Tangente OS in S (in welchen Punct nach der vorigen Bezeichnung die vier Puncte A', B', C' und D' zusammenfallen) begegne; ziehe ferner SA und SC, welche die Curve zum zweiten Male in B und D schneiden, und endlich BD, von welcher SN (A'C') in einem neuen Puncte, γ, der gesuchten Curve geschnitten wird.

Man überzeugt sich leicht, dafs die früher gegebenen Constructionen der beiden Aufgaben dieser Nummer aus den vorstehenden Constructionen als besondere Fälle sich ergeben (355, 356, 360).

Digitized by Google

396. Wenn der in der Aufgabe der 394. Nummer gegebene Punct a einer der beiden Chordal-Puncte (oder überhaupt der Mittelpunct eines Chordal-Systems) der beiden gegebenen Curven ist, so fallen die vier Puncte α, β, γ und δ in einen einzigen zusammen, d. h. AC, A'C', BD und B'D' schneiden sich in ein und demselben Puncte. Fig. 45.

In der 46. Figur ist durch O, einen Chordal-Punct der beiden Curven, AC, die der einen Curve in A und C, und OA', die der andern Curve in A' und C' begegnet, gezogen. AA', CC' (AC' und A'C) begegnen den beiden Curven zum zweiten Male in B und B', D und D' (E und E', F und F'). BD, B'D' (EF und E'F') gehen, so wie AC und A'C', durch O. Fig. 46.

397. Wenn die in der 390. Nummer durch $A = 0$ und $A' = 0$ bezeichneten Curven zwei ähnliche und ähnlich liegende sind, so stellt die Gleichung $B - B' = 0$ eine dritte ähnliche und ähnlich liegende Curve dar, von welcher wir, neben den beiden Durchschnitten der beiden erstgenannten Curven, noch die vier Durchschnitte der beiden durch $B = 0$ und $B' = 0$ dargestellten Curven erhalten. Hiernach können wir, ähnlich wie in den Constructionen der vorigen Nummern, eine Hyperbel bestimmen, wenn die Richtung ihrer Asymptoten und überdiefs drei Puncte derselben gegeben sind. Wir brauchen nemlich zu diesem Ende für die durch $A = 0$ und $A' = 0$ dargestellten Curven nur zwei solche Systeme zweier, den Asymptoten parallelen, geraden Linien zu nehmen, die sich in irgend zweien der drei gegebenen Puncte schneiden.

398. Wenn, indem wir wieder zu dem Schema der 390. Nummer zurückgehen, irgend drei jener acht Puncte, die auf dem Umfange der durch $B - B' = 0$ dargestellten Linie zweiter Ordnung sich befinden, in gerader Linie liegen, so liegen nothwendig alle acht Puncte auf zweien geraden Linien vertheilt.

Wenn die beiden Gleichungen $B = 0$ und $B' = 0$ zwei Linien-Systeme bezeichnen, die denselben Mittelpunct haben, so stellt offenbar jede Gleichung des zweiten Grades, die wir durch Verbindung derselben erhalten, ein neues Linien-System dar, das ebenfalls denselben Mittelpunct hat, oder einen blofsen Punct, jenen Mittelpunct selbst. Diefs ist auf der Stelle ersichtlich; denn es sey, indem wir den Anfangs-Punct gehörig bestimmen:

$$y^2 + 2\alpha xy + \beta x^2 = \nu B = 0,$$
$$y^2 + 2\alpha' xy + \beta' x^2 = \nu' B' = 0,$$

alsdann stellt, wenn μ einen unbestimmten Coefficienten bedeutet:

$$y^2 + 2\frac{\alpha + \mu\alpha'}{1+\mu} xy + \frac{\beta + \mu\beta'}{1+\mu} x^2 = 0,$$

offenbar ein neues System zweier sich im Anfangs-Puncte schneidenden, geraden Linien dar. Auf einem solchen Systeme: $B - B' = 0$, schneiden sich, nach der 390. Nummer, die beiden Curven: $A = 0$ und $A' = 0$, oder, mit anderen Worten, die Durchschnitte dieser beiden Curven liegen, paarweise genommen, mit demjenigen Puncte, in welchem die vier geraden Linien der beiden Systeme: $B = 0$ und $B' = 0$, sich schneiden, in gerader Linie. Wenn die beiden Curven sich wirklich schneiden, so bezeichnet $B - B' = 0$ ein System zweier reellen geraden Linien.

In der 47. Figur entspreche die Curve der Gleichung: $A'' = 0$, die beiden Linien-Systeme ABCD und ACBD den Gleichungen: $A = 0$ und $A' = 0$. Diese Linien-Systeme schneiden die Curven in den Puncten F, G, K und L; E, H, I und M so, dafs FK und GL, EI und HM alle vier durch den Punct S gehen: alsdann gehen durch den- Fig. 47.

Digitized by Google

selben Punct auch die beiden geraden Linien AD und BC, welche die Durchschnitte der beiden Linien-Systeme, paarweise genommen, mit einander verbinden.

Der Punct S kann sowohl aufserhalb als auch innerhalb der gegebenen Curve fallen. Die vier Paare von Puncten F und G, H und I, K und L, M und E können alle oder zum Theil sich zu Berührungs-Puncten vereinigen; hiernach erhalten wir, als besondern Fall, den Newtonschen Satz vom umschriebenen Viereck. Statt der beiden Linien-Systeme ABCD und ACBD können wir irgend zwei andere Curven nehmen, welche durch die Puncte F, G, K, L und H, I, M, E gehen. Hiernach erhalten wir folgenden Satz, von welchem derjenige, welcher dem Schema der 384. Nummer entspricht, nur ein besonderer Fall ist:

Wenn eine Linie zweiter Ordnung von zweien anderen so geschnitten wird, dafs durch die beidesmaligen vier Durchschnitte sich zwei Paar gerader Linien legen lassen, die sich in demselben Puncte schneiden, so gehen durch diesen Durchschnitts-Punct auch zwei zusammengehörige Chordalen der beiden letztgenannten Linien zweiter Ordnung.

Wir brechen hier die Entwicklungen dieses ersten Bandes ab.

G 10104 (1

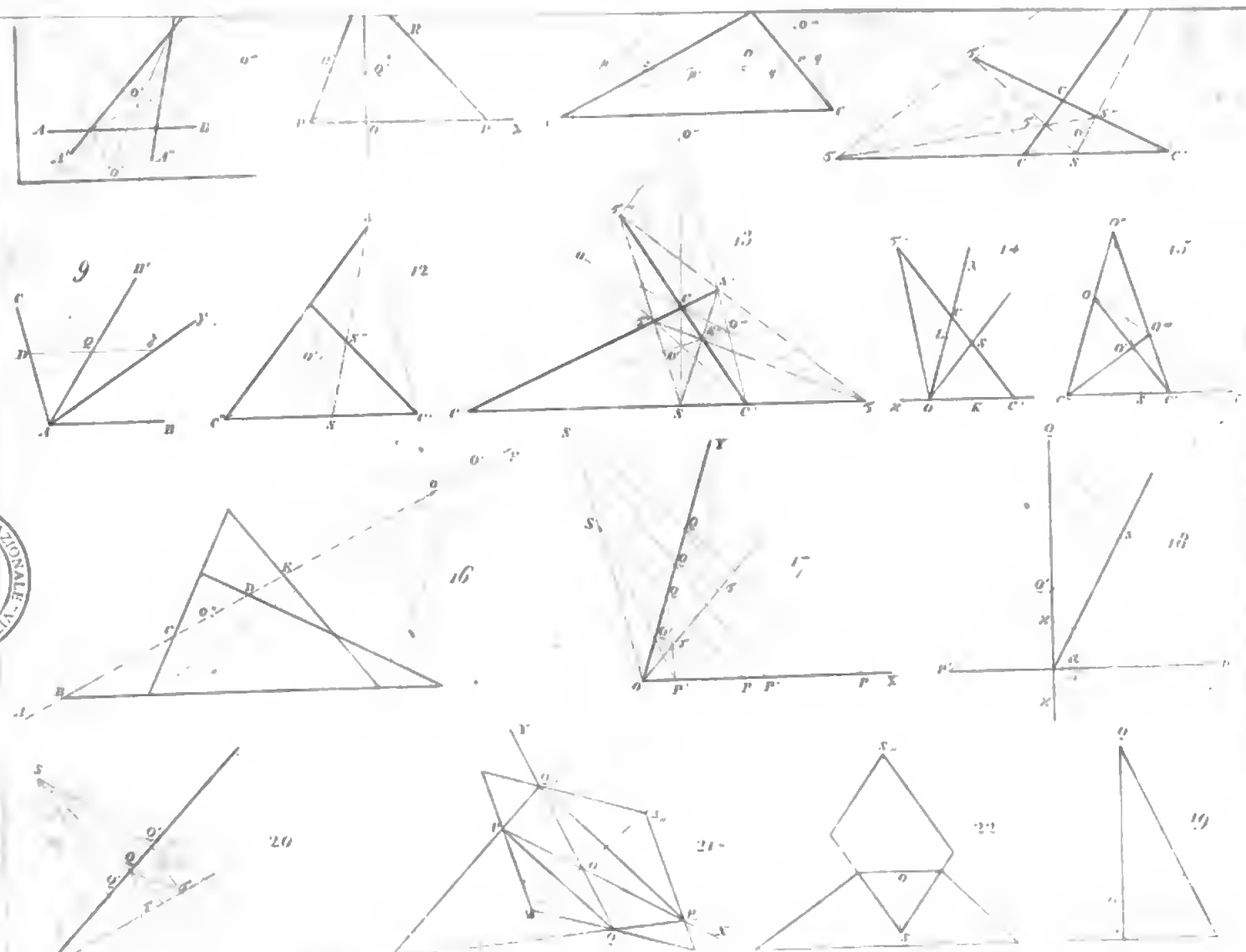
Verbesserungen.

Seite	Zeile	
7	11 v. o.	statt o lies $\frac{1}{0}$.
8	13 v. u.	fehlt ein Accent.
16	14 v. o.	statt $y = \chi x$, $y = \chi' x = -\chi x$, l. $y = \varkappa x$, $y = \varkappa' x = -\varkappa x$.
„	16 „ „	„ $A \pm A' = u$ l. $\varkappa + \varkappa' = o$.
28	17 „ „	„ $+1\mu'$ l. $1+\mu'$.
29	1 v. u.	„ *tang* l. *tang a*.
31	8 v. o.	fehlt ein Accent.
34	2 v. u.	steht der Buchstabe a zuviel.
38	19 v. o.	fehlt ein Accent.
„	28 „ „	steht ein swiefacher Accent statt eines einfachen.
39	10 v. u.	fehlt ein Aceent.
40	18 v. o.	desgleichen.
42	2 „ „	statt BB″ l. BB′.
45	19 „ „	ist ausgelassen: y =.
„	9 v. u.	steht und an der unrichtigen Stelle.
„	5 „ „	statt y l. a.
49	16 „ „	Man streiche die Benennung „Chordalpunct zweier Kreise“, die überflüfsig ist, und zu einem Mifsverständnifs führen könnte.
„	13 „ „	B^2 mufs innerhalb der Klammer stehen.
57	4 „ „	statt β l. β^2.
61	15 „ „	fehlt der Exponent 2.
63	1 „ „	statt Puncte l. Pole.
64	11 v. o.	steht das Wort darstellen einmal zuviel.
75	5 v. u.	fehlt der Theilungsstrich des Bruches.
90	3 „ „	fehlen in dem ersten Theile der Gleichung die beiden Exponenten.
91	3 „ „	st. den l. die.
96	24 v. u.	st. Churdale l. Chordalen.
106	5 „ „	st. ergibt l. ergäbe.
„	5 v. u.	fehlt ein Accent.
109	18 „ „	nach dem Worte berühren ist ausgelassen: bekannt sind.
128	16 „ „	st. Aufforderung l. Umformung.
135	2 „ „	st. (9) l. (7).
136	3 v. o.	st. Asymtoten l. Asymptoten.
„	15 v. u.	müssen die Worte und hiernach swei Zeilen tiefer stehen.
„	10 „ „	st. $1 \pm \beta$ l. $1+\beta$.
141	2 „ „	st. discusion de l'équalion l. discussion de l'équation.
146	22 v. o.	mufs der Nenner des Bruches anm Quadrat erhoben werden.
„	25 „ „	st. 146 l. 246.
156	15 v. u.	st. $\varkappa^2$ l. k^2.
„	11 „ „	st. a^2h l. $\varkappa^2 h$.
159	9 „ „	st. 171 l. 271.
160	18 v. o.	st. Gleienng l. Gleichung.
„	20 „ „	st. pq l. py.
165	16 „ „	st. $(ay'-ay)^2$ l. $(xy'-a'y)^2$.
169	15 „ „	st. abzieht l. abaiehn.
„	21 „ „	st. (m—1)punctig l. mpunctig; st. $(m-1)^2$ l. $m(m-2)$.
„	32 „ „	st. (m—1)punctig l. mpunctig.
„	34 „ „	st. (m—2)punctig l. (m—1)puuctig.
178	15 „ „	steht su Anfang der Gleichung ein x zuviel.
185	16 v. u.	st. Permutationen l. Permutationen.
228	12 „ „	st. hat l. haben.
233	oben	st. dritter l. zweiter.

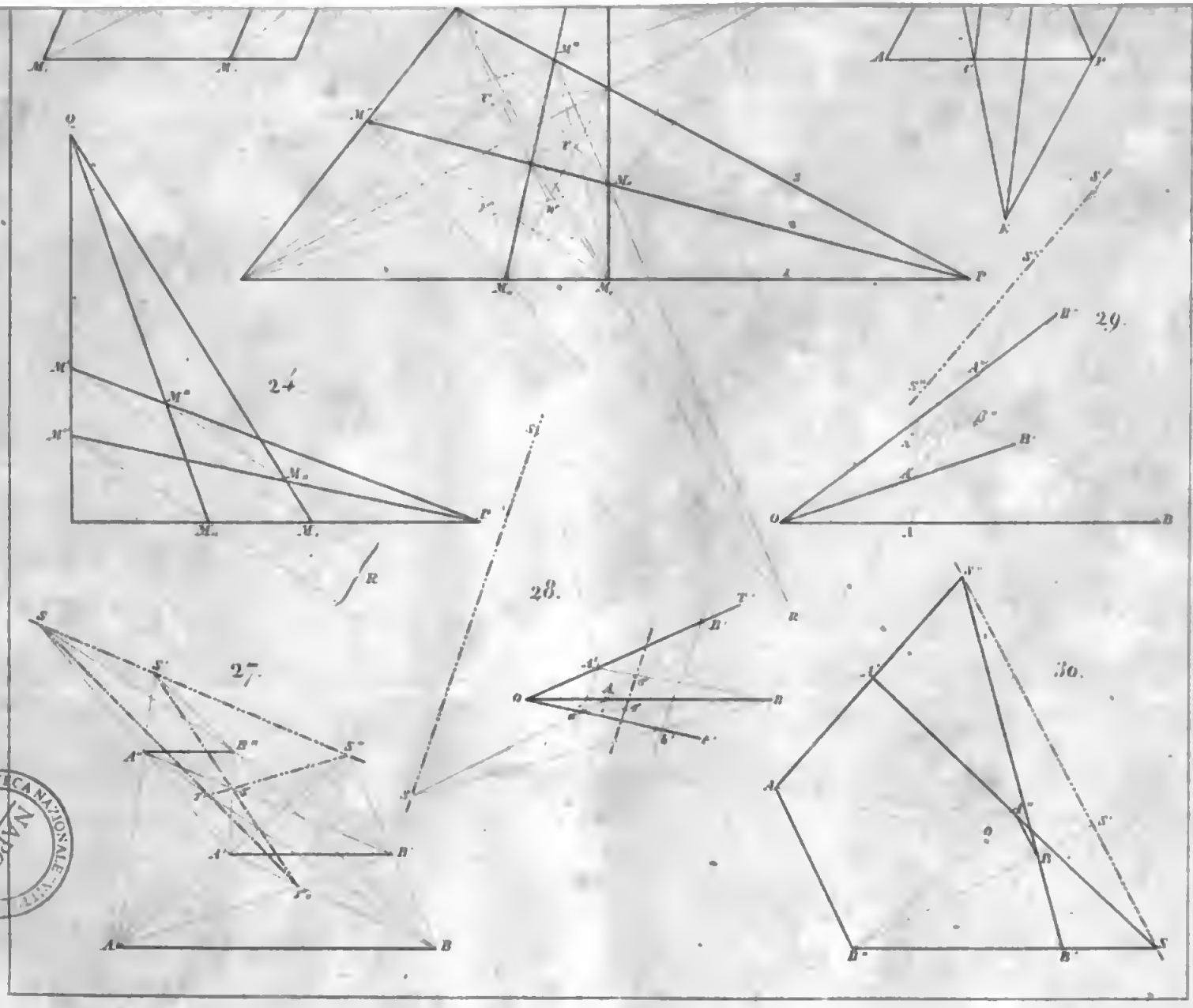
Digitized by Google

ESSEN,
gedruckt bei G. D. Bädeker.

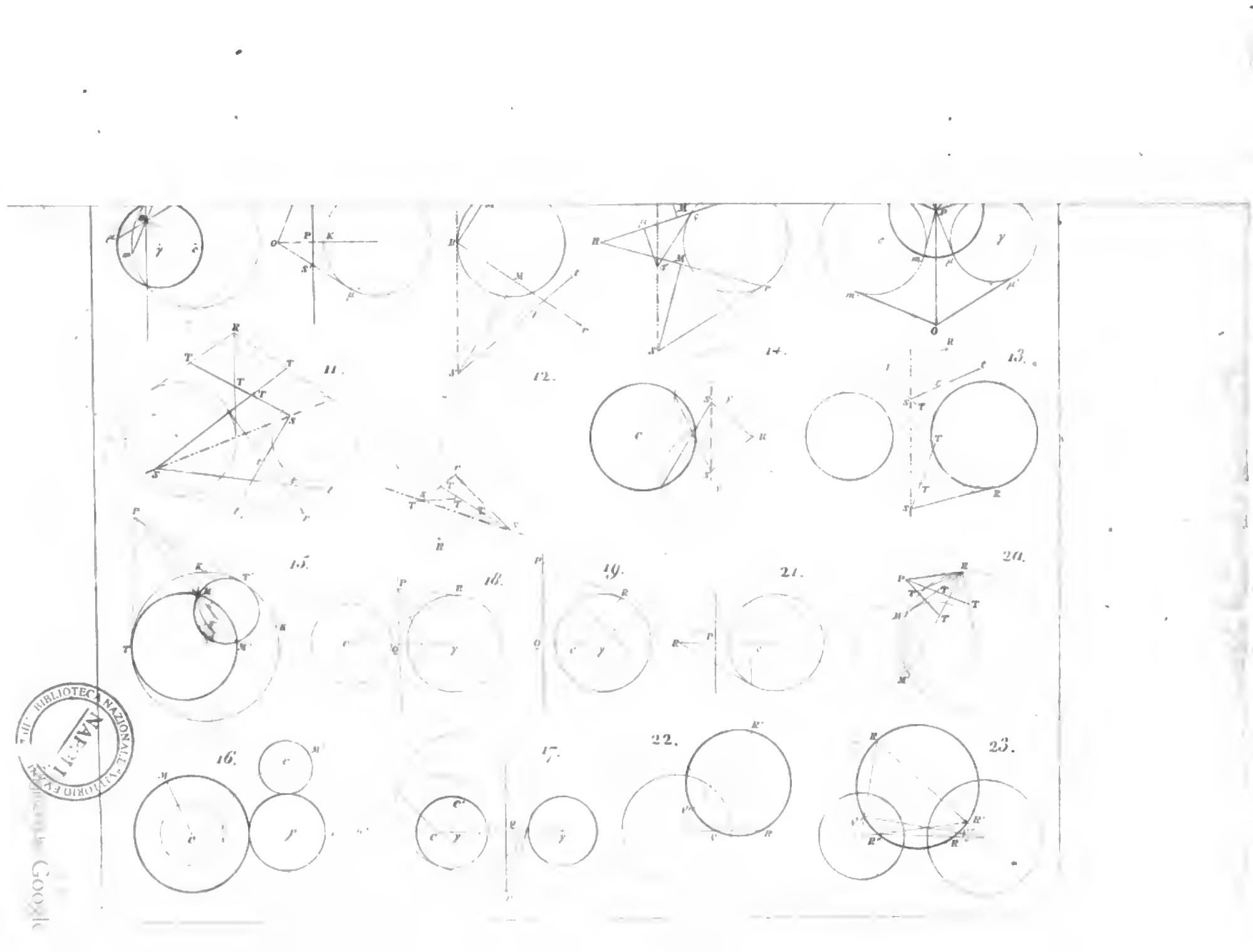
Digitized by Google



BIBLIOTECA NAZIONALE VITTORIO EMANUELE III NAPOLI

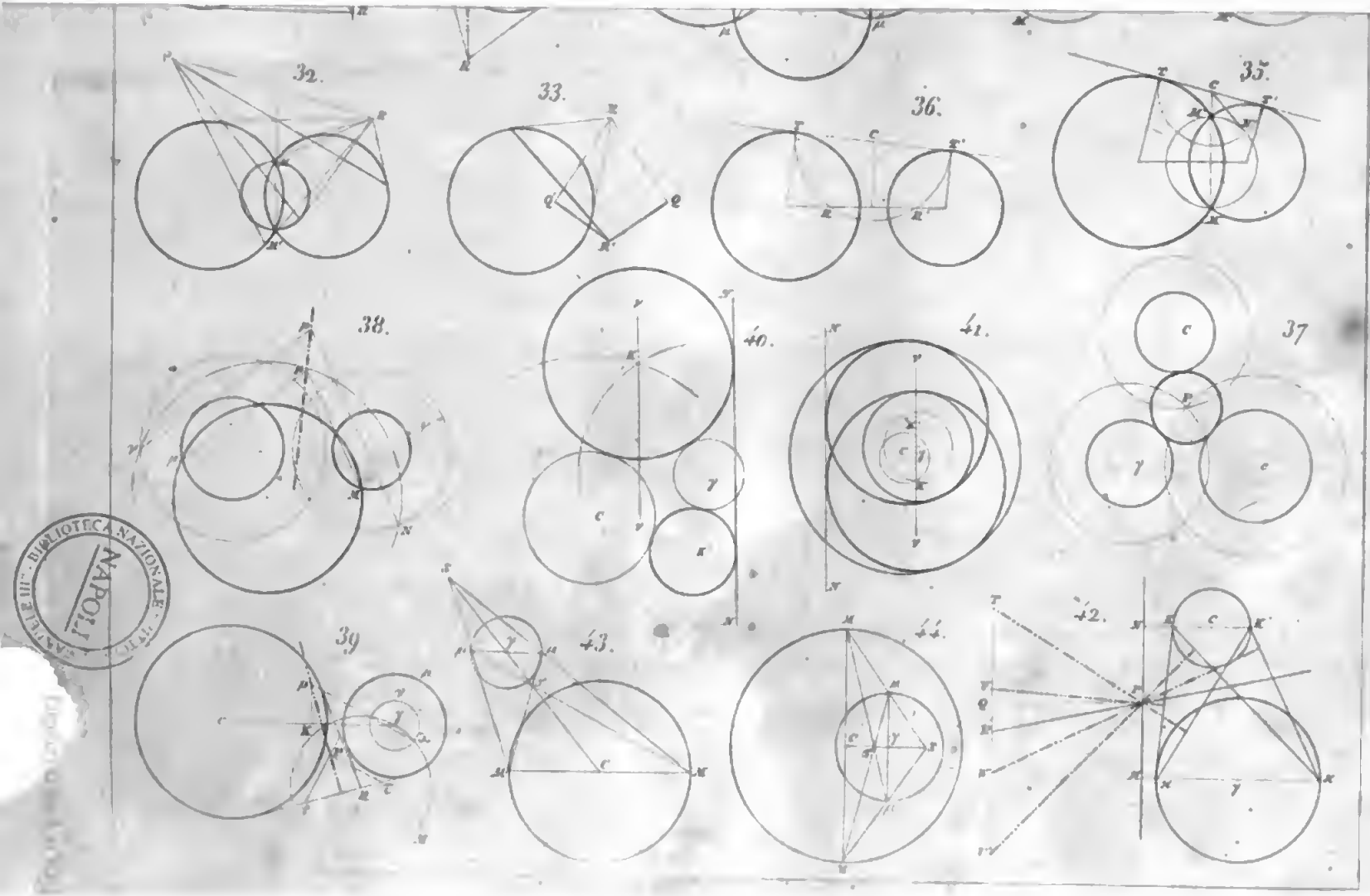


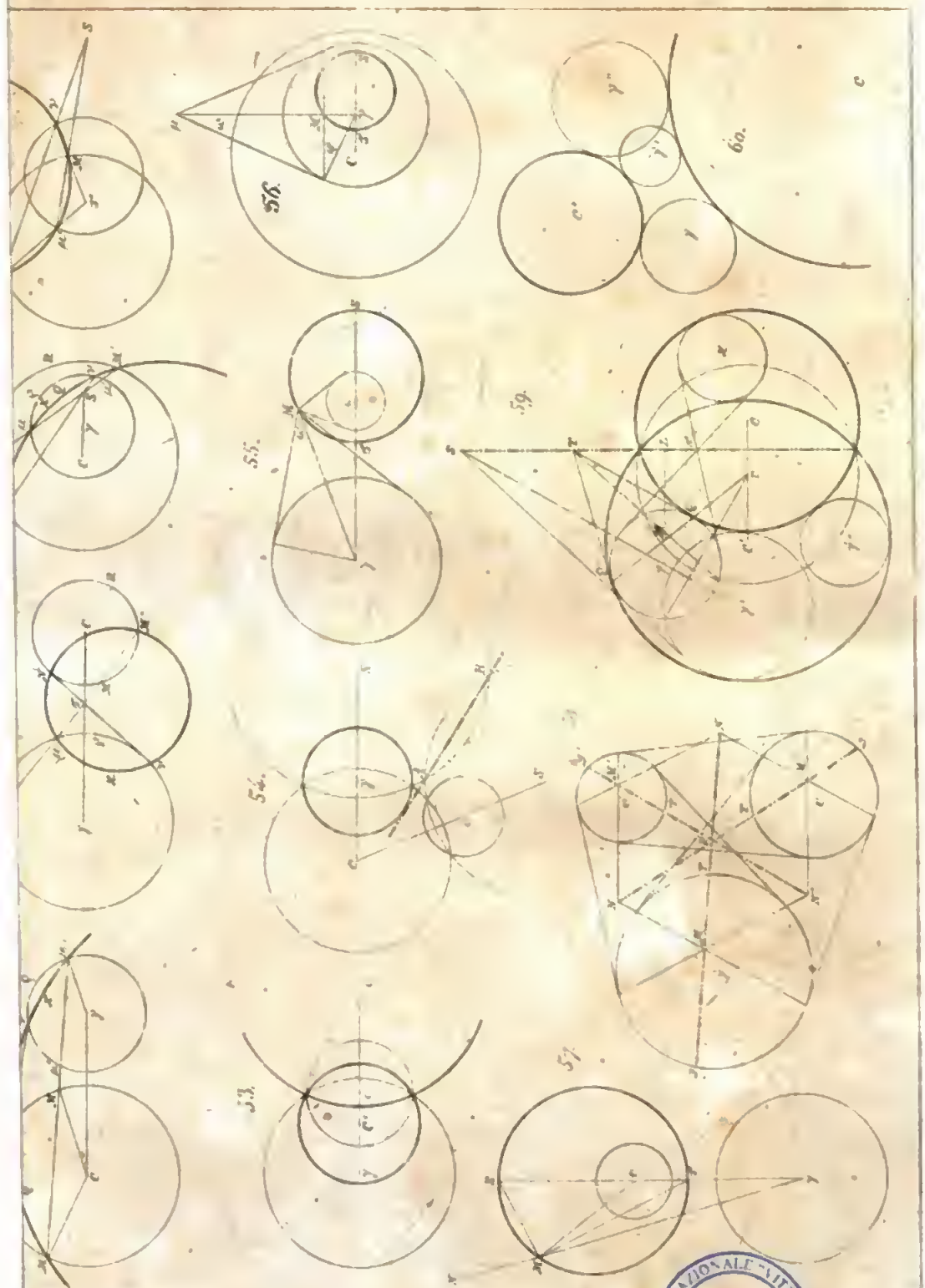
BIBLIOTECA NAZIONALE NAPOLI VITT. EM. III



BIBLIOTECA NAZIONALE VITTORIO EMANUELE
MAP. 31

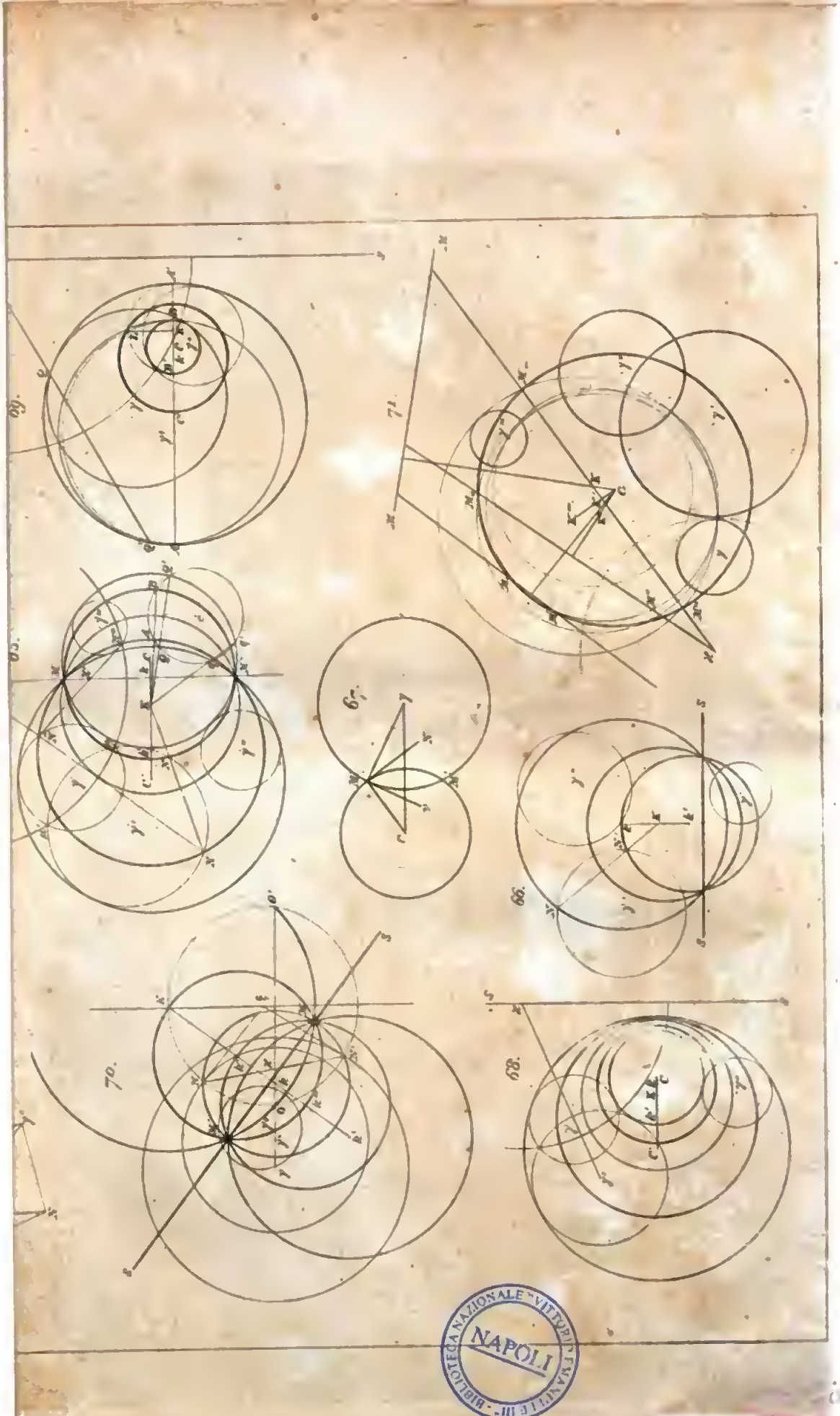
Digitized by Google


32.
33.
36.
35.
38.
40.
41.
37
39
43.
44.
42.

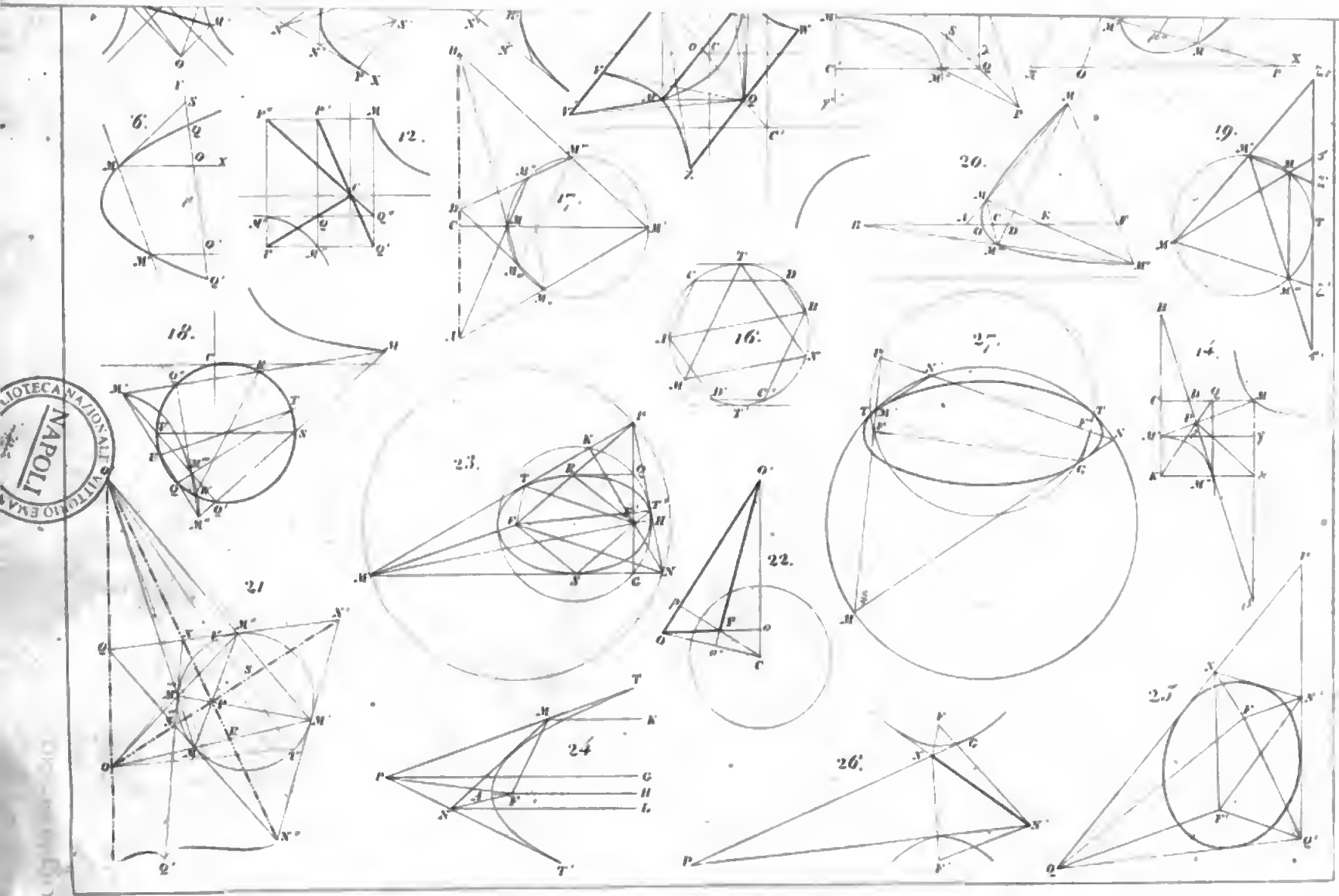


BIBLIOTECA NAZIONALE VITTORIO EMANUELE III NAPOLI

Digitized by Google

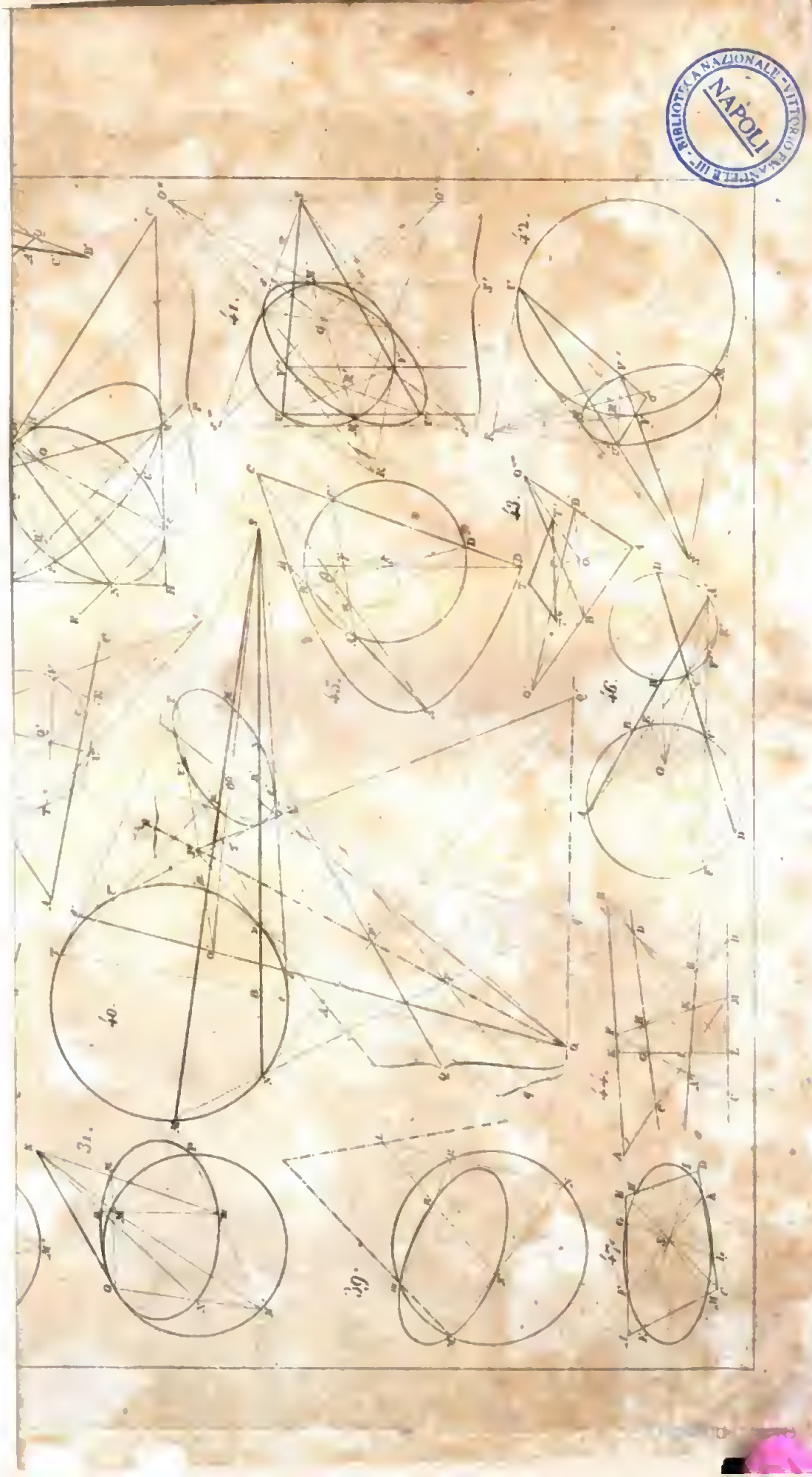


BIBLIOTECA NAZIONALE "VITTORIO EMANUELE III" NAPOLI



BIBLIOTECA NAZIONALE VITTORIO EMANUELE NAPOLI

BIBLIOTECA NAZIONALE VITTORIO EMANUELE III
NAPOLI



G 10472

ANALYTISCH-GEOMETRISCHE

ENTWICKLUNGEN

VON

DR. JUL. PLÜCKER,

AUSSERORDENTLICHEM PROFESSOR IN BONN.

ZWEITER BAND.

MIT ZWEI KUPFERTAFELN.

BIBLIOTECA NAZIONALE NAPOLI

ESSEN,

BEI G. D. BAEDEKER.

1831.

Digitized by Google

Vorrede.

Die Berührungen, in welche meine litterarischen Arbeiten mit den Arbeiten anderer Geometer gekommen sind, veranlassen mich, über die meinigen in einige Erörterungen einzugehen.

Der Keim von allen Entwicklungen, die ich bisher im Gebiete der analytischen Geometrie geliefert habe, ist in den Vorträgen über die sechste Auflage von BIOT, *Essai de Géométrie analytique*, zu suchen, mit welchen ich im Sommer-Semester 1825 meine akademische Laufbahn begann, in den Vorträgen über dasselbe Buch, durch welches ich selbst, einige Jahre früher, in jene Behandlungsweisen der Geometrie, denen man in neuerer Zeit alle die grossartigen Resultate verdankt, eingeführt worden bin.

Als ich damals absichtslos einige Kreise auf das Papier hinzeichnete, kam mir aus dem Anblick der Figur die Vermuthung, dass die drei gemeinschaftlichen Chorden je zweier von drei gegebenen Kreisen in demselben Puncte sich schneiden. Bei der Verification dieses Satzes auf analytischem Wege erwartete ich auf Eliminationen zu stossen, ich suchte Weitläufigkeiten auf und fand keine: ich kam zum Beweise dieses Satzes durch die einfachste Verbindung dreier Symbole (94). In dieser Beweisführung lag zugleich die allgemeine Theorie der gemeinschaftlichen Chorden je zweier beliebiger Kreise, weil die Bedingung, dass solche Kreise sich wirklich schneiden, auf keine

Weise in jener symbolischen Bezeichnung ausgedrückt ist. Nichts war hiernach natürlicher als dieselbe Art der Beweisführung auch auf lineare Gleichungen und die allgemeine Gleichung der Linien zweiter Ordnung auszudehnen und hierbei durch unbestimmte Coefficienten die allgemeine Verbindung solcher Gleichungen auszudrücken. Hier traten mir sogleich die allgemeinen Schemata der 383. und der 384. Nummer entgegen, und vor allem Uebrigen nahm der Satz, dass die Gleichungen irgend zweier Linien zweiter Ordnung, gleichviel ob dieselben sich schneiden oder nicht, sich immer wenigstens zu einer Gleichung eines Systemes von zwei reellen geraden Linien verbinden lassen, meine Aufmerksamkeit in Anspruch, und war sehr geeignet, mir fühlbar zu machen, wie Symmetrie und Einfachheit der Darstellung nur in der Allgemeinheit zu suchen ist.

Aus diesen Ideen ist der erste Band der „Entwicklungen" hervorgegangen: bei der Ausarbeitung desselben war mein Grundsatz, alle Elimination zu verbannen, wenigstens da, wo es sich nicht um absolute Grössen-Bestimmung handle.

Um mich in dem Gebiete der Geometrie, das ich einer neuen Behandlungsweise zu unterwerfen versuchen wollte, zu orientiren und geometrische Resultate zu sammeln, durchlief ich GERGONNE's Annalen. Hier muss ich zuerst der Behandlung des APOLLONischen Problems der Tactionen durch den Herausgeber erwähnen, wobei die elegante Construction linearer Gleichungen denselben zu einer Auflösung geführt hat, die alle frühern Auflösungen, welche die Proportionen-Geometrie geliefert hatte, in den Hintergrund zurückdrängte. Diese Art zusammengesetztere lineare Gleichungen zu construiren, schloss sich genau an meine Ansichten an; das fruchtbare Schema der 391. Nummer ist eine blosse Ausdehnung derselben. Aber es steht dieselbe vereinzelt da, sie setzt Vorbereitungen und Eliminationen voraus, die künstlich angelegt werden müssen und ihre Anwendbarkeit beschränkt sich auch dann noch auf wenige Fälle. Die Aufgabe war, eine allgemeine Methode auf das zu Grunde liegende Princip aufzubauen, wodurch zugleich alsdann alle Elimination ausfallen musste. Dann muss ich ferner der von H. PONCELET vorläufig ohne Beweis mitgetheilten Construction einer geometrischen Aufgabe (I, 354) Erwähnung thun, welche mich, indem ich den Beweis derselben suchte, zu der Theorie der Osculation führte, wie sie im 8. Paragraphen des zweiten Abschnittes des ersten Bandes entwickelt ist. Wohl nichts begünstigt mehr das Auffinden neuer Methoden, als der Versuch, geometrische Sätze,

Digitized by Google

die in der Aussage einfach und symmetrisch sind, analytisch zu beweisen. In dieser Hinsicht habe ich viel dadurch entbehrt, dass der *Traité des propriétés projectives* des H. PONCELET mir bei der Ausarbeitung des ersten Bandes fremd blieb und die originellen Leistungen des H. STEINER in demselben Gebiete erst erschienen, als jener Band unter der Presse war. —

Ein zweiter Gegenstand fesselte ebenfalls meine Aufmerksamkeit schon im Sommer 1825. Es waren die im Detail behandelten Beweisführungen in der 120. — 121., 160., 211. und 237. Nummer der oben genannten Schrift. Sie waren mir bisher unbekannt geblieben, weil sie sich in den frühern Ausgaben noch nicht finden; sie überraschten mich damals durch ihre Neuheit und kamen mir am Ende doch immer nur in BIOT's vortrefflichem Handbuche als ein Gewächs auf fremdem Boden vor. Ich fasste den allgemeinen Gedanken, dass überhaupt, wo eine mathematische Entwicklungsweise sich als Kunstgriff darstelle, diess nur deshalb geschehe, weil man dieselbe noch nicht zur Methode erhoben und als solche eingeführt habe. Aber ich war in der Ausführung dieses Gedankens anfangs weniger glücklich als in der Ausführung des früher erwähnten. Der erste Band enthält in dieser Beziehung nichts von Bedeutung, dagegen aber ist der ganze vorliegende zweite Band eine Frucht des sich erst nach längerer Zeit entfaltenden Gedankens.

In der 271. Nummer des ersten Bandes habe ich diejenige Bedingungs-Gleichung entwickelt, welche ausdrückt, dass eine gegebene gerade Linie von einem Kegelschnitte berührt wird. Nachdem dieser Band bereits erschienen war, veranlasste mich eine geometrische Aufgabe, von den Coefficienten in dieser Bedingungs-Gleichung zu den Coefficienten in der Gleichung des Kegelschnittes zurückzugehen. Ich fand eine vollständig reciproke Beziehung dieser Coefficienten zu einander (II, 552), und das Princip der Reciprocität *),

*) Ich habe den Ausdruck „Princip der Reciprocität" als eine freie Uebersetzung der PONCELET-schen „*théorie des polaires réciproques*" eingeführt. H. GERGONNE bedient sich des Wortes „*principe de dualité*", und lässt in dieser Benennung durchblicken, dass er die Beziehungen der durch dieses Princip mit einander verbundenen Sätze zu einander als eine absolute Eigenschaft (*propriété générale de l'étendue*) ansieht. Man wird natürlich zu dieser Ansicht hingezogen, wenn man zwei zusammengehörige Sätze über gerade Linien betrachtet, von denen einer aus dem andern nach jenem Princip sich ergibt, wenn man einen Kegelschnitt zu Hülfe nimmt und, in Beziehung auf diesen Kegelschnitt, Constructionen sich ausgeführt denken muss, die von einer höhern Ordnung sind, als die in jenen Sätzen angezeigten. Dieser Uebelstand verschwindet zwar in der rein analytischen Theorie; aber ungeachtet dessen kann ich mich nicht zu der Ansicht einer absoluten Dualität bekennen, weil dieselbe bloss in den von Grössen-Vergleichungen ganz unabhängigen Sätzen, bei denen H. GERGONNE ausschliesslich verweilt, sich bewährt. Indem wir Hülfs-Gleichungen von bestimmter Form, die auch von höhern Graden sein können, zu Grunde legen, verknüpft das Princip der Reciprocität

in so weit sich dasselbe auf Curven zweiter Ordnung bezieht, stand in seiner ganzen Wichtigkeit vor mir, sobald ich nur die beiden Constanten der gegebenen geraden Linie als Punct-Coordinaten und veränderlich betrachtete. Diess letztere hatte ich bereits schon gethan, weil mir jener frühere Gedanken immer vorschwebte, nur hatte ich statt der Constanten b und a zuvor die Constanten q und p eingeführt (I., 272—274). Ich that diess, wie man sogleich einsieht, weil die beiden Constanten b und a nicht homogen sind; aber weil ich dieses that, wurde ich damals von jenem Principe abwärts geführt und ein zufälliger Umstand musste mich erst wieder auf dasselbe zurück bringen.

Nachdem ich zu dem Principe der Reciprocität, in Beziehung auf Kegelschnitte, gekommen war, war es natürlich, dieselbe Verfahrungsweise auch auf Curven einer beliebigen Ordnung auszudehnen und dann insbesondere auch von Linien der zweiten zu Linien der ersten Ordnung zurückzugehen. Hier ergab sich die Definition des Poles einer geraden Linie, als derjenige Punct, dessen Coordinaten zwei auf lineare Weise in der Gleichung derselben vorkommende Constante sind, woraus wiederum eine anders sich gestaltende Theorie des Principes der Reciprocität hervorging. Dann war es endlich natürlich, der Gleichung der geraden Linie irgend eine beliebige Gleichung zwischen zwei veränderlichen und beliebigen constanten Grössen, von welchen letztern zwei auf lineare Weise vorkommen, zu substituiren, wie diess im zweiten Paragraphen der zweiten Abtheilung des vorliegenden Bandes geschehen ist.

Ich war in eine Zwistigkeit zwischen den HH. PONCELET und GERGONNE über die erste Entdeckung des Principes der Reciprocität zufällig verflochten worden. Die Veranlassung dazu war, dass ein von mir eingesandter Aufsatz in den Annalen *(1826 Août et Septembre)* abgedruckt wurde, nachdem er zuvor getheilt und in eine so ganz verschiedene Form gegossen worden war, dass ich den ersten Theil desselben später nur wiedererkannte, weil mein Name an der Spitze desselben stand. Aus einer Reclamation des H. PONCELET, die mir durch die Güte des H. v. MUENCHOW, eben weil sie auch mich

---

mannigfaltige geometrische Sätze nach allen Seiten hin unter einander (721). Jeder Gedanke überhaupt, der nicht aus der Natur der Sache unmittelbar entspringt, sondern aus einer metaphysischen Abstraction übertragen wird, übt so leicht eine dictatorische Herrschaft über uns aus und führt dann seine Strafe immer mit sich, indem er dem unbefangenen Gedankengange Fesseln anlegt.

betraf, mitgetheilt wurde, erfuhr ich zuerst, worin jenes Princip, wie es bisher aufgestellt worden war, bestehe. Ich antwortete, um einige Thatsachen zu berichtigen, im Juli 1828 *) und zeigte bei dieser Gelegenheit an, dass ich mich bewogen fände, einen Aufsatz an den Redacteur der Annalen einzuschicken, aus welchem vielleicht hervorgehen würde, dass auch ich, nachdem schon die H. PONCELET und GERGONNE ihre Theorie der Reciprocität aufgestellt hatten, auf rein analytischem Wege, unabhängig hiervon, zu einem solchen Principe gelangt sei. Dieser Aufsatz, der aus den oben gemachten Bemerkungen hervorgegangen, wurde wenige Tage nachher abgesandt, ist aber, so viel ich weiss, unabgedruckt und unerwähnt geblieben. Die von mir dargelegte analytische Theorie zeigte die Reciprocität bereits unter einem viel allgemeinern Gesichtspuncte. Nachdem ich die geometrische Theorie kennen gelernt hatte, gab ich, dadurch veranlasst, der meinigen eine noch allgemeinere Form, indem ich den Pol nicht durch die Constanten der Hülfs-Gleichung selbst, sondern durch lineare Functionen dieser Constanten bestimmte. So entwickelt findet sie sich in dem 3. Paragraphen der 2. Abtheilung des II. Bandes.

Erst Ende August 1829 that ich einen neuen Schritt, bei der Gelegenheit, dass ich eine öffentliche Rede ausarbeiten musste und zu diesem Ende die neuesten geometrischen Forschungen übersichtlich zusammenstellte. Ich hatte den Gedanken, die Constanten in der Gleichung einer geraden Linie als die Coordinaten dieser Linie zu betrachten, und demnach durch eine Gleichung zwischen solchen Coordinaten eine Curve darzustellen, welche von geraden Linien, die nach einem bestimmten Gesetze auf einander folgen, umhüllt wird. Dieser Gedanke lag für mich um so näher, da ich mir bereits schon allgemeinere Begriffe über Coordinaten-Systeme gebildet und auch bereits schon im 5. Bande des Journals für Mathematik einen Aufsatz über ein neues Coordinaten-System geliefert hatte. Die erste Entwicklung des neuen Gedankens enthält eine Abhandlung, deren erste Hälfte schon Anfangs September und deren zweite Hälfte bald nachher an H. CRELLE abging. Sie wurde einige Zeit später im 2. Hefte des 6. Bandes des Journals abgedruckt. Erst nach dem Abgange der zweiten Hälfte entschloss ich mich, zugleich durch eine äussere Veranlassung bewogen, den vorliegenden zweiten Band der Entwicklungen auszuarbeiten und ihn ganz den neuen Untersuchungen zu

*) *Bulletin des sciences mathématiques, astronomiques, physiques et chimiques. T. IX. p. 330.*

widmen. Der Druck begann bald nachher und die ersten dreissig Bogen waren fertig, ehe noch ein Jahr nach der ersten Auffassung der Idee, deren Entwicklung sie sind, verflossen war. Jene früher erschienene Abhandlung ist nur als eine unvollkommene Vorarbeit hierzu zu betrachten, aber auch als solche wollte der nachsichtsvolle Herausgeber dieselbe erscheinen lassen, obgleich ich meinerseits den Wunsch äusserte, sie zu unterdrücken.

Die Entwicklungen der ersten Abtheilung des vorliegenden zweiten Bandes und die Entwicklungen des ersten Bandes gehen mit einander parallel; dort und hier habe ich in der Behandlungsweise gleiche Grundsätze zur Anwendung gebracht. Die zweite Abtheilung des zweiten Bandes enthält das Princip der Reciprocität, welches die beiden ersten Theile meiner Arbeit zu einem Ganzen vereinigt; und somit sei es mir erlaubt, diese Arbeit als geschlossen anzusehen. Ein eigentlich systematisches Ganzes aufzustellen, ist vielleicht noch zu früh, weil die Neuheit der Methoden noch zu gross, die Menge der Resultate, die uns entgegentreten, unüberschbar ist. Namentlich ist jenes Princip der Reciprocität, welches die scheinbar fremdartigsten geometrischen Sätze nach allen Seiten hin mit einander verknüpft, und uns aus der Art dieser Verknüpfung, indem wir von bekannten Sätzen ausgehen, nach Lust und Liebe gleichsam, neue finden lehrt (721, 722), eine solche Erscheinung in dem Gebiete der Geometrie, welche eine neue Methode derselben zu fordern scheint. *) Hierbei treten uns indess mehrere Bemerkungen entgegen. Jedem Beweise, der sich durch die Verbindung allgemeiner Symbole ausführen lässt, entsprechen, wenn wir diese Symbole einmal auf Punct-Coordinaten, das andere Mal auf Linien-Coordinaten beziehen, zwei solche Sätze, die durch das Princip der Reciprocität mit einander verbunden sind. Wir können hier also entweder dieses Princip oder die Betrachtung eines von jenen beiden Coordinaten-Systemen entbehren. Wo aber ein Satz durch eine specielle Anwendung von Punct-Coordinaten bewiesen wird, da nimmt dieser

*) Auf ähnliche Weise äussert sich H. Gergonne bei Gelegenheit des Principes der Reciprocität:

Mais il s'agit ici, suivant nous, de bien autre chose; il ne s'agit pas moins que de commencer, pour la géométrie, mal connue depuis près de deux mille ans qu'on s'en occupe, une ère tout-à-fait nouvelle; il s'agit d'en mettre tous les anciens traités à peu près au rebut, de leur substituer des traités d'une forme tout-à-fait différente, des traités vraiment philosophiques qui nous montrent enfin cette étendue, réceptacle universelle de tout ce qui existe, sous sa véritable physionomie, que la mauvaise méthode d'enseignement adoptée jusqu'à ce jour ne nous avoit pas permis de remarquer; il s'agit, en un mot, d'opérer dans la science une revolution aussi impérieusement necessaire qu'elle a été jusqu'ici peu prévue. (*Ann. Tome XVII. p. 273*).

Inhaltsanzeige.

Seite

Erste Abtheilung. Ueber eine neue Art, Curven durch Gleichungen darzustellen. . . 1

Erster Abschnitt. Zur Theorie des Punctes, als geometrischen Ortes erster Classe. . 4

Zweiter Abschnitt. Zur Theorie der Oerter zweiter Classe. 47

§ 1. Verlegung des Anfangspunctes der Coordinaten. Discussion aller einzelnen Fälle, welche die allgemeine Gleichung umfasst. Brennpuncte. 48

§ 2. Veränderung der Richtung der Coordinaten-Axen. Bestimmung der Grösse und Richtung zugeordneter Durchmesser. 71

§ 3. Allgemeinere Coordinaten-Bestimmung. Zweite Discussion aller einzelnen Fälle, welche die allgemeine Gleichung umfasst. 86

§ 5. Geometrische Bedeutung der Constanten in der allgemeinen Gleichung der Oerter zweiter Classe. 96

§ 4. Neue Tangenten-Theorie. 113

§ 6. Zusammenstellung von Oertern zweiter Classe mit gemeinschaftlichem Brennpuncte. 125

§ 7. Theorie der Osculation. Osculation hyperbolischer und parabolischer Zweige in unendlicher Entfernung. 141

§ 8. Verbindung der Gleichungen irgend zweier Oerter zweiter Classe zu der Gleichung eines Systems von zwei Puncten. 167

§ 9. Verbindung der Gleichungen zweier Oerter zweiter Classe zu der Gleichung irgend eines neuen Ortes derselben Classe. Theorie der Transversalen. 183

§ 10. Construction verschiedener Aufgaben. 206

§ 11. Allgemeine Schemata. 226

Zweite Abtheilung. Das Princip der Reciprocität. 242

§ 1. Ueber das Cramersche Paradox. 242

§ 2. Eine Gruppe von einigen allgemeinen analytisch-geometrischen Sätzen. . . . 251

§ 3. Das Princip der Reciprocität. 259

§ 4. Neue allgemeine Theorie der Curven. 284

Digitized by Google

BIBLIOTECA NAZIONALE NAPOLI

Erste Abtheilung.

Ueber eine neue Art, Curven durch Gleichungen darzustellen.

399. Man denkt sich, indem man eine ebene Curve, wie gewöhnlich, durch eine Gleichung zwischen zwei veränderlichen Grössen, welche, wenn man ihnen bestimmte Werthe beilegt, die Coordinaten eines bestimmten Punctes bedeuten, darstellt, diese Curve als aus einer unendlichen Anzahl stetig auf einander folgender Puncte bestehend, oder, wenn man lieber will, als durch die Bewegung eines Punctes beschrieben. Man kann aber auch durch nicht minder einfache und bequeme Gleichungen zwischen veränderlichen Grössen, durch welche, wenn man ihnen bestimmte Werthe beilegt, eine bestimmte gerade Linie gegeben ist, unendlich viele gerade Linien darstellen, die nach einem Gesetze stetig auf einander folgen, und also eine bestimmte Curve umhüllen.

Eine Curve wird auf diese neue Art eben so vollständig durch eine Gleichung dargestellt, als nach der gewöhnlichen Methode: denn, dort wie hier, lassen sich alle Eigenschaften derselben aus ihrer Gleichung vollständig ableiten. Man durchsieht leicht, wie in der Geometrie der Curven die Beweismittel auf diese Weise sich verdoppeln; wie jeder allgemeinen analytischen Entwicklung, die bisher gemacht worden ist, indem man die gebräuchlichen Gleichungen zu Grunde gelegt, eine andere entspricht, die auf den neuen Gleichungen beruht. Sobald nur der oben ausgesprochene Grundgedanke allgemein und klar aufgefasst worden ist, ist auch schon für die Ausführung desselben der Weg gewiesen. Auf diese Weise sind die folgenden Untersuchungen entstanden, die sich denen des ersten Bandes der vorliegenden Schrift enge anschliessen. Die neue Behandlungsweise wird uns zu manchen neuen Sätzen führen und andere Sätze, die auf indirectem Wege, bisweilen nicht ohne Anstrengung, in dem Frühern bereits schon bewiesen sind, werden wir unmittelbar in einer ganz einfachen Verbindung der neuen Gleichungen lesen und so denselben, oft ganz unvermuthet, begegnen. Hierdurch wird eine

Lücke, die mir bei Ausarbeitung jenes ersten Bandes meiner „Entwicklungen“ fühlbar geworden ist, ausgefüllt, und die allgemeine analytische Methode, deren ich mich bedient habe, scheint mir nun innerhalb der vorgesteckten Gränzen vollständig und gerundet. —

400. Die allgemeine Form der Gleichung einer geraden Linie, bezogen auf zwei, sich unter einem beliebigen Winkel schneidenden, Coordinaten-Axen ist folgende:

$$Ay+Bx+C = o, \qquad (1)$$

indem wir durch y und x Coordinaten und durch A, B und C drei Constante bezeichnen. Wenn wir diesen Constanten nach und nach verschiedene Werthe beilegen, so können wir alle möglichen geraden Linien durch die vorstehende Gleichung darstellen. Diese Gleichung stellt auch dann noch unendlich viele verschiedene gerade Linien dar, die aber, wie wir gleich sehen werden, durch denselben Punct gehen, wenn zwischen den obigen drei Constanten, die wir übrigens als ganz beliebig betrachten, eine Gleichung von folgender Form besteht:

$$aA+bB+cC = o,$$

in der a, b und c irgend drei neue Constante bezeichnen. Wenn wir also A, B und C als veränderliche Grössen betrachten, und, dem entsprechend, an die Stelle derselben u, v und w schreiben, so können wir sagen, es stelle die Gleichung:

$$au+bv+cw = o, \qquad (2)$$

einen Punct dar. Je drei Werthen von u, v und w, welche die letzte Gleichung befriedigen, entspricht eine gerade Linie und jede solche gerade Linie geht durch den in Rede stehenden Punct. Wir betrachten also hier den Punct, als einen geometrischen Ort, in dem unendlich viele gerade Linien sich schneiden, während man, indem man von der gewöhnlichen Gleichung einer geraden Linie ausgeht, diese als einen geometrischen Ort für unendlich viele Puncte betrachtet.

Wir können eine der drei veränderlichen Grössen u, v und w ein für alle Mal beliebig annehmen, und, der Kürze halber, auch gleich Eins setzen. Alsdann erhalten wir aus (2) folgende Gleichungen:

$$a +bv+cw = o,$$
$$au+ b+cw = o,$$
$$au+bv+c = o,$$

die eben so allgemein, aber weniger symmetrisch sind.

401. Statt der Gleichung (2) sei irgend eine beliebige in Beziehung auf u, v und w homogene Gleichung, die wir durch:

$$F(u, v, w) = o, \qquad (3)$$

bezeichnen wollen, gegeben. Alsdann entspricht je drei Werthen von u, v und w, die diese Gleichung befriedigen, eine bestimmte gerade Linie. Solcher Linien erhalten wir unendlich viele, die unmittelbar auf einander folgen und also eine stetige Curve umhüllen. Wir sagen, diese Curve werde dargestellt durch die gegebene Gleichung (3). Wir sagen ferner die Curve sei von der zweiten, dritten .. Classe *), wenn

*) Ich gebrauche hier das Wort Classe nach H. GERGONNE, der, dem analog, wie man eine Curve, die von einer geraden Linie in m Puncten geschnitten wird, eine Linie m. Ordnung (mir scheint es passender hier das Wort Ordnung statt des Wortes Grad zu gebrauchen, weil auch die Classe einer Curve durch den Grad ihrer Gleichung bestimmt

ihre Gleichung (3) vom zweiten, dritten ... Grade ist; so wie man sagt, die Curve sei von der zweiten, dritten .. Ordnung, wenn die gewöhnliche Gleichung derselben zwischen y und x vom zweiten, dritten .., Grade ist. Der Analogie nach nennen wir den Punct einen geometrischen Ort erster Classe. Die Oerter zweiter Classe werden durch folgende allgemeine Gleichung dargestellt:

$$au^2+buv+cv^2+duw+evw+fw^2 = o,$$

in welcher a, b, c, d, e und f Constante bezeichnen, und enthalten alle Curven zweiter Ordnung. Die Curven der dritten oder einer höhern Classe sind, im Allgemeinen, nicht Curven der dritten oder derselben höhern Ordnung.

---

wird) nennt, einer solchen Curve, an die sich, von einem gegebenen Puncte aus, m Tangenten legen lassen den Namen einer Linie m. Classe gibt.

Digitized by Google

Erster Abschnitt.

Zur Theorie des Punctes, als geometrischen Ortes erster Classe.

402. Indem MONGE die Gleichung der geraden Linie in die analytische Geometrie einführte, und dadurch den Grund zur Verbannung aller Construction aus derselben legte, gab er ihr jene neue Form, durch welche ihre weitere Ausbildung möglich wurde. Diejenige Rolle, welche in den bisherigen Entwicklungen die Gleichung der geraden Linie spielt, spielt in den neuen Entwicklungen die Gleichung des Punctes. Mit dieser wollen wir uns also zunächst beschäftigen.

Fig. 1. Wenn die Gleichung:

$$Ay+Bx+C = o,$$

die eine gegebene gerade Linie, MN, darstellen soll, auf zwei sich unter beliebigen Winkeln schneidende Coordinaten-Axen OY und OX bezogen wird, so hat man bekanntlich:

$$\frac{C}{A} = -OQ,$$

$$\frac{C}{B} = -OP,$$

Indem wir nun A, B und C als veränderliche Grössen betrachten, erhalten wir am leichtesten diejenige gerade Linie, welche irgend dreien besondern Werthen u', v' und w' jener Veränderlichen entspricht, indem wir, vom Anfangspuncte der Coordinaten an, auf der ersten Axe den Werth von $\left(-\frac{w'}{v'}\right)$, auf der zweiten Axe den Werth von $\left(-\frac{w'}{v'}\right)$ auftragen, und dadurch diejenigen beiden Puncte auf den beiden Axen bestimmen, durch welche jene gerade Linie geht.

403. Die Gleichung:

$$au+bv+cw = o, \qquad (1)$$

welche in Beziehung auf die drei veränderlichen Grössen u, v und w homogen und vom ersten Grade ist, können wir auch, wenn wir eine beliebige jener Grössen constant nehmen, als die allgemeine Gleichung des ersten Grades zwischen den

Digitized by Google

beiden übrigbleibenden veränderlichen Grössen ansehen. Wir haben, indem wir die Form der Gleichung (1) beibehalten, den Vortheil, dass wir, nach unsern jedesmaligen Absichten, sogleich jede beliebige der drei Veränderlichen constant setzen können.

Wir können auch die Gleichung (1) als die allgemeine Gleichung des ersten Grades zwischen den Quotienten einer beliebigen der drei Veränderlichen in die beiden übrigen ansehen.

404. Wir wollen zunächst die einfachern Formen der allgemeinen Gleichung (1) näher betrachten. Wenn wir annehmen, dass die beiden Constanten a und b Null sind, so kommt:

$$w = 0 \qquad (2)$$

Diese Gleichung enthält gar keine Bestimmung über die beiden Veränderlichen u und v, und verlangt bloss, dass, für jede beliebige Annahme derselben, w verschwinde. Alle bezüglichen geraden Linien gehen mithin durch den Anfangspunct der Coordinaten: dieser Punct wird durch die Gleichung (2) dargestellt.

Wenn wir nur die eine jener beiden Constanten, b, in der allgemeinen Gleichung gleich Null nehmen, so kommt:

$$au + cw = 0. \qquad (3)$$

Es ist also in diesem Falle $\left(-\frac{w}{u}\right)$ constant, und zwar gleich $\frac{a}{c}$, während v und mithin auch $\left(-\frac{w}{v}\right)$ einen durchaus beliebigen Werth behält. Die bezüglichen geraden Linien schneiden also (402) die erste Axe in irgend einem beliebigen Puncte, gehen aber alle durch denjenigen festen Punct der zweiten Axe, dessen Ordinate $\frac{a}{c}$ ist: dieser Punct wird durch die Gleichung (3) dargestellt.

Ebenso stellt die Gleichung:

$$bv + cw = 0,$$

denjenigen Punct der ersten Axe dar, dessen Abscisse gleich ist: $\frac{b}{c}$.

Die Gleichung:

$$v = 0,$$

die keine Bestimmung über u und w enthält, entspricht solchen geraden Linien, die in einen beliebigen Punct der zweiten Axe einschneiden, aber alle der ersten Axe parallel sind. Sie stellt daher einen Punct dar, der in unendlicher Entfernung auf der ersten Axe, oder, was dasselbe heisst, auf irgend einer ihr parallelen geraden Linie liegt.

Auf ähnliche Weise stellt die Gleichung:

$$u = 0,$$

einen auf der zweiten Axe unendlich weit entfernt liegenden Punct dar.

Die folgende Gleichung endlich:

$$au + bv = 0$$

entspricht nur solchen geraden Linien, die unter sich parallel sind. Es stellt also diese Gleichung einen Punct dar, der unendlich weit entfernt liegt, aber nicht mehr, wie in den beiden vorigen Fällen, auf einer der beiden Axen, sondern, wovon man sogleich sich

überzeugt, auf einer beliebigen geraden Linie, die mit der, durch folgende Gleichung dargestellten:

$$y - \frac{a}{b} x = o,$$

parallel ist.

Fig. 1. 405. Um zu zeigen, dass die allgemeine Gleichung (2), bei jeder Constanten-Bestimmung, einen Punct darstelle, wollen wir derselben zunächst folgende Form geben:

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c}\frac{v}{u} + \frac{w}{u} = o.$$

Wenn wir alsdann von der veränderlichen Grösse $\frac{w}{u}$ irgend eine beliebige constante Grösse abziehen, so kommt dies offenbar darauf hinaus, statt der ersten Axe eine andere, ihr parallele, gerade Linie zu nehmen. Nehmen wir für diese constante Grösse $\frac{a}{c}$, so verwandelt sich die letzte Gleichung in folgende:

$$bv+cw = o,$$

die, nach der vorigen Nummer, einen auf der neuen ersten Axe liegenden Punct darstellt.

406. Wenn die allgemeine Gleichung:

$$au+bv+cw = o,$$

irgend einen gegebenen Punct G darstellen soll, so ist es leicht, die Constanten derselben zu bestimmen. Für die durch den gegebenen Punct gehende gerade Linie, welche der ersten Axe parallel ist, für GS, ist $v = o$ mithin,

$$au+cw = o,$$

und folglich ist die Ordinate desjenigen Punctes, in welchem diese gerade Linie in die zweite Axe einschneidet:

$$-\frac{w}{u} = OS = \frac{a}{c}.$$

Auf ähnliche Weise ergibt sich, wenn wir, parallel mit der zweiten Axe, durch den gegebenen Punct die gerade Linie GR legen:

$$OR = \frac{b}{c}.$$

Wir sehen hieraus, das die allgemeine Gleichung:

$$au+bv+cw = o.$$

denjenigen Punct darstellt, dessen Coordinaten sind:

$$y = \frac{a}{c}, \qquad x = \frac{b}{c}.$$

Unbeschadet der Allgemeinheit können wir in der Gleichung des Punctes $c = 1$ setzen; alsdann sind die Coordinaten desselben die Coefficienten von u und v.

Für die, durch den gegebenen Punct G und den Anfangspunct der Coordinaten gehende, gerade Linie OG ist $w = o$, folglich:

$$au+bv = o,$$

mithin:

$$-\frac{v}{u} = \frac{a}{b} = \frac{OS}{OR} = \frac{\sin\alpha}{\sin(\beta-\alpha)},$$

indem wir durch β den Coordinaten-Winkel bezeichnen.

407. Wenn der durch die allgemeine Gleichung:

$$au+bv+cw = o,$$

dargestellte Punct auf einer durch bestimmte Werthe der veränderlichen Grössen, durch u', v' und w', gegebenen geraden Linie liegen soll, so ist:

$$au'+bv'+cw' = o,$$

und, indem man abzieht, ergibt sich:

$$a(u-u')+b(v-v')+c(w-w') = o:$$

für die allgemeine Gleichung eines auf der geraden Linie (w', v', u') liegenden Punctes. *)

Wenn irgend zwei gerade Linien (w'', v'', u'') und (w', v', u') gegeben sind, so erhalten wir für die Gleichung des Durchschnittspunctes dieser beiden Linien folgende:

$$\frac{w}{u}-\frac{w'}{u'} = \frac{\frac{w''}{u''}-\frac{w'}{u'}}{\frac{v''}{u''}-\frac{v'}{u'}}\left(\frac{v}{u}-\frac{v'}{u'}\right),$$

also, wenn wir entwickeln:

$$(v''u'-v'u'')w-(w''u'-w'u'')v+(w''v'-w'v'')u = o.$$

Je nachdem wir in u, v oder w als constant betrachten, verwandelt sich diese Gleichung in folgende:

$$\begin{aligned}(v''-v')w-(w''-w')v+(w''v'-w'v'') &= o,\\ (u''-u')w-(w''-w')u+(w''v'-w'u'') &= o,\\ (u''-u')v-(v''-v')u+(v''u'-v'u'') &= o.\end{aligned}$$

408. Wir kommen zur Bestimmung derjenigen geraden Linien, welche die durch folgende beide Gleichungen:

$$\begin{aligned}au+bv+w &= o,\\ a'u+b'v+w &= o,\end{aligned} \qquad (1)$$

gegebenen Puncte enthält, wenn wir zwischen diesen Gleichungen die Werthe für die Coefficienten je zweier der drei veränderlichen Grössen w, v und u eliminiren. Auf diese Weise kommt:

$$\begin{aligned}-\frac{w}{u} &= \frac{ab'-a'b}{b'-b},\\ -\frac{w}{v} &= \frac{a'b-ab'}{a'-a},\\ -\frac{v}{u} &= \frac{a'-a}{b'-b}.\end{aligned}$$

409. Das Resultat der Elimination zwischen den beiden gegebenen Gleichungen (1), die wir, der Kürze halber, durch:

$$U = o, \qquad U' = o, \qquad (2)$$

darstellen wollen, bleibt dasselbe, wenn wir für eine dieser Gleichungen eine andere desselben ersten Grades nehmen, die wir durch eine algebraische Verbindung der gegebenen

*) Der Kürze wegen, wollen wir eine durch w', v' und u' gegebene gerade Linie durch (w', v', u') bezeichnen. Es sind w', v' und u' als Coordinaten dieser Linie zu betrachten. Wir wollen ferner dieselbe gerade Linie durch (w', v'), (w', u') oder (v', u') bezeichnen, wenn wir u' = 1, v' = 1 oder w' = 1 setzen.

Digitized by Google

Gleichungen erhalten. Jede solche Gleichung ist, wenn wir μ als unbestimmten Coefficienten betrachten, in nachstehender Gleichung einbegriffen:

$$U+\mu U' = 0.$$

Es stellt also diese Gleichung irgend einen beliebigen Punct dar, der mit den beiden gegebenen, durch die Gleichungen (2) dargestellten, Puncte in gerader Linie liegt.

410. Für die beiden durch die Gleichungen (1) dargestellten Puncte hat man (406):

$$y = a, \qquad x = b;$$
$$y = a', \qquad x = b'.$$

Man erhält hiernach leicht die Coordinaten derjenigen beiden Puncte, welche auf der, die beiden gegebenen Puncte verbindenden, geraden Linie so liegen, dass die Abstände jedes derselben von dem ersten und zweiten gegebenen Puncte sich verhalten, wie μ: 1. Für diese Coordinaten ergibt sich:

$$y = \frac{a\pm\mu a'}{1\pm\mu}, \qquad x = \frac{b\pm\mu b'}{1\pm\mu},$$

wobei wir μ, das an sich positiv ist, mit dem Vorzeichen + oder − nehmen müssen, je nachdem wir denjenigen dieser beiden Puncte betrachten, welcher zwischen die beiden gegebenen fällt oder nicht. Die Gleichungen dieser beiden Puncte sind also (406) in folgender

$$(a\pm\mu a')u+(b\pm\mu b')v+(1\pm\mu)w = 0,$$

die mit folgender indentisch ist:

$$U\pm\mu U' = 0,$$

enthalten.

Wir sehen hieraus, wie man, wenn irgend zwei Puncte gegeben sind, unmittelbar die Gleichung jedes bestimmten Punctes derjenigen geraden Linie erhält, welche durch die beiden gegebenen Puncte geht, und dass man zu diesem Ende diese Puncte nur auf die allgemeinste Weise durch die Gleichungen (2) darzustellen braucht. Wenn wir insbesondere $\mu = 1$ setzen, so stellt die Gleichung:

$$U+U' = 0,$$

die Mitte zwischen den beiden gegebenen Puncten dar; die Gleichung:

$$U-U' = (a-\mu a')u+(b-\mu b')v = 0,$$

einen, nach der Richtung der durch die gegebenen Puncte gehenden geraden Linie hin, unendlich weit entfernt liegenden Punct (405).

Die durch die vier Gleichungen:

$$U = 0, \qquad U' = 0, \qquad U+\mu U' = 0, \qquad U-\mu U' = 0,$$

dargestellten Puncte, nennt man **vier harmonische Theilungspuncte.**

411. Wenn die drei Gleichungen:

$$\begin{aligned} au+bv+w &= 0,\\ a'u+b'v+w &= 0,\\ a''u+b''v+w &= 0, \end{aligned} \qquad (1)$$

solche drei Puncte, die in gerader Linie liegen, darstellen sollen, so findet zwischen den Constanten dieser drei Gleichungen eine Bedingungs-Gleichung Statt, die wir leicht auf folgende Weise erhalten. Die allgemeine Gleichung aller Puncte, die auf der, durch die beiden ersten jener drei Puncte gehenden, geraden Linie liegen, ist folgende (409):

$$(a+\mu a')u+(b+\mu b')v+(1+\mu)w = 0.$$

Wenn diese Gleichung insbesondere den dritten Punct darstellen soll, so muss der unbestimmte Coefficient μ so bestimmt werden, dass

$$\frac{a+\mu a'}{1+\mu} = a'', \qquad \frac{b+\mu b'}{1+\mu} = b''.$$

Um die gesuchte Bedingungs-Gleichung zu erhalten, brauchen wir nur zwischen den beiden vorstehenden Gleichungen μ zu eliminiren; auf diese Weise kommt:

$$b(a''-a')-a(b''-b')+b''a'-b'a'' = 0:$$

eine Gleichung, die, wie zu erwarten stand, in Beziehung auf die Constanten der drei Gleichungen (1) symmetrisch ist.

412. Wir wollen in dieser Nummer den Winkel bestimmen, den zwei gegebene gerade Linien:

$$(w, v, u), \qquad (w', v', u'),$$

mit einander bilden. Nennen wir zu diesem Ende den Coordinaten-Winkel β und diejenigen Winkel, welche diese beiden geraden Linien mit der ersten Axe bilden, α und α', so ist:

$$-\frac{v}{u} = \frac{\sin\alpha}{\sin(\beta-\alpha)}, \qquad -\frac{v'}{u'} = \frac{\sin\alpha'}{\sin(\beta-\alpha')},$$

und der gesuchte Winkel, den wir von der ersten gegebenen geraden Linie nach der zweiten hin nehmen, und durch ω bezeichnen wollen, gleich $(\alpha'-\alpha)$. Hiernach erhält man nach einigen Reductionen, ähnlich wie in der 17. Nummer:

$$\tang\omega = \frac{(u'v-uv')\sin\beta}{uu'-(uv'+u'v)\cos\beta+vv'},$$

und wenn der Coordinaten-Winkel ein rechter ist:

$$\tang\omega = \frac{u'v-uv'}{uu'+vv'}.$$

Wenn die beiden gegebenen geraden Linien sich unter rechten Winkeln schneiden, so kommt:

$$uu'-(uv'+u'v)\cos\beta+vv' = 0,$$

und wenn auch der Coordinaten-Winkel ein rechter ist:

$$uu'+vv' = 0.$$

413. Die Entfernung der durch die beiden Gleichungen:

$$\begin{aligned} au+bv+w &= 0, \\ a'u+b'v+w &= 0, \end{aligned} \qquad (1)$$

dargestellten Puncte, die wir D nennen wollen, ist durch folgende Gleichung gegeben:

$$(a-a')^2+2(a-a')(b-b')\cos\beta+(b-b')^2 = D^2,$$

die für den Fall rechtwinklicher Coordinaten in nachstehende übergeht:

$$(a-a')^2+(b-b')^2 = D^2.$$

Wir erhalten diese Gleichungen unmittelbar, da die durch (1) dargestellten Puncte keine andern sind, als die Puncte (a, b) und (a', b').

414. Es bleibt uns noch übrig, den Abstand eines gegebenen, durch die Gleichung:

$$au+bv+w = 0,$$

dargestellten Punctes von einer gegebenen geraden Linie (w', v', u') zu bestimmen. Wir wollen hierbei, was für unsere Absicht vollkommen hinreicht, für den Coordinaten-Winkel einen rechten nehmen. Diese Bestimmung ist identisch dieselbe, als die Bestimmung des Abstandes des Punctes (a, b) von der durch die Gleichung:

$$u'y+v'x+w' = 0$$

dargestellten geraden Linie. Für diesen Abstand, den wir P nennen wollen, erhalten wir nach der 29. Nummer *):

$$P = \pm \frac{au'+bv'+w'}{\sqrt{u'^2+v'^2}},$$

wobei wir nach der 31. Nummer das Vorzeichen + oder — nehmen müssen, je nachdem der gegebene Punct, in Beziehung auf die gegebene gerade Linie, nach der positiven oder negativen Seite der y liegt. —

415. Wenn wir auf die vorstehenden Entwicklungen zurückblicken, so bemerken wir bald zwischen diesen und den analogen Entwicklungen des ersten Abschnittes des ersten Bandes den innigsten Zusammenhang, eine vollständige Reciprocität. In der 400. Nummer haben wir die gewöhnliche Gleichung der geraden Linie zu Grunde gelegt und durch die Constanten in dieser Gleichung die gerade Linie bestimmt: diese Constanten als Coordinaten derselben betrachtet. Eben so können wir auch die Gleichung des Punctes zu Grunde legen (wir construiren hier die veränderlichen Grössen auf die oben bestimmte Weise) und durch die Constanten in dieser Gleichung den Punct bestimmen: diese Constanten als Coordinaten des Punctes betrachten.

Die nachstehende Gleichung z. B., die wir genauer betrachten wollen:

$$y+vx+w = 0, \qquad (1)$$

stellt eine gerade Linie dar, wenn wir für die veränderlichen Grössen y und x gewöhnliche Punct-Coordinaten und durch w und v constante Grössen, deren geometrische Construction wir aus der Discussion der Gleichung dieser geraden Linie erhalten, bezeichnen. Wenn wir w und v als veränderlich betrachten und diese Grössen durch irgend eine lineare Gleichung:

$$w+cv+c' = 0,$$

mit einander verbunden sind, so erhalten wir unendlich viele gerade Linien, die aber alle durch denselben Punct, nemlich durch den Punct (c', c), gehen.

Dieselbe Gleichung (1) stellt, wenn wir w und v als Linien-Coordinaten und veränderlich, und y und x als zwei beliebige Constante betrachten, einen Punct dar. Betrachten wir auch y und x, deren geometrische Construction wir aus der Discussion der

---

*) Wir haben nemlich für den Abstand eines Punctes (y', x') von einer durch die Gleichung:

$$y = ax+b,$$

gegebenen geraden Linie a. a. O. folgenden Ausdruck hergeleitet:

$$P = \pm \frac{y'-ax'-b}{\sqrt{1+a^2}}.$$

Diesen Ausdruck erhalten wir unmittelbar auf folgende Weise. Es sei (Fig. 1) L der gegebene Punct und MN die gegebene gerade Linie. Alsdann ist:

$$LF = LE\sin LEF = (LD-ED)\sin LEF,$$
$$= (y'-y,)\sin LEF,$$
$$LF = LE\sin LEF = (LD-ED)\sin LEF,$$
$$= (y'-y_,)\sin LEF,$$

indem wir die dem gegebenen x' entsprechende, Ordinate der gegebenen geraden Linie $y_,$ nennen. Hiernach ist $y_,$ gleich (ax'+b). Ueberdies ergänzt der Winkel LEF denjenigen Winkel, den die gegebene gerade Linie mit der ersten Axe bildet, zu einem rechten; so dass der Cosinus des letztgenannten Winkels, für den man den Ausdruck $\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}$ hat, gleich ist *sin* LEF. Somit erhält man für LF oder P den obigen Ausdruck.

Gleichung dieses Punctes erhalten, als veränderlich, setzen aber zwischen beiden Grössen irgend eine lineare Gleichung, z. B. folgende:

$$y+cx+c' = 0,$$

so erhalten wir unendlich viele Puncte, die aber alle auf derselben geraden Linie, nemlich der geraden Linie (c', c), liegen.

Der Beweis der letzten beiden Behauptungen ergibt sich unmittelbar. Es sei nemlich erstens:

$$y+ax+b = 0, \qquad (2)$$

die allgemeine Gleichung der geraden Linie und

$$c'+ca+b = 0, \qquad (3)$$

die gegebene lineare Bedingungs-Gleichung zwischen den, als beliebig zu betrachtenden, beiden Constanten derselben; c und c' sind zwei gegebene Grössen. Wir erhalten auch dann eine lineare Bedingungs-Gleichung zwischen jenen beiden Constanten, wenn ein Punct der geraden Linie gegeben ist. Wenn nemlich (y', x') dieser Punct ist, so kommt:

$$y'+ax'+b = 0.$$

Die Gleichung (3) ist mit der letzten Gleichung identisch, wenn wir in dieser y' = c' und x' = c nehmen. Hiernach bedeutet alsdann die gegebene Bedingungs-Gleichung, dass alle durch (2) darstellbaren geraden Linien durch den Punct (c', c) gehen.

Es sei zweitens:

$$w+av+b = 0, \qquad (4)$$

die allgemeine Gleichung des Punctes und wiederum:

$$c'+ca+b = 0, \qquad (5)$$

die gegebene Bedingungs-Gleichung zwischen den beiden Constanten derselben. Zwischen denselben Constanten ergibt sich, wenn wir eine gerade Linie (w', v'), die durch den Punct (4) geht, kennen, folgende Bedingungs-Gleichung des ersten Grades:

$$w'+av'+b = 0:$$

eine Gleichung, die mit (5) identisch wird, wenn wir w' = c' und v' = c nehmen. Es bedeutet also die gegebene Bedingungs-Gleichung (5), dass alle durch (4) darstellbaren Puncte auf der geraden Linie (c', c) liegen.

416. Wenn wir, statt der Gleichung (1), die nachstehende, sowol in Beziehung auf x, y und z, als auch in Beziehung auf u, v und w homogene Gleichung des ersten Grades nehmen:

$$uy+vx+wz = 0,$$

so erhalten wir, wenn wir y, x und z als constant ansehen, die Gleichung des Punctes unter der Form, wie wir sie bisher betrachtet haben. Der dargestellte Punct ist folgender:

$$\left(\frac{y}{z}, \frac{x}{z}\right).$$

Betrachten wir aber u, v und w als constant, so stellt dieselbe Gleichung eine gerade Linie dar, aber unter einer Form, wie wir sie nicht zu behandeln gewohnt sind. Diese gerade Linie ist folgende: $\left(\frac{w}{u}, \frac{v}{u}\right)$ oder (w, v, u). Diese neue Form der Gleichung der geraden Linie, einer Gleichung, die rücksichtlich der drei veränderlichen Grössen y, x und z homogen ist, scheint mir in allen denjenigen Entwicklungen, bei welchen keine Elimination vorkommt, in Beziehung auf Eleganz und Symmetrie den Vorrang zu behaupten. Wir können ferner leicht von der allgemeinern Form zu der gewöhnlichen übergehen, indem wir z als ein für alle Mal gegeben betrachten und etwa z = 1 setzen.

Wir können aber auch, und hierin scheint mir ein nicht unbedeutender Vortheil zu liegen, auf ähnliche Weise $x = 1$ oder $y = 1$ setzen. *) Auf diese Bemerkung, die sich auf Gleichungen jedes beliebigen Grades ausdehnen lässt, werden wir in dem Folgenden öfter Gelegenheit finden zurückzukommen. —

417. Nach diesen allgemeinen Betrachtungen wenden wir uns wieder zu unserm eigentlichen Gegenstande zurück. Bei der Prüfung einer neuen Entwicklungsweise ist eine doppelte Frage zu berücksichtigen, einmal, ob dieselbe zum Beweise gegebener Sätze sich geschmeidig zeigt, und dann, ob sie neue Resultate finden lehrt. Was den ersten Punct betrifft, so wird in den nächsten Nummern an einigen Beispielen anschaulich werden, wie sich die neuen Gleichungen eben so bequem handhaben lassen, als die gewöhnlichen Gleichungen, welche gerade Linien darstellen. Wir wollen zuerst folgenden bekannten Satz beweisen:

Wenn die Seiten eines Dreiecks den Seiten eines andern Dreiecks parallel sind, so gehen diejenigen drei geraden Linien, welche die den parallelen Seiten gegenüberliegenden Winkelpuncte beider Dreiecke verbinden, durch ein und denselben Punct.

Indem wir über die beiden Coordinaten-Axen vorläufig keine nähere Bestimmung machen, und u constant nehmen, wollen wir die Seiten des einen Dreiecks ABC auf folgende Weise bestimmen:

$$AB \begin{cases} w = w', \\ v = v'; \end{cases} \qquad AC \begin{cases} w = w'', \\ v = v''; \end{cases} \qquad BC \begin{cases} w = w''', \\ v = v'''; \end{cases}$$

und erhalten alsdann für die Seiten des zweiten Dreiecks A'B'C' Coordinaten-Werthe von folgender Form:

$$A'B' \begin{cases} w = w'+c', \\ v = v'; \end{cases} \qquad A'C' \begin{cases} w = w''+c'', \\ v = v''; \end{cases} \qquad B'C' \begin{cases} w = w'''+c''', \\ v = v'''. \end{cases}$$

Hiernach ergehen sich für die Puncte A, der im Durchschnitte von AB und AC, und A', der im Durchschnitte von A'B' und A'C' liegt, folgende Gleichungen:

$$w - w' = \frac{w''-w'}{v''-v'}(v-v'),$$

$$w - w' - c' = \frac{w''-w'+c''-c'}{v''-v'}(v-v').$$

---

*) Wenn wir die Gleichung:

$$ax+by+cz = 0,$$

durch x dividiren, so kommt:

$$a + b\frac{y}{x} + c\frac{z}{x} = 0.$$

Als die beiden veränderlichen Grössen dieser Gleichung können wir $\left(\frac{y}{z}\right)$ und $\left(\frac{z}{x}\right)$ nehmen. Wenn wir diese veränderlichen Grössen auf irgend einen gegebenen Punct beziehen, so bedeutet $\frac{y}{x}$, welches dasselbe ist als $\frac{y}{z} : \frac{x}{z}$, bei der Voraussetzung eines rechtwinkligen Coordinaten-Systems, die trigonometrische Tangente desjenigen Winkels, welchen die durch den gegebenen Punct und den Anfangspunct der Coordinaten gehende gerade Linie mit der ersten Axe bildet, und $\frac{z}{x}$ ist der reciproke Werth der gewöhnlichen Abscisse des Punctes. Solche trigonometrischen Tangenten und solche reciproken Abscissen-Werthe sind also die veränderlichen Grössen y und z, in der Gleichung der geraden Linie, wenn wir $x = 1$ setzen.

Digitized by Google

Um die gerade Linie AA' zu bestimmen, welche durch diese beiden Puncte geht, verbinden wir die vorstehenden Gleichungen mit einander und erhalten für diese Linie folgende Coordinaten-Werthe:

$$w = \frac{w'c'' - w''c'}{c'' - c'}, \qquad v = \frac{v'c'' - v''c'}{c'' - c'}.$$

Für die Coordinaten der beiden andern geraden Linien, die durch B und B' und durch C und C' gehen, Coordinaten, die wir zur Unterscheidung unten einmal und zweimal accentuiren wollen, erhalten wir sogleich durch Accent-Vertauschung:

$$w_{,} = \frac{w'c''' - w'''c'}{c''' - c'}, \qquad v_{,} = \frac{v'c''' - v'''c'}{c''' - c'}.$$

$$w_{,,} = \frac{w''c''' - w'''c''}{c''' - c''}, \qquad v_{,,} = \frac{v''c''' - v'''c''}{c''' - c''}.$$

Wenn wir nun annehmen, der Anfangspunct der Coordinaten sei ursprünglich so angenommen worden, dass er in den Durchschnitt von AA' und BB' falle, so ist $w = w_{,} = 0$, also:

$$\frac{w'}{c'} = \frac{w''}{c''}, \qquad \frac{w'}{c'} = \frac{w'''}{c'''},$$

folglich:

$$\frac{w''}{c''} = \frac{w'''}{c'''};$$

und endlich auch $w_{,,} = 0$. Es geht mithin auch die dritte gerade Linie CC' durch den Anfangspunct der Coordinaten, den Durchschnitt von AA' und BB'. Der obige Satz ist also bewiesen.

Wir haben bei diesem Beweise vorausgesetzt, dass AA' und BB' nicht parallel seien. Wenn diese Linien parallel sind, so können wir, parallel mit ihnen, die erste Axe annehmen, während die zweite Axe beliebig bleiben mag, und erhalten alsdann $v = v_{,} = 0$, so dass:

$$\frac{v'}{c'} = \frac{v''}{c''}, \qquad \frac{v'}{c'} = \frac{v'''}{c'''}.$$

Hieraus folgt:

$$\frac{v''}{c''} = \frac{v'''}{c'''},$$

und also ist auch $v_{,,} = 0$, und mithin auch CC' mit AA' und BB' parallel.

418. *Wenn die drei Seiten eines Dreiecks den drei Seiten eines andern Dreiecks in solchen drei Puncten begegnen, die in gerader Linie liegen, so schneiden sich diejenigen geraden Linien, welche die diesen Seiten gegenüberliegenden Winkelpuncte der beiden Dreiecke verbinden, in demselben Punete.*

ABC und A'B'C' seien die beiden gegebenen Dreiecke und AB und A'B', AC und A'C', BC und B'C' die drei Seitenpaare dieser beiden Dreiecke, die sich in solchen drei Puncten schneiden, die in gerader Linie liegen. Alsdann gehen die drei geraden Linien AA', BB' und CC' durch denselben Punct, oder sind perallel.

Durch jene drei Durchschnittspuncte wollen wir die erste Axe legen; alsdann erhalten wir für die Seiten der beiden Dreiecke, wenn wir überdiess w constant nehmen:

$$AB \begin{cases} u = u', \\ v = v'; \end{cases} \qquad AC \begin{cases} u = u'', \\ v = v''; \end{cases} \qquad BC \begin{cases} u = u''', \\ v = v'''; \end{cases}$$

$$A'B' \begin{cases} u = u'+c', \\ v = v'; \end{cases} \qquad A'C' \begin{cases} u = u''+c'', \\ v = v''; \end{cases} \qquad B'C' \begin{cases} u = u'''+c''', \\ v = v'''. \end{cases}$$

Digitized by Google

Die beiden Puncte A und A' werden hiernach durch folgende Gleichungen dargestellt:

$$n-n' = \frac{n''-n'}{v''-v'}(v-v'),$$

$$n-n'-c' = \frac{n''-n'+c''-c'}{v''-v'}(v-v').$$

Aus diesen beiden Gleichungen erhalten wir für die gerade Linie AA' folgende Coordinaten-Werthe:

$$n = \frac{n'c''-n''c'}{c''-c'}, \qquad v = \frac{n'c''-n''c'}{c''-c'};$$

und hieraus endlich für BB' und CC', indem wir die Coordinaten derselben unten einmal und zweimal accentuiren:

$$n_{,} = \frac{n'c'''-n'''c'}{c'''-c'}, \qquad v_{,} = \frac{v'c'''-v'''c'}{c'''-c'};$$

$$n_{,,} = \frac{n''c'''-n'''c''}{c'''-c''}, \qquad v_{,,} = \frac{v''c'''-v'''c''}{c'''-c''}.$$

Da die Rechnung in dieser Nummer gerade so angelegt worden ist als in der vorigen, so können wir aus dieser alle vorstehenden Ausdrücke unmittelbar herleiten: wir brauchen zu diesem Ende nur w mit n zu vertauschen.

Da wir durchaus keine nähere Bestimmung über die zweite Axe gemacht haben, so können wir annehmen, dieselbe sei ursprünglich durch den Durchschnitt von AA' und BB' nach beliebiger Richtung gelegt worden. Alsdann ist

$$n = n_{,}; \qquad (1)$$

und um den vorliegenden Satz zu beweisen, müssen wir zeigen, wie hieraus folgt, dass

$$n = n_{,} = n_{,,}. \qquad (2)$$

Entwickeln wir zu diesem Ende die Gleichung (1), so kommt:

$$c'''n''-c''n'''-c'''n'+c'n'''+c''n'-c'n'' = 0,$$

und aus der Symmetrie dieser Gleichung, in Beziehung auf die verschieden accentuirten Buchstaben, folgt, dass auch die Gleichung (2) Statt findet.

Dies Resultat erhellet sogleich aus der Form der Ausdrücke für n, $n_{,}$ und $n_{,,}$. Denn wir können uns durch ($v = v'$, $u = c'$), ($v = v''$, $n = c''$) und ($v = v'''$, $n = u'''$) drei gerade Linien dargestellt denken. Alsdann beziehen sich (407) n, $n_{,}$ und $n_{,,}$ auf die Durchschnitte der beiden ersten, der ersten und dritten und der beiden letzten dieser drei Linien. Fallen die beiden ersten Durchschnitte zusammen, so ist $n = n_{,}$; dann fällt aber auch mit jenen beiden Durchschnitten der dritte zusammen, und also ist $n = n_{,} = n_{,,}$.

Wenn die beiden geraden Linien AA' und BB' parallel sind, so ist, wenn wir die zweite Axe mit diesen beiden Linien parallel nehmen, $v = v_{,} = 0$ und hieraus folgt sogleich, gerade wie in der vorigen Nummer:

$$v = v_{,} = v_{,,} = 0;$$

es ist also auch CC' mit der zweiten Axe und also auch mit AA' und BB' parallel.

419. Man bemerkt sogleich, dass die Sätze der beiden vorhergehenden Nummern in genauer Verbindung stehen. Drei Puncte nemlich, die nach irgend drei gegebenen Richtungen hin unendlich weit liegen, wie überhaupt alle unendlich weit entfernten Puncte derselben Ebene, sind als in gerader Linie liegend anzusehen. Diese Behauptung können wir bestätigt finden, wenn wir den Satz der letzten Nummer umkehren und einfache Gränz-Betrachtungen zu Hülfe nehmen. Wenn die resultirenden drei geraden Linien

in dem einen oder dem andern jener beiden Sätze parallel sind, so liegt ihr gemeinschaftlicher Durchschnitt unendlich weit. Alle diese besondern Sätze sind als Fälle eines einzigen Satzes anzusehen und in dem Vorstehenden ergeben sich alle diese Fälle durch leichte Modificationen ein und desselben Beweises *). Um dies vollständig darzu-

*) Diesen Vortheil haben wir nicht (vergl. die 77. — 87. Nummer des ersten Bandes), wenn wir dieselben Sätze, oder viermehr die Umkehrung derselben:

„Wenn drei gerade Linien, welche die Winkelpuncte zweier Dreiecke, paarweise genommen, mit einander verbinden, durch denselben Punct gehen oder parallel sind, so schneiden sich die Seiten der beiden Dreiecke in solchen drei Puncten, die in gerader Linie liegen, oder diese Seiten sind, paarweise genommen, parallel."

mit Hülfe der gewöhnlichen Gleichungen beweisen. Hier reichen wir, wenn wir nicht Gränz-Betrachtungen in der Construction zu Hülfe nehmen wollen, mit einer einzigen Anlage des Beweises nicht aus. Wir kommen aber zu diesem Ziele, wenn wir nach der Note zur 416. Nummer drei veränderliche Grössen x, y und z einführen und dann etwa x als constant ansehen. Nehmen wir, bei dieser Voraussetzung, den gemeinsamen Durchschnitt der drei geraden Linien zum Anfangspuncte der Coordinaten, so erhalten wir folgende Coordinaten-Bestimmung für die drei Winkelpuncte der beiden Dreiecke ABC und A'B'C':

$$A\ \begin{cases} y = y', \\ z = z'; \end{cases} \qquad B\ \begin{cases} y = y'', \\ z = z''; \end{cases} \qquad C\ \begin{cases} y = y''', \\ z = z'''; \end{cases}$$

$$A'\ \begin{cases} y = y'+c', \\ z = z'; \end{cases} \qquad B'\ \begin{cases} y = y''+c'', \\ z = z''; \end{cases} \qquad C'\ \begin{cases} y = y'''+c''', \\ z = z'''. \end{cases}$$

Hiernach ergeben sich leicht die Coordinaten der drei Durchschnitte, die, nach dem zu beweisenden Satze, in gerader Linie liegen, Coordinaten, die wir durch y, $y_,$ und $y_{,,}$, z, $z_,$ und $z_{,,}$ bezeichnen wollen. Ist nun, was vorauszusetzen uns frei steht, die zweite Axe derjenigen geraden, welche durch die beiden ersten jener drei Durchschnitte geht, parallel, so ist $z = z_,$ und hieraus ergibt sich alsdann $z = z_, = z_{,,}$, d. h. dieselbe Axe geht auch durch den dritten Durchschnitt.

Wenn insbesondere $z = z_, = 0$, so folgt, dass auch $z_{,,} = 0$. Diesem Falle entspricht, dass die Seiten der beiden Dreiecke, paarweise genommen, parallel sind.

Wenn die drei geraden Linien AA', BB' und CC' parallel sind, so ergibt sich, wenn wir, parallel mit ihnen, auch die zweite Axe nehmen, und die Winkelpuncte des ersten Dreiecks wie oben bestimmen, für die Winkelpuncte des zweiten Dreiecks folgende Coordinaten-Bestimmung:

$$A'\ \begin{cases} y = y', \\ z = z+c'; \end{cases} \qquad B'\ \begin{cases} y = y'', \\ z = z''+c''; \end{cases} \qquad C'\ \begin{cases} y = y''', \\ z = z'''+c'''. \end{cases}$$

Nehmen wir nun an, die erste Axe sei ursprünglich durch die beiden ersten derjenigen drei Puncte gelegt, von denen zu beweisen ist, dass sie in gerader Linie liegen, und behalten für die Coordinaten dieser Puncte dieselbe Bezeichnung bei, so ist $y = y_, = 0$ und hieraus folgt $y = y_, = y_{,,} = 0$, d. h. alle drei Durchschnitte liegen auf der ersten Axe.

Die eben gemachte Bestimmung über die erste Axe ist unstatthaft, wenn die beiden ersten Durchschnitte unendlich weit liegen. Alsdann ist aber $z = z_,$ und hieraus folgt $z = z_, = z_{,,}$ d. h. alle drei Puncte liegen unendlich weit. —

Das Beweis-Schema, das ich hier für alle verschiedene Fälle durchgeführt habe, konnte ich in der 77. Nummer bei Gleichungen zwischen y und x nur auf den Fall des Parallelismus der geraden Linien AA', BB' und CC' anwenden. Der Grund dieses Unterschiedes ist offenbar darin zu suchen, dass wir bei der neuen Coordinaten-Bestimmung auch unendlich weit entfernte Puncte durch endliche Coordinaten-Werthe und unendlich weit entfernte gerade Linien durch eine endliche Gleichung ausdrücken können. Wir erhalten nemlich:

$$z = 0,$$

als die Gleichung einer unendlich weit entfernt liegenden geraden Linie. (Alle solche gerade Linien sind als zusammenfallend und identisch zu betrachten). Es bezeichnen ferner folgende drei Systeme von zwei Gleichungen:

$$\{y = 0,\ z = 0\}, \qquad \{x = 0,\ z = 0\}, \qquad \{ax+by = 0,\ z = 0\},$$

drei solche Puncte, die unendlich weit liegen und zwar auf der ersten Axe, der zweiten Axe und nach irgend einer gegebenen Richtung hin.

thun, verweile ich hierbei mit einiger Ausführlichkeit. Wir können zu diesem Ende auch noch bemerken, dass wir, um den Satz der 418. Nummer zu beweisen, wie in der vorhergehenden Nummer, auch u als constant ansehen können. Wenn wir, bei dieser Voraussetzung, die zweite Axe durch die drei Durchschnitte der Seiten der beiden Dreiecke legen, so haben wir für AB und A'B', so wie für AC und A'C', und für BC und B'C' dasselbe w, aber verschiedene v. Das Uebrige des Beweises ergibt sich ganz ähnlich, wie bisher.

420. Auf dieselbe Weise, wie wir in der 84. Nummer die Umkehrung des Satzes der 418. Nummer bewiesen haben, können wir auch hier den Beweis anlegen und denselben zugleich auf alle Fälle ausdehnen. Legen wir nemlich die erste Axe durch die drei Durchschnitte der gegebenen Dreiecksseiten, und nehmen u constant, so erhalten wir für diese Durchschnittspuncte Gleichungen von folgender Form:

$$v = c'w, \qquad v = c''w, \qquad v = c'''w, \qquad (1)$$

und hiernach folgende Coordinaten-Bestimmung für die Seiten der beiden Dreiecke:

$$AB \begin{cases} w = w', \\ v = c'w; \end{cases} \qquad AC \begin{cases} w = w'', \\ v = c''v''; \end{cases} \qquad BC \begin{cases} w = w''', \\ v = c'''v'''; \end{cases}$$

$$A'B' \begin{cases} w = w_{,}, \\ v = c'w_{,}; \end{cases} \qquad A'C' \begin{cases} w = w_{,,}, \\ v = c''v_{,,}; \end{cases} \qquad B'C' \begin{cases} w = w_{,,,}, \\ v = c'''v_{,,,}. \end{cases}$$

Hieraus erhalten wir für die Gleichungen der beiden Puncte A und A':

$$v - cw' = \frac{c''w'' - c'w'}{w'' - w'}(w - w'),$$

$$v - cw_{,} = \frac{c''w_{,,} - c'w_{,}}{w_{,,} - w_{,}}(w - w_{,}),$$

und, indem wir aus diesen beiden Gleichungen den Werth von w ziehen, für die eine der Coordinaten von AA':

$$w = \frac{w'w''(w_{,,} - w_{,}) - w_{,}w_{,,}(w'' - w')}{w'w_{,,} - w''w_{,}}. \qquad (2)$$

Durch Accent-Vertauschung erhalten wir sogleich für die entsprechenden Ordinaten von BB' und CC', die wir durch beigefügte Puncte unterscheiden wollen,

$$w^{\cdot} = \frac{w'w'''(w_{,,,} - w_{,}) - w_{,}w_{,,,}(w''' - w')}{w'w_{,,,} - w'''w_{,}},$$

$$w^{\cdot\cdot} = \frac{w''w'''(w_{,,,} - w_{,,}) - w_{,,}w_{,,,}(w''' - w'')}{w''w_{,,,} - w'''w_{,,}}. \qquad (3)$$

Wenn wir nun annehmen, dass die zweite Axe durch den Durchschnitt von AA' und BB' gehe, so ist $w = w^{\cdot}$, und da diese Gleichung, wenn wir entwickeln, in Beziehung auf die einmal, zweimal und dreimal accentuirten Buchstaben, symmetrisch wird und zwar folgende (84):

$$w'w''(w_{,,}w_{,} - w_{,,}w_{,}) - w'w'''(w_{,}w_{,,} - w_{,,}w_{,,,}) + w''w'''(w_{,}w_{,,} - w_{,}w_{,,,}) = 0,$$

so folgt sogleich $w = w^{\cdot} = w^{\cdot\cdot}$, und mithin geht CC' durch den Durchschnitt von AA' und BB'.

Wenn AA' und BB' parallel sind und wir parallel mit ihnen die zweite Axe legen, so ist $\frac{1}{w} = 0$ und $\frac{1}{w^{\cdot}} = 0$ mithin:

$$w'w_{,,} - w''w_{,} = 0, \qquad w'w_{,,,} - w'''w_{,} = 0,$$

also auch:

$$w''w_{,,}-w'''w_{,,}=0,$$

und somit auch $\frac{1}{w''}=0$, nnd CC' parallel mit der zweiten Axe, und mit AA' und BB'.

421. Wenn wir in allen Entwicklungen der vorigen Nummer w mit u vertauschen, so stellen die drei Gleichungen (1) drei solche Puncte dar, die nach gegebenen Richtungen hin nnendlich weit liegen und die Seiten der beiden Dreiecke ABC und A'B'C' sind parallel. Alsdann erhalten wir, bei beliebiger Coordinaten-Bestimmung, für die auf AA', BB' nnd CC' sich beziehenden u, u' und u'' Ausdrücke, die ganz auf dieselbe Weise gebildet sind, als die Ausdrücke bei (2) und (3), z. B.:

$$u=\frac{u'u''(u_{,,}-u_{,})-u_{,}u_{,,}(u''-u')}{u'u_{,,}-u''u_{,}}. \qquad (4)$$

Wenn wir nun annehmen, dass der Durchschnitt von AA' nnd BB' zum Anfangspunct der Coordinaten genommen worden sei, so ist $\frac{1}{u}=0$ nnd $\frac{1}{u'}=0$, und hieraus folgt, wie in der vorigen Nummer, dass auch $\frac{1}{u''}=0$ nnd also CC' durch den Durchschnitt von AA' und BB' geht.

Wenn AA' und BB' parallel sind und wir parallel mit ihnen, die erste Axe nehmen, so kommt wiederum $\frac{1}{u}=0$ nnd $\frac{1}{u'}=0$ nnd also $\frac{1}{u''}=0$, d. h. auch CC' ist mit AA' und BB' parallel.

422. Wenn wir in der 420. Nummer v nnd w gegenseitig mit einander vertauscht hätten, so würden die Gleichungen (1) noch immer drei Puncte der ersten Axe darstellen nnd statt (2) hätten wir folgende Gleichung erhalten, in der wir v wiederum auf AA' beziehen:

$$v=\frac{v'v''(v_{,,}-v_{,})-v_{,}v_{,,}(v''-v')}{v'v_{,,}-v''v_{,}}. \qquad (5)$$

Um nichts mit Stillschweigen zu übergehen, was unmittelbar in den zuletzt entwickelten Ausdrücken liegt, erwähnen wir folgende Sätze, deren Beweis darin enthalten ist, dass in den Gleichungen (2), (5) und (4) c' und c'' nicht vorkommen.

Wenn die Scheitel zweier Winkel auf einer gegebenen geraden Linie fortrücken, während ihre Schenkel sich um vier in gerader Linie liegende Puncte drehen, so bilden die beiden Winkel in ihren verschiedenen Lagen Vierecke, deren zwei Diagonalen durch zwei feste Puncte gehen, die mit jenen vier Puncten in derselben geraden Linie liegen.

Wenn die Scheitel zweier Winkel von constanter Grösse auf einer geraden Linie, ohne dass die Winkel sich drehen, fortrücken, so bleiben die beiden Diagonalen des durch die beiden Winkel in allen ihren Lagen gebildeten Vierecks mit sich selbst parallel.

Wenn man um vier Puncte derselben geraden Linie zwei Paare durch diese Puncte gehender Parallel-Linien sich drehen lässt, so gehen die beiden Diagonalen der, in den verschiedenen Lagen der Parallel-Linien gebildeten, Parallelogramme durch zwei auf derselben geraden Linie liegende Puncte.

Es können in diesem letzten Satze auch die vier Puncte nnendlich weit genommen werden, alsdann verschieben sich die beiden Parallel-Linien jedes Paares parallel mit

sich selbst, und zwar so, dass ihr gegenseitiger Abstand sich nicht ändert; alsdann bleiben die in Rede stehenden Diagonalen mit sich selbst parallel.

423. Wenn sechs gerade Linien, paarweise genommen, sich in drei Puncten derselben geraden Linie schneiden, oder parallel sind, so können wir aus denselben vier verschiedene Paare solcher Dreiecke bilden, wie sie in den Sätzen der 417. und 418. Nummer verlangt werden, und erhalten also auch viermal drei gerade Linien, die durch denselben Punct gehen, oder parallel sind. Und somit ist der in dem Vorstehenden bewiesene allgemeine Satz folgender:

Wenn man durch jeden von solchen drei Puncten, die in gerader Linie liegen, zwei gerade Linien zieht, oder wenn man drei Paare paralleler gerader Linien nimmt, so schneiden sich die drei verschiedenen Linien-Paare zu zwei und zwei in dreimal vier Puncten, durch welche man noch dreimal zwei gerade Linien legen kann, die ein Viereck mit seinen beiden Diagonalen bilden.

424. Wir wollen zu einer zweiten Gruppe von Sätzen übergehen.

Wenn irgend zwei gerade Linien und auf jeder derselben drei Puncte, auf der einen die Puncte A, B, C, auf der anderu A', B', C' gegeben sind, so schneiden sich die drei Linien-Paare AB' und A'B, AC und A'C, BC und B'C in solchen drei Puncten S, S', S'', die in gerader Linie liegen.

Um diesen Satz zu beweisen, wollen wir die beiden gegebenen geraden Linien, die sich in O schneiden mögen, zu Coordinaten-Axen nehmen und alsdann die reciproken Werthe von OA, OB und OC durch v', v'' und v''', die reciproken Werthe von OA', OB' und OC' durch u', u'' und u''' bezeichnen. Hiernach ergibt sich, indem wir w constant nehmen, folgende Coordinaten-Bestimmung für jene drei Linien-Paare:

$$A'B \begin{cases} u = u', \\ v = v''; \end{cases} \qquad AB' \begin{cases} u = u'', \\ v = v'; \end{cases}$$

$$A'C \begin{cases} u = u', \\ v = v'''; \end{cases} \qquad AC' \begin{cases} u = u''', \\ v = v'; \end{cases}$$

$$B'C \begin{cases} u = u'', \\ v = v'''; \end{cases} \qquad BC' \begin{cases} u = u''', \\ v = v''. \end{cases}$$

Für die beiden ersten Durchschnittspuncte, S und S, erhalten wir also folgende Gleichungen:

$$u-u'' = -\frac{u''-u'}{v''-v'}(v-v'),$$

$$u-u''' = -\frac{u'''-u'}{v'''-v'}(v-v').$$

Ziehen wir diese beiden Gleichungen von einander ab und multipliciren alsdann mit $(v'''-v')(v''-v')$, so kommt:

$$(v''-v')(v'''-v')(u''-u''') = M(v-v'), \qquad (1)$$

indem wir, der Kürze halber,

$$u''v'-v''u'-u'''v'+v'''u'+u'''v''-v'''u'' = M,$$

setzen. Aus der Gleichung (1) erhält man folgende:

$$Mv = N, \qquad (2)$$

wenn man:

$$(v'-v'')v'''u''+(v''-v''')v'u'+(v'''-v')v''u'' = N,$$

setzt.

Wenn wir u' und u'', v' und v'' gegenseitig mit einander vertauschen, so bleibt der erste Durchschnitt S derselbe, indem AB' an die Stelle von A'B und, umgekehrt, A'B an die Stelle von AB' tritt; statt des zweiten Durchschnittes S' erhalten wir aber den dritten S''. Durch jene Accent-Vertauschung bleiben M und N unverändert, ausgenommen, dass, beide zugleich, ihr Zeichen ändern; es bleibt also der Werth von v identisch derselbe, wenn wir statt des zweiten Punctes den dritten nehmen. Es liegen also alle drei Puncte in derselben geraden Linie.

425. Wenn wir die drei Puncte auf jeder der beiden gegebenen geraden Linien unter einander vertauschen, so erhalten wir neue Constructionen des eben bewiesenen Satzes. Solcher Constructionen gibt es offenbar so viele als die drei Puncte auf einer beliebigen jener beiden geraden Linien, etwa der zweiten, sich permutiren lassen, also sechs. Hiernach erhalten wir folgendes Schema von sechs mal drei Puncten, die in gerader Linie liegen:

(AB', A'B),	(AC', A'C),	(BC', B'C);
(AA', B'B),	(AC', B'C),	(BC', A'C);
(AB', C'B),	(AA', C'C),	(BA', B'C);
(AC', A'B),	(AB', A'C),	(BB', C'C);
(AC', B'B),	(AA', B'C),	(BA', C'C);
(AA', C'B),	(AB', C'C),	(BB', A'C).

Die zweite, dritte und vierte, so wie die erste, fünfte und sechste von diesen geraden Linien gehen durch denselben Punct.*) Die drei erstgenannten geraden Linien erhält man, indem man nach einander A' und B', A' und C', B' und C', also auch u' und u'', u' und u''', u'' und u''' gegenseitig vertauscht. Nach dieser Bemerkung ergibt sich sogleich aus (1) folgende Bestimmung für die, diesen drei geraden Linien zukommenden, v, die wir zur Unterscheidung unten accentuiren wollen:

$$(v'''-v')(v''-v')(u'-u'') = M'v_{,}-M'v',$$
$$(v'''-v')(v''-v')(u''-u') = M''v_{,,}-M''v',$$
$$(v'''-v')(v''-v')(u'''-u'') = M'''v_{,,,}-M'''v'.$$

Wenn wir diese drei Gleichungen addiren, so verschwindet der erste Theil der resultirenden Gleichung; wir überzeugen uns überdies leicht, dass

$$M'+M''+M''' = 0,$$

und somit erhalten wir:

$$M'v_{,}+M''v_{,,}+M'''v_{,,,} = 0,$$

oder:

$$M'(v_{,}-v_{,,,})+M''(v_{,,}-v_{,,,}) = 0.$$

Da M' und M'' auf keine Weise sich ändern, wenn wir u mit v vertauschen, so erhält man zwischen den auf die drei in Rede stehenden geraden Linien sich beziehenden u, die wir zur Unterscheidung ebenfalls unten accentuiren wollen, aus der letzten Gleichung unmittelbar folgende:

$$M'(u_{,}-u_{,,,})+M''(u_{,,}-u_{,,,}) = 0.$$

---

*) Diesen Satz hat H. Steiner in Gergonne's Annalen (Tome XIX Pag. 128) zum Beweise vorgelegt. Es ist derselbe ein besonderer Fall eines allgemeinen Satzes, mit dem wir uns später beschäftigen werden, und in welchem an die Stelle des Systems der beiden gegebenen geraden Linien irgend eine Linie zweiter Ordnung tritt.

Aus den beiden letzten Gleichungen folgt:

$$\frac{v_{,}-v_{,,,}}{u_{,}-u_{,,,}} = \frac{v_{,,}-v_{,,,}}{u_{,,}-u_{,,,}},$$

und aus dieser Gleichung ist ersichtlich, dass die drei geraden Linien $(v_{,}, u_{,})$, $(v_{,,}, u_{,,})$ und $(v_{,,,}, u_{,,,})$ durch ein und denselben Punct gehen.

Wenn wir, etwa von der zweiten, geraden Linie des obigen Schema's ausgehen, und dann nach und nach A' und B', A' und C', B' und C' mit einander vertauschen, so kommen wir zu der ersten, fünften und sechsten Linie desselben Schema's, und wir können gerade auf dieselbe Weise zeigen, dass auch diese drei geraden Linien in demselben Puncte sich schneiden.

426. Den in der vorigen Nummer bewiesenen Satz erhalten wir unmittelbar durch Hülfe des Satzes der 418. Nummer. Denn, da die drei geraden Linien A'B, AC' und B'C den drei andern AB', A'C und BC' in dreien Puncten derselben geraden Linie, der ersten Linie des obigen Schema's, begegnen, so gehen die drei geraden Linien

(AC', B'C), (A'C, BC');
(A'B, B'C), (AB', BC');
(A'B, AC'), (AB', A'C);

in denen wir sogleich die zweite, dritte und vierte des Schema's wiedererkennen, durch ein und denselben Punct *).

427. Die letzten beiden Sätze können wir in folgende Aussage zusammenfassen.

Wenn zwei gerade Linien und auf jeder derselben drei Puncte gegeben sind, so können wir diese Puncte durch neun neue gerade Linien verbinden. Diese neun geraden Linien schneiden sich in achtzehn neuen Puncten. Von diesen achtzehn Puncten liegen sechsmal drei in gerader Linie. Von diesen sechs geraden Linien gehen drei und drei durch denselben Punct.

428. Wenn wir von einem der beiden letztgenannten Puncte, den drei in demselben sich schneidenden geraden Linien und den drei auf jeder von diesen Linien liegenden Puncte ursprünglich ausgehen, so können wir diejenigen drei geraden Linien construiren, die durch den zweiten jener beiden Puncte gehen. Hiernach erhalten wir, indem wir die Construction des letzten Satzes aus einem andern Gesichtspuncte betrachten, folgende Erweiterung des Satzes der 418. Nummer.

Wenn irgend drei Dreiecke so liegen, dass ihre Winkelpuncte auf drei durch denselben Punct gehenden geraden Linien sich befinden, so gehen diejenigen drei geraden Linien, welche die Durchschnitte der diesen Winkelpuncten respective gegenüberliegenden Seiten dieser paarweise zusammengestellten Dreiecke enthalten, durch ein und denselben Punct.

Ich führe diesen Satz, der einer viel grössern Ausdehnung noch fähig ist, hier nur, der Beziehung zu den vorhergehenden Sätzen wegen, an. Später, wo ich an Beispielen zu zeigen gedenke, wie sich durch eine einfache Verbindung allgemeiner Symbole ver-

*) Auf ganz ähnliche Weise können wir zeigen, dass in dem Satze der 74. Nummer von den sechs Durchschnitten drei und drei in gerader Linie liegen, nemlich (Tab. II. Fig. 23) einerseit S, T, V und andererseits R, W, U.

Digitized by Google

mittelst unbestimmter Coefficienten sehr zusammengesetzte Sätze beweisen lassen, werde ich auf den vorstehenden Satz zurückkommen. Doch will ich den Beweis desselben, der nach den frühern Sätzen sehr nahe liegt, noch schliesslich folgen lassen.

Die drei gegebenen Dreiecke seien ABC, A'B'C' und A''B''C'' und die Winkelpuncte A, A' und A'', B, B' und B'', C, C' und C'' liegen auf solchen drei geraden Linien, die durch denselben Punct gehen. Alsdann schneiden sich nach dem zu beweisenden Satze, folgende drei geraden Linien, von denen jede drei Durchschnittspuncte gegenüberliegender Dreiecksseiten enthält:

(BC, B'C'),	(AC, A'C'),	(AB, A'B');
(BC, B''C''),	(AC, A''C''),	(AB, A'B'');
(B'C', B''C''),	(A'C', A''C''),	(A'B', A''B'');

in demselben Puncte. Dies ist sogleich ersichtlich. Es bilden nemlich die geraden Linien BC, B'C' und B''C'', AC, A'C' und A''C'' zwei Dreiecke, deren Seiten sich in den drei Puncten C, C' und C'', welche in gerader Linie liegen, schneiden. Die den durch diese drei Puncte gehenden Seiten gegenüberstehenden Winkelpuncte beider Dreiecke sind die beiden ersten Puncte der dritten, zweiten und ersten jener drei geraden Linien. Diese drei Linien gehen also (418) durch denselben Punct. —

429. Die folgenden Nummern enthalten solche Entwicklungen, die mit Ausdrücken, die zu Anfang dieses Abschnittes entwickelt worden sind, in innigem Zusammenhange stehen und aus der Form dieser Ausdrücke unmittelbar hervorgehen.

Wenn wir die beiden Gleichungen:

$$au+bv+w = o,$$
$$a'u+b'v+w' = o,$$

welche irgend zwei gegebene Puncte darstellen, der Kürze halber durch

$$U = o, \qquad U' = o,$$

bezeichnen, so stellt die Gleichung:

$$U+U' = o,$$

denjenigen Punct dar, welcher in der Mitte zwischen den beiden gegebenen liegt (410). Bezeichnen wir die Gleichung eines dritten Punctes:

$$a''u+b''v+w = o,$$

durch ein neues Symbol:

$$U'' = o,$$

so stellt auch folgende Gleichung:

$$U+U'+U'' = o \qquad (1)$$

einen Punct dar. Um diese Gleichung zu befriedigen, setzen wir zugleich

$$U+U' = o, \text{ und } U'' = o;$$
$$U+U'' = o, \text{ „ „ } U' = o;$$
$$U'+U'' = o, \text{ „ „ } U = o;$$

und erhalten also drei Paare von Puncten, durch welche drei gerade Linien bestimmt werden, die alle drei durch den zu construirenden Punct gehen. Diese drei Puncten-Paare sind aber, was die Form der letzten Gleichungen zeigt, die drei gegebenen Puncte und die Mitten zwischen je zweien derselben. Die vorstehende Construction der Gleichung (1) enthält also folgenden allbekannten Satz:

In jedem Dreiecke schneiden sich diejenigen drei geraden Linien, welche die drei Winkelpuncte mit den drei Mitten der gegenüberliegenden Seiten verbinden, in ein und demselben Puncte.

Digitized by Google

430. Fügen wir zu den drei gegebenen Puncten noch einen vierten hinzu, dessen Gleichung folgende sei:

$$a'''u+b'''v+w = o,$$

und bezeichnen diese Gleichung wiederum, der Kürze halber, durch:

$$U''' = o,$$

so stellt die Gleichung:

$$U+U'+U''+U''' = o \qquad (2)$$

einen neuen Punct dar. Wir können diese Gleichung auf nachstehende dreifache Weise in zwei Gleichungen zerlegen:

$$U+U' = o, \text{ und } U''+U''' = o;$$
$$U+U'' = o, \text{ „ „ } U'+U''' = o;$$
$$U+U''' = o, \text{ „ „ } U'+U'' = o;$$

und erhalten also drei leicht zu bestimmende Paare von Puncten, und hiernach drei gerade Linien, welche durch den durch (2) dargestellten Punct gehen. Der auf diese Weise bewiesene Satz ist folgender.

Wenn man in irgend einem Viereeke die Mitten der gegenüberliegenden Seiten und der beiden Diagonalen durch drei gerade Linien verbindet, so gehen diese drei geraden Linien durch ein und denselben Punct.

Man hätte die Gleichung (2) noch auf folgende Weise in zwei einfachere zerlegen können:

$$U+U'+U'' = o, \text{ und } U''' = o;$$
$$U+U'+U''' = o, \text{ „ „ } U'' = o;$$
$$U+U''+U''' = o, \text{ „ „ } U' = o;$$
$$U'+U''+U''' = o, \text{ „ „ } U = o;$$

und hiernach vier neue gerade Linien erhalten, die durch denselben Punct (2) gehen.

431. Wenn wir, bei der bisherigen Bezeichnung, statt der Gleichung (1) der 429. Nummer folgende nehmen:

$$\mu U+\mu' U'+\mu'' U'' = o, \qquad (3)$$

indem μ, μ' und μ'' beliebige Coefficienten bedeuten, so stellt auch diese Gleichung einen Punct dar. Und, auf dieselbe Weise, als in der angeführten Nummer, erhalten wir drei durch jenen Punct gehende gerade Linien, nemlich diejenigen, welche folgende drei Puncten-Paare mit einander verbinden:

$$\mu U+\mu' U' = o, \text{ und } U'' = o;$$
$$\mu U+\mu'' U'' = o, \text{ „ „ } U' = o;$$
$$\mu' U'+\mu'' U'' = o, \text{ „ „ } U = o.$$

Diese drei geraden Linien sind leicht zu bestimmen, die erste derselben verbindet in dem Dreiecke UU'U'' den Winkelpunct U'' mit demjenigen Puncte der gegenüberliegenden Seite UU', dessen Abstände von den beiden Puncten U und U' sich verhalten wie μ': μ. Die zweite und dritte gerade Linie gehen durch die beiden andern Winkelpuncte U' und U und durch diejenigen beiden Puncte, welche auf den beiden gegenüberstehenden Seiten UU'' und U'U'' so liegen, dass ihre Abstände von U und U'' und von U' und U'' sich respective verhalten wie μ'': μ und μ'': μ'. (410).

Diese drei gerade Linien schneiden sich also in demselben Puncte und dieser Punct ist bekanntlich kein anderer, als der Schwerpunct dreier Gewichte, die sich wie μ: μ': μ'' verhalten und die wir uns in den Winkelpuncten des Dreiecks in U, U' und U'' angebracht denken.

Digitized by Google

Wie die vorstehende Gleichung (3) können wir auch folgende Gleichung:

$$\mu U+\mu' U'+\mu'' U''+\mu''' U'''\ldots = 0, \qquad (1)$$

deren erster Theil aus beliebig vielen Gliedern bestehen mag, durch allmählige Zerlegung construiren und erhalten auf diese Weise eine grössere Anzahl von geraden Linien, die alle durch den durch (4) dargestellten Punct gehen. Es ist dieser Punct der Schwerpunct von Gewichten, die sich verhalten wie $\mu : \mu' : \mu'' : \mu''' : \ldots$ und respective in den Puncten $U, U', U'', U''' \ldots$ angebracht sind; und nach den Grundsätzen der Statik über die Zusammensetzung paralleler Kräfte erhalten wir die Bestimmung derselben geraden Linien als oben, die alle durch den Punct (4) gehen. Für solche barycentrische Betrachtungsweisen, die auf eine ungemein leichte Weise zu vielen Sätzen der Situations-Geometrie führen, erhalten wir also durch die Einführung der neuen Gleichungen einen Algorithmus, der zugleich überflüssig macht, dass, der Geometrie fremde, Begriffe in dieselbe eingeführt werden *).

432. Wenn wir durch irgend einen beliebigen Punct in der Ebene eines gegebenen Dreiecks und durch die drei Winkelpuncte desselben drei gerade Linien ziehen, so können wir die Durchschnittspuncte dieser drei Linien mit den, den bezüglichen Winkelpuncten gegenüberliegenden Seiten, nach der vorigen Nummer, durch folgende Gleichungen darstellen:

$$\begin{aligned} \mu U + \mu' U' &= 0, \\ \mu U + \mu'' U'' &= 0, \qquad (5) \\ \mu' U' + \mu'' U'' &= 0; \end{aligned}$$

und nach der 410. Nummer erhalten wir für die vierten harmonischen Theilungspuncte auf den drei Dreiecks-Seiten folgende Gleichungen:

---

*) Einen eben so einfachen Algorithmus liefern die gewöhnlichen Gleichungen für diejenigen Beweisführungen, die sich auf die Lehre von der Zusammensetzung solcher Kräfte, die in derselben Ebene nach gegebenen Richtungen mit gegebener Energie wirken. Legen wir nemlich (34), bei der Voraussetzung rechtwinkliger Coordinaten, lineare Gleichungen von folgender Form zu Grunde:

$$(y-ax-b)\cos\alpha = 0,$$

wo α denjenigen Winkel bedeutet, den die bezügliche gerade Linie mit der ersten Axe bildet, bezeichnen der Kürze halber den ersten Theil solcher Gleichungen durch A, und unterscheiden diese A, sobald sie sich auf verschiedene gerade Linien beziehen, durch Accente, so sehen wir sogleich (32), dass die Gleichung:

$$A+A' = 0,$$

diejenige gerade Linie darstellt, nach welcher die aus zweien gleichen Kräften, die nach den gegebenen geraden Linien:

$$A = 0, \qquad A' = 0,$$

wirken, resultirende Kraft wirkt. Ebenso bezeichnet die Gleichung:

$$\mu A+\mu' A' = 0,$$

die Richtung derjenigen Kraft dar, die aus solchen zwei Kräften, die nach denselben beiden gegebenen geraden Linien wirken und sich verhalten wie $\mu : \mu$ (36). Und endlich stellt, bei analoger Bezeichnung, wenn beliebig viele Kräfte gegeben sind, die sich verhalten wie $\mu : \mu' : \mu'' : \mu''' : \ldots$ und nach den gegebenen geraden Linien:

$$A = 0, \qquad A' = 0, \qquad A'' = 0, \qquad A''' = 0, \text{ u. s. w.}$$

wirken, folgende Gleichung:

$$\mu A+\mu' A'+\mu'' A''+\mu''' A'''+\ldots = 0,$$

die Richtung der resultirenden Kraft dar. Diese Gleichung können wir auf ähnliche Weise construiren als die Gleichung (4) des Textes.

$$\begin{aligned} \mu U - \mu' U' &= 0, \\ \mu U - \mu'' U'' &= 0, \\ \mu' U' - \mu'' U'' &= 0. \end{aligned} \qquad (6)$$

Von diesen drei Gleichungen hedingen je zwei die dritte: die bezüglichen drei Puncte gehören derselben geraden Linie an. Also:

Wenn man von irgend einem Punete in der Ebene eines gegebenen Dreiecks drei gerade Linien nach den drei Winkelpuncten desselben zieht, so liegen die vierten harmonischen Theilungspuncte zu den drei Durchschnitten dieser Linien mit jeder der drei Dreiecks-Seiten und den bezüglichen Winkelpuneten alle drei in gerader Linie. *)

433. Die durch die Gleichungen (6) dargestellten harmonischen Theilungspuncte können wir leicht auf folgende Weise construiren. Wenn wir z. B. die beiden letzten der drei Gleichungen (5) von einander abziehen, so erhalten wir die erste der Gleichungen (6). Es liegt also der durch diese Gleichung dargestellte Punct auf der, die durch jene beiden Gleichungen dargestellten Puncte verbindenden, geraden Linie, also im Durchschnitte dieser Linie mit der Dreiecksseite UU'. Hiernach erhält der letzte Satz folgende Aussage.

Wenn man auf den drei Seiten eines gegebenen Dreiecks drei Punete so annimmt, dass die drei geraden Linien, welche diese Punete mit den gegenüberliegenden Winkelpuncten verbinden, durch denselben Punct gehen, so schneiden diejenigen drei geraden Linien, welche diese Punete, paarweise genommen, verbinden, die drei Dreiecksseiten in solchen drei Puneten, die in gerader Linie liegen.

434. Wenn man die gegenüberliegenden Seiten irgend eines gegebenen Vierecks UU'U''U''', nemlich UU'' und U'U''', UU' und U''U''', bis zu ihrem gegenseitigen Durchschnitte verlängert, so ergeben sich zwei neue Puncte, U^{IV} und U^{V}, deren Gleichungen, von derselben Form als die, in den letzten Nummern gebrauchten, wir durch

$$U^{IV} = 0, \qquad U^{V} = 0,$$

bezeichnen wollen. Alsdann haben wir, wenn wir den ersten dieser beiden Puncte betrachten, folgende identische Gleichungen:

$$\begin{aligned} \mu U + \mu'' U'' &= U^{IV} \\ \mu' U' + \mu''' U''' &= U^{IV} \end{aligned} \qquad (1)$$

wobei μ, μ', μ'' und μ''' unbestimmte Coefficienten bedenten, die aber, weil wir, nach der eben gemachten Bemerkung, dass die verschiedenen Symbole U, U' u. s. w. solche Ausdrücke vertreten, in denen der Coefficient von w gleich Eins ist, durch folgende Gleichungen verbunden sind:

$$\begin{aligned} \mu + \mu'' &= 1, \\ \mu' + \mu''' &= 1. \end{aligned} \qquad (2)$$

Aus den beiden Gleichungen (1) ergibt sich folgende identische Gleichung:

$$\mu U + \mu'' U'' = \mu' U' + \mu''' U''', \qquad (3)$$

---

*) Auch die harmonische Theilung steht mit der Zusammensetzung der Kräfte in genauer Beziehung. Wenn nemlich irgend zwei Kräfte, die in derselben Ebene wirken, gegeben sind, und man bestimmt ihre Mittelkraft; lässt dann eine beliebige derselben nach entgegengesetzter Richtung wirken, und bestimmt wiederum die Mittelkraft, so bilden die Richtungen der beiden gegebenen und der beiden resultirenden Kräfte vier Harmonicalen. Lässt man dieselben vier Kräfte auf Puncte desselben geradlinigen Hebels wirken, so sind die vier Angriffspuncte vier harmonische Theilungspuncte.

Digitized by Google

und aus dieser wiederum folgende:

$$\mu U - \mu''' U''' = \mu' U' - \mu'' U''.$$

Wenn wir die beiden Theile dieser Gleichung gleich Null setzen:

$$\mu U - \mu''' U''' = 0,$$
$$\mu' U' - \mu'' U'' = 0;$$

so stellt die erste dieser resultirenden Gleichungen einen solchen Punct dar, der auf UU'', und die zweite Gleichung einen solchen Punct dar, der auf $U'U''$ liegt, und da beide Gleichungen identisch sind, stellt jede beliebige derselben denjenigen Punct dar, der im Durchschnitte von UU''' und $U'U''$ liegt, mithin den Punct U^{IV}. Es ist also, wenn wir wiederum auf die Form der durch die verschiedenen Symbole dargestellten Ausdrücke Rücksicht nehmen:

$$\mu U - \mu''' U''' = (\mu - \mu''') U^{IV},$$
$$\mu' U' - \mu'' U'' = (\mu' - \mu'') U^{IV}. \qquad (4)$$

Wenn wir die erste der beiden Gleichungen (1) mit $(\mu - \mu''')$ multipliciren und dann zu der ersten der Gleichungen (4) addiren, ergibt sich:

$$((\mu - \mu''')\mu + \mu) U + (\mu - \mu''')\mu'' U' - \mu''' U''' = (\mu - \mu''')(U^{IV} + U^{V}). \qquad (5)$$

Bringen wir ferner alle Glieder der Gleichung (3) auf die erste Seite:

$$\mu U - \mu' U' + \mu'' U'' - \mu''' U''' = 0, \qquad (6)$$

multipliciren mit $(-\mu)$ und addiren diese Gleichung alsdann zur vorhergehenden, so kommt, wenn wir auf die Bedingungs-Gleichungen (2) Rücksicht nehmen:

$$\mu'\mu(U + U') - \mu''\mu'''(U'' + U''') = (\mu - \mu''')(U^{IV} + U^{V}) = (\mu\mu' - \mu''\mu''')(U^{IV} + U^{V}). \qquad (7)$$

Die Form dieser Gleichung zeigt, dass die, durch die drei Gleichungen:

$$U + U' = 0,$$
$$U'' + U''' = 0,$$
$$U^{IV} + U^{V} = 0,$$

dargestellten, drei Puncte in gerader Linie liegen. Diese drei Puncte sind aber (410) die drei Mitten von UU', $U''U'''$ und $U^{IV}U^{V}$; und mithin haben wir folgenden bekannten Satz bewiesen, zu dem wir schon früher auf indirectem Wege gekommen sind*):

In jeder vollständigen vierseitigen Figur liegen die Mitten der drei Diagonalen in gerader Linie.

Zugleich zeigt uns die Gleichung (7), dass die Abstände des dritten Punctes von dem ersten und zweiten sich verhalten wie:

$$1 : -\frac{\mu''\mu'''}{\mu\mu'} = U^{IV}U : U^{IV}U : -U^{IV}U : U^{IV}U.$$

Es steht jener Punct von diesen gleichweit ab, wenn:

$$\frac{\mu''}{\mu} = \frac{\mu'''}{\mu'},$$

das heisst, wenn:

$$U^{IV}U : U^{IV}U'' = U^{IV}U' : U^{IV}U''',$$

und entweder U^{IV} zwischen U und U' oder zwischen U' und U'' liegt.

Um den Coefficienten zu finden, mit dem wir die Gleichung (6) multipliciren müssen, und den wir n nennen wollen, haben wir:

$$(\mu - \mu''')\mu + \mu + n\mu = -n\mu',$$

*) Entwicklungen 278. PONCELET, Traité 164.

eine Gleichung, die zugleich mit folgender besteht:

$$(\mu-\mu')\mu''+n\mu'' = -\mu'''-n\mu''',$$

worin eben der Nerv des Beweises liegt.

Statt aus der ersten Gleichung bei (1) und (4) die Gleichung (5) herzuleiten, hätten wir eine entsprechende Gleichung durch Verbindung einer beliebigen der beiden Gleichungen (1) mit einer beliebigen der beiden Gleichungen (4) erhalten können. Statt der Gleichung (5) ergibt sich endlich eine symmetrische, wenn wir beide Gleichungen (1) mit $(\mu-\mu'') = (\mu'-\mu''')$ multipliciren und dann zu beiden Gleichungen (4) addiren.

435. Wenn wir statt Ausdrücke von der Form: $(au+bv+w)$, die wir in der vorigen Nummer U, U' u. s. w. genannt haben, nun Ausdrücke von der Form: $(u+bv+cw)$, betrachten, in denen der Coefficient von u gleich Eins ist, und solche Ausdrücke durch dieselben Symbole bezeichnen, so erhält die Gleichung (7) der vorigen Nummer eine andere Deutung, ohne dass in dem Entwicklungs-Gange irgend etwas sich ändert.

Wenn von folgenden vier Gleichungen:

$$U = 0, \qquad U' = 0, \qquad U-U' = 0, \qquad U+U' = 0,$$

die beiden ersten irgend zwei gegebene Puncte darstellen, so stellt die dritte Gleichung (bei den eben gemachten Voraussetzungen) den Durchschnittspunct der, die beiden gegebenen Puncte verbindenden, geraden Linie mit der ersten Axe dar, und somit die vierte Gleichung den vierten harmonischen Theilungspunct zu diesen drei Puncten. Hiernach stellen also die drei Gleichungen:

$$U+U' = 0,$$
$$U''+U''' = 0,$$
$$U^{IV}+U^{V} = 0,$$

die drei vierten harmonischen Theilungspuncte zu U und U', U'' und U''', U^{IV} und U^{V} und den drei Durchschnittspuncten der drei Diagonalen UU', U''U''', $U^{IV}U^{V}$ mit der ersten Axe dar. Da diese Axe jede beliebige sein kann, so ergibt sich der folgende Satz:

Wenn man in der Ebene einer gegebenen vollständigen vierseitigen Figur eine beliebige Transversale zieht, die die drei Diagonalen in drei Puncten schneidet, und zu diesen Durchschnittspuncten und den drei bezüglichen Paaren gegenüberliegender Winkelpuncte der vierseitigen Figur die vierten harmonischen Theilungspuncte sucht, so erhält man solche drei Puncte, die in gerader Linie liegen.

Wenn wir annehmen, dass die gegebene Transversale unendlich weit liege, so erhalten wir aus diesem Satze den Satz der vorigen Nummer als besondern Fall *).

---

*) Auf dieselbe Weise, wie wir in der 434 Nummer die Gleichungen von Puncten mit einander verbunden haben, können wir auch die gewöhnlichen Gleichungen von geraden Linien mit einander verbinden. Wir wollen zuerst Ausdrücke von der Form: $(y+Bx+C)$, in denen der Coefficient von y gleich Eins ist, zu Grunde legen und durch Symbole Z, Z' u. s. w., denen wir zur Unterscheidung Accente hinzufügen, bezeichnen. Bei diesen Voraussetzungen stellen die vier Gleichungen:

$$Z = 0, \qquad Z' = 0, \qquad Z'' = 0, \qquad Z''' = 0,$$

vier gerade Linien dar, welche irgend ein Viereck bilden, in dem wir die beiden ersten und die beiden letzten dieser Linien als gegenüberstehende Seiten nehmen können, und dessen beide Diagonalen wir durch die Gleichung:

$$Z^{IV} = 0, \qquad Z^{V} = 0,$$

darstellen wollen. Alsdann hat man:

$$\mu Z+\mu''Z'' = \mu'Z'+\mu'''Z''' = Z^{IV},$$

436. Wenn wir durch irgend einen Punct in der Ebene eines gegebenen Dreiecks Fig. 2.
UU'U" und die Winkelpuncte dieses Dreiecks drei gerade Linien ziehen, so können wir die Durchschnittspuncte dieser drei Linien mit den, jenen Winkelpuncten bezüglich gegenüberliegenden, Seiten, nach der 432. Nummer immer durch folgende drei Gleichungen darstellen:

$$\begin{aligned} \mu U + \mu' U' &= 0, \\ \mu U + \mu'' U'' &= 0, \\ \mu' U' + \mu'' U'' &= 0. \end{aligned} \qquad (1)$$

Wir wollen nun die unbestimmten Coefficienten in den Gleichungen solcher drei Puncte, auf die wir bisher nur beiläufig Rücksicht genommen haben, näher betrachten. Die drei in Rede stehenden Puncte, die auf UU', UU" und U'U" liegen, seien V", V' und V. Bedeuten alsdann U, U' und U" Ausdrücke von der Form: (au+bv+w), in welchen der Coefficient von w gleich Eins (oder gleich einer gegebenen Constanten) ist, so ist in der zweiten Figur (410):

---

und hieraus:

$$\mu Z - \mu''' Z''' = \mu' Z' - \mu'' Z'' = (\mu - \mu''') Z^{V};$$

zwischen den unbestimmten Coefficienten finden auch hier die beiden Bedingungs-Gleichungen:

$$\mu + \mu'' = 1, \qquad \mu' + \mu''' = 1,$$

Statt. Wir kommen ferner, wie im Texte, wenn wir auf die Bedingungs-Gleichung

$$\mu Z - \mu' Z' + \mu'' Z'' - \mu''' Z''' = 0,$$

Rücksicht nehmen, zu folgender End-Gleichung:

$$\mu\mu' (Z + Z') - \mu'' \mu''' (Z'' + Z''') = (\mu - \mu'')(Z^{IV} + Z^{V}). \qquad (1)$$

Um diese Gleichung zu deuten, bemerken wir, dass die vier Gleichungen:

$$Z = 0, \quad Z' = 0, \quad Z - Z' = 0, \quad Z + Z' = 0, \qquad (2)$$

vier Harmonicalen darstellen, von denen die dritte der zweiten Axe parallel ist. Hiernach erhalten wir die vierte Harmonicale, wenn wir den Durchschnitt der beiden ersten mit der Mitte des von denselben auf der zweiten Axe interceptirten Segmentes durch eine gerade Linie verbinden. Und somit haben wir, da jede beliebige gerade Linie zur zweiten Axe genommen werden kann, folgenden Satz bewiesen, auf den wir früher schon (379) auf indirectem Wege gekommen sind:

Wenn man die Durchschnitte der beiden Paare gegenüberliegender Seiten und der beiden Diagonalen mit den Mitten der von diesen drei Linien-Paaren auf einer gegebenen geraden Linie interceptirten Segmente verbindet, so erhält man drei gerade Linien, die durch ein und denselben Punct gehen.

Wenn wir statt Ausdrücke von der Form: (y+Bx+C), durch Z, Z' u. s. w. zu bezeichnen, nun durch dieselben Symbole Ausdrücke von der Form: (Ay+Bx+1) bezeichnen, so erhält die Gleichung (1) eine andere Deutung. Alsdann stellen die Gleichungen (2) immer noch vier Harmonicalen dar, aber die dritte derselben ist nicht mehr der ersten Axe parallel, sondern geht nun durch den Anfangspunct der Coordinaten. Da dieser Anfangspunct jeder beliebige sein kann, so ergibt sich folgender Satz:

Wenn man von einem beliebigen Puncte in der Ebene eines gegebenen Vierecks nach den Durchschnitten der beiden Paare gegenüberliegender Seiten und dem Durchschnitte der beiden Diagonalen drei gerade Linien zieht, so gehen die drei vierten Harmonicalen zu jenen drei Linien-Paaren und diesen drei geraden Linien durch ein und denselben Punct.

Wenn wir annehmen, dass der beliebige Punct unendlich weit auf einer gegebenen geraden Linie fortrücke, so erhalten wir den ersten Satz dieser Note als besondern Fall.

Wir können dem letzten Satze eine andere Aussage geben, wenn wir bemerken, dass ein Viereck mit seinen beiden Diagonalen auch als ein Dreieck anzusehen ist, dessen drei Winkelpuncte mit irgend einem Puncte durch drei gerade Linien verbunden sind. Die drei Durchschnitte dieser drei Linien mit den Seiten des Dreiecks sind alsdann die Durchschnitte der beiden Paare gegenüberliegender Seiten und der beiden Diagonalen des Vierecks.

Digitized by Google

$$\frac{\mu'}{\mu} = \frac{V''U}{V''U'}, \qquad \frac{\mu}{\mu''} = \frac{V'U''}{V'U}, \qquad \frac{\mu''}{\mu'} = \frac{VU'}{VU''},$$

und da:

$$\frac{\mu'}{\mu} \cdot \frac{\mu}{\mu''} \cdot \frac{\mu''}{\mu'} = 1,$$

so folgt:

$$V''U.\ V'U''.\ VU' = V''U'.\ V'U.\ VU''.$$

Wir haben also nachstehenden Satz bewiesen, der nach den H. H. SERVOIS und PONCELET zuerst von JOHANN BERNOULLI bemerkt worden ist *):

Drei gerade Linien, welche irgend einen in der Ebene eines gegebenen Dreiecks beliebig angenommenen Punct mit den drei Winkelpuncten des Dreiecks verbinden, bestimmen auf den drei Seiten sechs Segmente: das Product dreier nicht an einander stossender Segmente ist dem Producte der drei übrigen gleich.

Fig. 3. 437. Nach der 432. Nummer erhalten wir ebenfalls für die drei Durchschnitte irgend einer beliebigen geraden Linie, mit den drei Seiten eines gegebenen Dreiecks, Gleichungen von folgender Form:

$$\begin{aligned} \mu U - \mu' U' &= 0, \\ \mu U - \mu'' U'' &= 0, \\ \mu' U' - \mu'' U'' &= 0, \end{aligned} \qquad (1)$$

und hiernach erhalten wir, wenn wir jene drei Durchschnitte wiederum V'', V' und V nennen, gerade wie in der vorigen Nummer:

$$V''U.\ V'U''.\ VU' = V''U'.\ V'U.\ VU''.$$

Eine beliebige Transversale, die den drei Seiten eines Dreiecks oder ihren Verlängerungen begegnet, bestimmt auf jeder derselben zwei Segmente: das Product dreier derselben, die auf den drei Seiten von den drei Winkelpuncten an genommen werden, ist dem Producte der drei übrigen gleich.

Nach den Herren BRIANCHON und PONCELET war dieser Satz schon den Alten bekannt. **)

438. Wir wollen nun Ausdrücke von der Form: $(u+bv+cw)$, in denen der Coefficient von u gleich Eins ist, durch die Symbole U, U' und U'' uns dargestellt denken. Alsdann erhalten die unbestimmten Coefficienten eine andere geometrische Bedeutung. Wenn nemlich:

$$\begin{aligned} u+bv+cw &= 0, \\ u+b'v+c'w &= 0, \end{aligned}$$

die Gleichungen zweier gegebener Puncte sind, und wir diese beiden Gleichungen addiren, nachdem wir zuvor die zweite derselben mit einem unbestimmten Coefficienten ν multiplicirt haben, so kommt:

$$u + \frac{b+\nu b'}{1+\nu} v + \frac{c+\nu c'}{1+\nu} w = 0.$$

Bezeichnen wir, der Kürze halber, in dieser Gleichung, die einen Punct darstellt, der mit den gegebenen in gerader Linie liegt, den Coefficienten von v durch b'', so erhalten wir ohne Mühe:

---

*) PONCELET, Traité des propriétés projectives, 158.

**) PONCELET, Propr. proj. 145. PTOLEMAEI Almagestum I. cap. 12.

$$\frac{h - h'}{h'' - h'} = \nu,$$

h, h' und h'' sind aber, bei der Annahme rechtwinkliger Coordinaten, die Cotangenten der Winkel, welche diejenigen geraden Linien, welche durch den Anfangspunct der Coordinaten und durch die drei in Rede stehenden Puncte gehen, mit der ersten Axe bilden (406). Ziehen wir also irgend eine gerade Linie mit der ersten Axe parallel, die jenen drei letztgenannten geraden Linien, der ersten in M, der zweiten in M' und der dritten in M'', begegnet, so ist:

$$\frac{M''M}{M''M'} = \nu.$$

439. Hiernach erhalten wir, wenn wir uns auf die drei Gleichungen (1) der 436. Nummer und auf die 2. Figur beziehen, in welcher wir den beliebigen Punct O als Anfangspunct der Coordinaten und die beliebige gerade Linie AB als der ersten Axe parallel, betrachten: Fig. 2.

$$\frac{\mu'}{\mu} = \frac{v''n}{v''n''}, \qquad \frac{\mu}{\mu''} = \frac{v'u''}{v'n'}, \qquad \frac{\mu''}{\mu'} = \frac{vn'}{vu''},$$

und mithin:

$$v''u.\ v'n''.\ vu' = v''n'.\ v'u.\ vu''. \qquad (1)$$

Nach einer Ueberlieferung von BEAUGRAND beschäftigte sich DÉSARGUES in einer im Jahre 1639 erschienenen, verloren gegangenen, Schrift ausführlich mit der durch die vorstehende Gleichung ausgedrückten Beziehung zwischen sechs Puncten einer geraden Linie, und nannte solche Puncte „*involution de six points*", einen Ausdruck, den H. PONCELET wieder aufnimmt. *) Diese Beziehung von sechs Puncten einer geraden Linie zu einander bildet die Grundlage einer eleganten kleinen Schrift des H. BRIANCHON, in der zugleich bemerkt wird, dass dieselbe Bezichung von sechs Puncten zu einander auf eine siebenfache Weise ausgedrückt werden kann. **)

Dem in der Gleichung (1) enthaltenen Satze können wir hiernach folgende Anssage geben:

Zieht man von irgend einem Punete drei gerade Linien nach den drei Winkelpuncten eines gegebenen Dreiecks und drei andere gerade Linien nach den Fusspuncten dreier von jenen Winkelpuneten auf die gegenüberliegenden Seiten gefällter, in demselben Puncte sich kreuzender gerader Linien, so erhält man sechs gerade Linien, von denen jede beliebige Transversale in solchen sechs Puncten geschnitten wird, die eine Involution bilden.

Man bemerkt bald, dass aus diesem Satze der Satz der 436. Nummer als besonderer Fall sich sogleich ergibt, wenn man den beliebigen Punct unendlich weit auf einer gegebenen geraden Linie fortrücken lässt.

440. Wir erhalten hiernach ferner, ohne irgend eine Entwicklung, indem wir uns auf die Gleichungen (1) der 437. Nummer und auf die dritte Figur beziehen, bei der analogen Bezeichnung dieselbe Gleichung (1) der vorigen Nummer: Fig. 3.

$$v''n.\ v'u''.\ vu' = v''u'.\ v'n.\ vu''.$$

---

*) PONCELET, Prop. proj. 178.

**) Mémoire sur les lignes du second ordre. Par C. J. BRIANCHON. Paris, 1817.

Digitized by Google

Die drei Winkelpuncte des gegebenen Dreiecks UU'U'' und die drei in gerader Linie liegenden Puncte V, V', V'' bilden die sechs Winkelpuncte einer vollständigen vierseitigen Figur. Hiernach ist der bewiesene Satz folgender:

Wenn man von irgend einem Puncte nach den sechs Winkelpuncten einer vollständigen vierseitigen Figur sechs gerade Linien zieht, so bestimmen dieselben auf jeder beliebigen Transversalen eine Involution von sechs Durchschnittspuncten.

Man sieht leicht ein, wie aus diesem Satze der Satz der 437. Nummer als besonderer Fall folgt.

441. Wenn zwei Puncten-Paare, etwa u'' und v'', u' und v', zusammenfallen, so verwandelt sich die letzte Gleichung in folgende:

$$n''n.\ vu' = n'n.\ vu'',$$

d. h. die vier Puncte u'', (v''), u', (v'), n und v sind vier harmonische Theilungspuncte, oder bilden, nach dem Ausdrucke von DESARGUES, eine Involution von vier Puncten. Damit aber die Puncte u'' und v'', u' und v' zusammenfallen, müssen wir den Anfangspunct der Coordinaten in dem Durchschnitte O' der beiden Diagonalen u''v'' und n'v' annehmen. Wenn wir alsdann überdies noch die dritte Diagonale der vierseitigen Figur, nv, als die beliebige Transversale nehmen, so erhalten wir folgenden bekannten Satz:

Zwei Diagonalen einer vollständigen vierseitigen Figur theilen die dritte Diagonale harmonisch. *)

---

*) Wenn wir die Seiten eines gegebenen Dreiecks durch die Gleichungen:

$$Z = 0, \qquad Z' = 0, \qquad Z'' = 0,$$

Fig. 4. 6. darstellen, so erhalten wie für drei gerade Linien Y'', Y' und Y, welche durch die drei Winkelpuncte des Dreiecks und irgend einen festen Punct gehen, drei Gleichungen von folgender Form:

$$\begin{aligned} \mu Z - \mu' Z' &= 0, \\ \mu' Z' - \mu'' Z'' &= 0, \\ \mu'' Z'' - \mu Z &= 0. \end{aligned} \qquad (1)$$

Wenn wir nun erstens unter Z, Z' und Z'' Ausdrücke von der Form $\frac{y+ax-b}{\sqrt{1+a^2}}$ verstehen, (Ausdrücke, die wir in dem Vorstehenden durch die verschieden accentuirten A bezeichnet haben), so bedeutet bekanntlich die erste der Gleichungen (1) eine gerade Linie, die durch den Durchschnitt der beiden ersten Dreiecks-Seiten geht und die den Winkel, den diese beiden Seiten einschliessen, so theilt, dass die Sinus der resultirenden Winkel sich verhalten wie $\mu' : \mu$. Wir erhalten hiernach, mit Beziehung auf die 4. Figur:

$$\frac{\mu'}{\mu} = \frac{\sin\alpha''}{\sin\beta''} \qquad \frac{\mu''}{\mu'} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta'} \qquad \frac{\mu}{\mu''} = \frac{\sin\alpha'}{\sin\beta}$$

und da:

$$\frac{\mu'}{\mu} \cdot \frac{\mu}{\mu''} \cdot \frac{\mu''}{\mu'} = 1,$$

so folgt:

$$\sin\alpha''\sin\alpha'\sin\alpha = \sin\beta''\sin\beta'\sin\beta.$$

Der Satz, den diese Gleichung enthält, ist bekannt und folgender:

Wenn man von irgend einem Puncte drei gerade Linien nach den drei Winkelpuncten eines gegebenen Dreiecks zieht, so wird jeder Winkel oder sein Nebenwinkel so in zwei Theile getheilt, dass das Product der Sinus derjenigen drei Winkel, die auf derselben Seite der drei Theilungslinien liegen, dem Producte der Sinus der drei übrigen Winkel gleich ist.

Fig. 5. Wenn wir, statt durch einen festen Punct drei gerade Linien nach den Winkelpuncten eines gegebenen Dreiecks zu ziehen, nun diese drei Winkelpuncte mit drei Puncten, die

442. Die Entwicklungen der letzten Nummern sind der Verallgemeinerung fähig. Wir wollen ein Polygon $UU^1U^2U^3...U^{n-1}$ von einer beliebigen Anzahl Seiten betrachten. Die n Winkelpuncte dieses Polygons wollen wir durch die Gleichungen:

$$U = 0,\quad U^1 = 0,\quad U^2 = 0,\quad U^3 = 0,\ \ldots\ U^{n-3} = 0,\quad U^{n-2} = 0,\quad U^{n-1} = 0,$$

---

in gerader Linie und auf den gegenüberliegenden Seiten liegen, durch drei gerade Linien Y'', Y', Y verbinden, so ergeben sich, wie bekannt, für diese Linien Gleichungen von folgender Form:

$$\begin{aligned} \mu Z - \mu' Z' &= 0,\\ \mu' Z' - \mu'' Z'' &= 0,\\ \mu'' Z'' - \mu Z &= 0; \end{aligned} \qquad (2)$$

und hier erhalten wir, indem wir uns auf die 5. Figur beziehen, bei einer analogen Bezeichnung, gerade so wie eben,

$$\sin\alpha''\sin\alpha'\sin\alpha = \sin\beta''\sin\beta'\sin\beta.$$

Wir gelangen hiernach, neben dem eben bewiesenen Satze, zu folgendem Satze:

Wenn man von irgend drei Puncten, die in gerader Linie und auf den drei Seiten eines gegebenen Dreiecks liegen, drei gerade Linien nach den diesen Seiten gegenüberstehenden Winkelpuncten zieht, so werden die drei Winkel des Dreiecks oder ihre Nebenwinkel so getheilt, dass das Product der Sinus von drei der resultirenden Winkel dem Producte der Sinus der drei übrigen gleich ist.

Wenn wir zweitens Ausdrücke von der Form: (y—ax—b), in denen der Coefficient von y gleich Eins (oder auch nur eine ein für alle Mal gegebene Constante ist) durch Z, Z' und Z'' bezeichnen, so erhalten die unbestimmten Coefficienten eine andere Bedeutung. Wenn wir nemlich die Gleichungen irgend zweier gegebenen geraden Linien:

$$\begin{aligned} y - ax - b &= 0,\\ y - a'x - b' &= 0, \end{aligned}$$

zu nachstehender Gleichung vermittelst eines unbestimmten Coefficienten ν verbinden:

$$y - \frac{a+\nu a'}{1+\nu}x - \frac{b+\nu b'}{1+\nu} = 0,$$

und, der Kürze halber, das constante Glied in dieser Gleichung b'' nennen, so ergibt sich:

$$\frac{b''-b}{b''-b'} = \nu.$$

Es ist also ν das Verhältniss der zwischen der dritten und ersten und zwischen der dritten und zweiten geraden Linie liegenden Stücke der zweiten Axe zu einander. Hiernach erhalten wir, gleichviel, ob wir auf die drei Gleichungen (1) und die 6. Figur oder auf die drei Gleichungen (2) und die 5. Figur uns beziehen, wenn wir die beliebige gerade Linie AB als zweite Axe betrachten:

$$\frac{\mu'}{\mu} = \frac{y''z}{y'z},\qquad \frac{\mu''}{\mu'} = \frac{yz'}{yz''},\qquad \frac{\mu}{\mu''} = \frac{y'z''}{y'z},$$

und weil wiederum:

$$\frac{\mu'}{\mu}\cdot\frac{\mu''}{\mu'}\cdot\frac{\mu}{\mu''} = 1,$$

so folgt:

$$y'z.\ yz'.\ y'z'' = y''z'.\ yz''.\ y'z.$$

Da die drei Seiten eines gegebenen Dreiecks und drei gerade Linien, welche die drei Winkelpuncte desselben mit irgend einem festen Puncte verbinden, ein Viereck mit seinen beiden Diagonalen bilden, so haben wir also erstlich folgenden bekannten Satz bewiesen. Fig. 6.

Die Durchschnitte einer beliebigen Transversalen mit den vier Seiten und den beiden Diagonalen eines Vierecks bilden eine Involution von sechs Puncten. (PONCELET, Prop. proj. 172. BRIANCHON a. a. O. §. VIII.)

Und ferner haben wir folgenden zweiten Satz:

Die Durchschnitte einer beliebigen Transversalen mit den drei Seiten eines gegebenen Dreiecks und den drei geraden Linien, welche die drei Winkelpuncte des Dreiecks mit dreien auf den gegenüberstehenden Seiten und in gerader Linie liegenden Puncten verbinden, bilden eine Involution von sechs Puncten. Fig. 5.

Digitized by Google

nnd die n Puncte V, V^1, V^2, . . . V^{n-1}, V^n, die auf einer beliebigen Transversalen und den Polygon-Seiten UU', $U'U^2$, U^2U^3, . . $U^{n-2}U^{n-1}$, $U^{n-1}U$ liegen, durch folgende Gleichungen:

$$V = 0, \quad V^1 = 0, \quad V^2 = 0, \quad . \quad . \quad . \quad V^{n-2} = 0, \quad V^{n-1} = 0$$

darstellen. Alsdann ergeben sich folgende n identische Gleichungen:

$$\begin{aligned}
\mu U + \mu^1 U^1 &= \nu V,\\
\mu^1 U^1 + \mu^2 U^2 &= \nu^1 V^1,\\
\mu^2 U^2 + \mu^3 U^3 &= \nu^2 V^2,\\
&\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\
&\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\
\mu^{n-3} U^{n-3} + \mu^{n-2} U^{n-2} &= \nu^{n-3} V^{n-3},\\
\mu^{n-2} U^{n-2} + \mu^{n-1} U^{n-1} &= \nu^{n-2} V^{n-2},\\
\mu^{n-1} U^{n-1} + \varsigma U &= \nu^{n-1} V^{n-1},
\end{aligned}$$

indem wir durch μ, μ^1 . . μ^{n-1}, ν, ν^1 . . ν^{n-1} nnd ς unhestimmte Coefficienten bezeichnen. Ziehen wir von der ersten dieser n Gleichungen die zweite ab, addiren zu dem Reste die dritte, ziehen von dem Resultate die vierte ab, addiren zu dem neuen Reste die fünfte, und gehen auf diese Weise his zur letzten Gleichung, indem wir abwechselnd addiren und subtrahiren, so kommt:

$$(\mu \mp \varsigma) U = \nu V - \nu^1 V^1 + \nu^2 V^2 \ . \ . \ . \ U \mp \nu^{n-3} V^{n-3} \pm \nu^{n-2} V^{n-2} \mp \nu^{n-1} V^{n-1},$$

wobei wir das ohere oder untere Zeichen nehmen müssen, je nachdem n eine gerade oder ungerade Zahl ist. Die beiden Theile dieser Gleichung können auf keine andere Weise identisch werden, als wenn die Glieder jedes derselhen sich gegenseitig aufhehen. Denn, wäre dies nicht der Fall, so würde der zweite Theil, gleich Null gesetzt, irgend einen Punct darstellen, der mit den Puncten V, V' . . . in gerader Linie läge, nnd also nicht mit demjenigen Puncte, der durch den ersten Theil jener Gleichung, wenn wir denselben gleich Null setzen, dargestellt wird, das heisst, mit dem ersten Winkelpuncte des Polygons, identisch sein könnte. Somit ist:

$$\mu \mp \varsigma = 0,$$

nnd folglich:

$$\frac{\mu}{\mu^1} \cdot \frac{\mu^1}{\mu^2} \cdot \frac{\mu^2}{\mu^3} \ . \ . \ . \ \frac{\mu^{n-2}}{\mu^{n-1}} \cdot \frac{\mu^{n-1}}{\varsigma} = \mp 1. \qquad (1)$$

Hiernach ergibt sich, gerade wie in der 437. Nummer, nachstehender Satz:

Wenn irgend ein Polygon $UU'U^2$ . . und irgend eine Transversale, die den Seiten desselben UU', $U'U^2$, . . oder ihren Verlängerungen in den Puncten V, V', . . begegnet, gegeben sind, und man zieht von einem beliebigen Puncte n gerade Linien nach den n Winkelpuncten des Polygons und n andere gerade Linien nach den n Puncten V, V', .. so hat man, wenn man die Durchschnitte dieser 2n Linien mit einer beliebigen neuen Transversalen u, u^1, u^2 . . u^{n-1}, v, v^1, v^2, . . v^{n-1} nennt:

$$vu \ . \ v^1u^1 \ . \ v^2u^2 \ . \ . \ . \ v^{n-1}u^{n-1} = vu^1 \ . \ v^1u^2 \ . \ v^2u^3 \ . \ . \ . \ v^{n-1}u.$$

Wenn wir annehmen, dass in dem ersten dieser beiden Sätze die beliebige Transversale durch den Durchschnitt der beiden Diagonalen nud zweier gegenüberliegender Seiten, oder durch die beiden Durchschnitte der beiden Paare gegenüberliegender Seiten des Vierecks gehe, so erhalten wir wiederum den Satz der 440. Nummer des Textes. Es wird die Transversale harmonisch getheilt.

Digitized by Google

Und ferner ergibt sich folgender zweiter Satz, der mit dem vorstehenden in genauer Beziehung steht:

Wenn irgend ein Polygon UU^1U^2 . . und irgend eine Transversale, die, wie vorhin, den Seiten desselben oder ihren Verlängerungen in den Puncten V, V^1, . . , V^{n-1} begegnet, gegeben sind, so hat man:

$$VU.\ V^1U^1.\ V^2U^2.\ .\ V^{n-1}U^{n-1} = VU^1.\ V^1U^2.\ V^2U^3.\ .\ V^{n-1}U.$$ *)

Die geometrische Bedeutung des verschiedenen Zeichens in der Gleichung (1), welches sich auf den zwiefachen Fall, dass n eine gerade oder ungerade Zahl ist, bezieht, ergibt sich sogleich. Dieses doppelte Zeichen wird dadurch bedingt, dass eine Transversale nothwendig einer geraden Anzahl von Seiten (nicht deren Verlängerungen) eines beliebigen Polygons begegnet.

Der letzte Satz, der Carnot gehört, und der, wie derselbe gezeigt hat, in der andern Beziehung, dass eine beliebige algebraische Curve an die Stelle der geradlinigten Transversalen treten kann, der Verallgemeinerung fähig ist, bildet die Grundlage der sogenannten „Theorie der Transversalen." Wir sehen, wie dieser Satz und andere Sätze derselben Art, aus der Betrachtung der unbestimmten Coefficienten, die ich bisher unberücksichtigt gelassen habe, unmittelbar sich ergeben. Um dies bemerklich zu machen, habe ich bei den letzten Entwicklungen mit einiger Ausführlichkeit verweilt; sie weiter auszudehnen und ihre Anwendung nachzuweisen, kann hier nicht in unserer Absicht liegen. **)

442. Wir wollen diesen Abschnitt mit einigen Entwicklungen beschliessen, die in genauerer Verbindung mit den frühern stehen, als es auf den ersten Blick scheinen

---

*) Poncelet, Prop. proj. Nro. 145.

**) Wenn wir die Seiten irgend eines Polygons durch die Gleichungen:

$$Z = 0,\quad Z^1 = 0,\quad Z^2 = 0, \ldots Z^{n-1} = 0,$$

und solche gerade Linien, die von irgend einem festen Puncte nach den Winkelpuncten des Polygons, also nach den Durchschnitten von Z und Z^1, Z^1 und Z^2, . . Z^{n-1} und Z gezogen werden, durch die Gleichungen:

$$Y = 0,\quad Y^1 = 0, \ldots\ldots\ldots Y^{n-1} = 0,$$

darstellen, so erhalten wir gerade dieselben Gleichungen als im Texte, wenn wir U mit Z und V mit Y vertauschen. Zu der Bedeutung der End-Gleichung:

$$\frac{\mu}{\mu^1}.\frac{\mu^1}{\mu''}\ldots\frac{\mu^{n-1}}{\mu} = \pm 1,$$

kommen wir sogleich nach der Anmerkung zur 441. Nummer, und somit zu folgenden beiden Sätzen:

Wenn man von irgend einem festen Puncte nach den Winkelpuncten eines gegebenen beliebigen Polygons von n Seiten n gerade Linien zieht, und man die Durchschnitte einer beliebigen Transversalen mit den n Polygon-Seiten z, z^1, . . z^{n-1}, die Durchschnitte derselben Transversalen mit jenen n geraden Linien, die nach den Durchschnitten der ersten und zweiten, der zweiten und dritten, . . der letzten und ersten Polygon-Seiten gehen y, y^1, . . y^{n-1} nennt, so ist:

$$yz.\ y^1z^1.\ y^2z^2.\ .\ y^{n-1}z^{n-1} = yz^1.\ y^1z^2.\ y^2z^3.\ .\ y^{n-1}z.$$

Wenn Alles wie im vorigen Satze bleibt, und man nennt diejenigen Winkel, welche die erste der durch den festen Punct gehenden geraden Linien mit der ersten und zweiten Polygon-Seite bildet, α und β, diejenigen Winkel, welche die zweite jener geraden Linien mit der zweiten und dritten Polygon-Seite bildet, α^1 und β^1, u. s. w., so ist:

$$\sin\alpha\sin\alpha^1\sin\alpha^2.\ .\ .\ \sin\alpha^{n-1} = \sin\beta\sin\beta^1\sin\beta^2.\ .\ .\ \sin\beta^{n-1},$$

Diesen letzten Satz leitet H. Poncelet (Mémoire sur la théorie générale des polaires reciproques, n 126) in Crelle's Journal IV., Pag. 56 aus dem letzten Satze des Textes her.

möchte. Manche der in den bisher entwickelten Gleichungen enthaltenen Sätze bekommen bloss eine andere Aussage, wenn wir, wie wir es jetzt thun wollen, uns auf eine Zusammenstellung gegebener Kreise beziehen.

Wir haben in der 414. Nummer für den kürzesten Abstand, R, einer geraden Linie (w', v', n') von einem durch die Gleichung:

$$au+bv+w = o, \qquad (1)$$

dargestellten Puncte, bei der Voraussetzung rechtwinkliger Coordinaten, folgenden Ausdruck erhalten:

$$R = \pm \frac{au'+bv'+w'}{\sqrt{(u'^2+v'^2)}}.$$

Betrachten wir w', v' und n' als veränderliche Grössen, so beziehen sich diejenigen Werthe derselben, welche die vorstehende Gleichung befriedigen, auf solche gerade Linien, deren kürzeste Abstände von dem gegebenen Puncte (1) constant und gleich R sind. Es umhüllen also diese gerade Linien einen Kreis, dessen Mittelpunct in dem gegebenen Puncte liegt, und dessen Radius gleich R ist. Für die Gleichung dieses Kreises erhalten wir also, wenn wir die Accente fortlassen:

$$R = \pm \frac{au+bv+w}{\sqrt{(u^2+v^2)}}.$$

Nach der 31. Nummer des ersten Bandes müssen wir das positive Zeichen dann nehmen, wenn der gegebene Punct in Beziehung auf die gerade Linie nach der positiven Seite der y liegt; das negative Zeichen also im entgegengesetzten Falle. Wir sehen hieraus, dass die letzte Gleichung, wenn wir das positive Zeichen nehmen, denjenigen Halbkreis darstellt, der, wenn wir den Kreis durch einen der ersten Axe parallelen Durchmesser halbiren, nach der negativen Seite der y liegt, und dass dieselbe Gleichung, wenn wir das andere Zeichen nehmen, den nach der positiven Seite der y hin liegenden Halbkreis darstellt. Schaffen wir das Wurzel-Zeichen fort, so kommt:

$$R^2(u^2+v^2) = (au+bv+w)^2,$$

für die allgemeine, auf rechtwinklige Coordinaten bezogene, Gleichung des Kreises.

443. Wenn zwei Kreise durch folgende beiden Gleichungen gegeben sind:

$$R = \pm \frac{au+bv+w}{\sqrt{(u^2+v^2)}}, \qquad R' = \pm \frac{a'u+b'v+w}{\sqrt{(u^2+v^2)}}, \qquad (1)$$

so beziehen sich diejenigen Werthe von w, v und n, welche diese Gleichungen beide befriedigen, auf solche gerade Linien, welche sowol den einen als auch den andern gegebenen Kreis berühren. Dieselben Werthe von w, v und n müssen auch eine von folgenden beiden Gleichungen befriedigen:

$$\frac{R}{R'} = \frac{au+bv+w}{a'u+b'v+w}, \qquad \frac{R}{R'} = -\frac{au+bv+w}{a'u+b'v+w},$$

die wir erhalten, wenn wir die beiden Kreis-Gleichungen in einander dividiren, und einmal in diesen beiden Gleichungen gleiche, das andere Mal ungleiche Zeichen nehmen. Die letzten Gleichungen stellen hiernach zwei Puncte dar, durch welche die gemeinschaftlichen Tangenten der beiden gegebenen Kreise gehen. Durch den ersten dieser beiden Puncte, dem ein gleiches Zeichen in den beiden Kreis-Gleichungen entspricht, gehen diejenigen beiden gemeinschaftlichen Tangenten, die auf derselben Seite der Mittelpuncte der beiden Kreise liegen: die äussern gemeinschaftlichen Tangenten; durch den zweiten Punct diejenigen, welche zwischen den beiden Mittelpuncten hindurch gehen: die

Digitized by Google

beiden innern. Zugleich ist ersichtlich, dass die in Rede stehenden Puncte und die Mittelpuncte der beiden Kreise, deren Gleichungen folgende sind:

$$au+bv+w = 0, \qquad a'u+b'v+w = 0,$$

vier harmonische Theilungspuncte bilden. (410)

444. Wenn wir mit den beiden gegebenen Kreisen noch einen dritten zusammenstellen und für die Gleichung desselben folgende nehmen:

$$R'' = \pm \frac{a''u+b''v+w}{\sqrt{(u^2+v^2)}},$$

so erhalten wir:

$$\frac{R}{R'} = \pm \frac{au+bv+w}{a'u+b'v+w},$$
$$\frac{R'}{R''} = \pm \frac{a'u+b'v+w}{a''u+b''v+w},$$
$$\frac{R''}{R} = \pm \frac{a''u+b''v+w}{au+bv+w},$$

für die Gleichungen der drei Paare von Durchschnittspuncten der äussern und der innern gemeinschaftlichen Tangenten je zweier der drei gegebenen Kreise. Jede von diesen drei Gleichungen ist eine unmittelbare Folge der beiden übrigen, wenn wir in allen drei Gleichungen das positive Zeichen, oder in einer beliebigen derselben das positive, in den beiden übrigen das negative Zeichen nehmen. Hiermit ist also auf sehr einfache Weise folgender bekannter Satz bewiesen:

Die Durchschnitte der beiden äussern gemeinschaftlichen Tangenten je zweier von drei gegebenen Kreise liegen alle drei in gerader Linie. Der Durchschnitt der äussern gemeinschaftlichen Tangenten irgend zweier der drei gegebenen Kreise liegt mit den Durchschnitten der innern gemeinschaftlichen Tangenten jedes dieser beiden Kreise und des dritten Kreises in gerader Linie.

445. Der Kürze halber, wollen wir folgende Ausdrücke:

$$\frac{au+bv+w}{R\sqrt{(u^2+v^2)}}, \qquad \frac{a'u+b'v+w}{R'\sqrt{(u^2+v^2)}}, \qquad \frac{a''u+b''v+w}{R''\sqrt{(u^2+v^2)}}, \text{ u. s. w.}$$

durch die Symbole W, W', W'' u. s. w. bezeichnen. Hiernach stellen z. B. die beiden Gleichungen:

$$W^2 = 1, \qquad W'^2 = 1,$$

zwei Kreise dar, die Gleichungen:

$$W = 0, \qquad W' = 0,$$

ihre Mittelpuncte und die Gleichungen:

$$W+W' = 0, \qquad W-W' = 0,$$

die Durchschnittspuncte der innern und äussern gemeinschaftlichen Tangenten der beiden Kreise.

Bei dieser Bezeichnung reducirt sich die Gleichung:

$$W+W'+W'' = 0 \qquad (1)$$

auf den ersten Grad, und stellt mithin einen Punct dar. Diese Gleichung wird befriedigt, wenn wir zugleich:

$$W = 0, \text{ und } W'+W'' = 0;$$
$$W' = 0, \text{ " } W+W'' = 0;$$
$$W'' = 0, \text{ " } W+W' = 0;$$

setzen. Diejenigen drei geraden Linien, welche die dreimal zwei Puncte, welche durch diese Gleichungen dargestellt werden, verbinden, gehen alle drei durch den Punct (1). Hierin ist folgender Satz enthalten:

Wenn man den Mittelpunct jedes dreier gegebener Kreise mit dem Durchschnittspuncte der gemeinschaftlichen innern Tangenten der jedesmalig übrigen beiden Kreise verbindet, so erhält man drei gerade Linien, die durch ein und denselben Punct gehen.

Statt der Gleichungen (1) erhalten wir drei neue Gleichungen, wenn wir nach einander jedes der drei Glieder, aus denen dieselbe besteht, mit negativem Zeichen nehmen. Die Construction der durch diese neuen Gleichungen dargestellten Puncte führt zu einem Satze, der aus dem Vorstehenden sogleich hervorgeht, wenn wir zwei Durchschnitte innerer gemeinschaftlicher Tangenten mit den Durchschnitten der entsprechenden äusseren Tangenten vertauschen.

446. Wenn wir weiter gehen, und vier Kreise zusammenstellen, so erhalten wir acht verschiedene Gleichungen, die wir in folgende zusammenfassen können:

$$\pm W \pm W' \pm W'' \pm W''' = 0. \qquad (2)$$

Nehmen wir zuerst alle Glieder mit dem positiven Zeichen, mithin folgende Gleichung:

$$W+W'+W''+W''' = 0, \qquad (3)$$

so können wir dieselbe auf folgende dreifache Weise in zwei Gleichungen zerlegen:

$$\begin{aligned} W+W' &= 0, \text{ und } W''+W''' = 0; \\ W+W'' &= 0, \text{ „ } W'+W''' = 0; \\ W+W''' &= 0, \text{ „ } W'+W'' = 0. \end{aligned}$$

Die durch diese sechs Gleichungen dargestellten Puncte sind die Durchschnittspuncte der innern gemeinschaftlichen Tangenten je zweier der vier gegebenen Kreise. Diese sechs Durchschnittspuncte sind also die Winkelpuncte eines Sechsecks, dessen drei Diagonalen in dem, durch die Gleichung (3) dargestellten, Puncte sich schneiden.

Wenn wir ferner in der Gleichung (2) irgend drei Glieder mit dem positiven und das jedesmalige vierte Glied mit dem negativen Zeichen nehmen, so erhalten wir folgende vier Gleichungen:

$$\begin{aligned} W+W'+W''-W''' &= 0, \\ W+W'-W''+W''' &= 0, \\ W-W'+W''+W''' &= 0, \\ -W+W'+W''+W''' &= 0. \end{aligned} \qquad (4)$$

Die erste dieser Gleichungen können wir befriedigen, indem wir zugleich

$$\begin{aligned} W+W' &= 0, \text{ und } W''-W''' = 0; \\ W+W'' &= 0, \text{ „ } W'-W''' = 0; \\ W'+W'' &= 0, \text{ „ } W-W''' = 0; \end{aligned}$$

setzen. Die sechs Puncte, die wir auf diese Weise erhalten, sind die Durchschnittspuncte der innern gemeinschaftlichen Tangenten je zweier der drei ersten Kreise, und die Durchschnitte der äussern gemeinschaftlichen Tangenten jedes derselben und des vierten Kreises. Diese sechs Puncte bestimmen also ein Sechseck, dessen drei Diagonalen durch den, durch die erste der Gleichungen (4) dargestellten, Punct gehen. Den drei übrigen Gleichungen (4) entsprechen drei andere solcher Sechsecke.

Wenn wir endlich in der Gleichung (2) zwei Glieder mit positiven und zwei mit negativen Zeichen nehmen, so ergeben sich folgende drei einzelne Gleichungen:

Digitized by Google

$$W+W'-W''-W''' = 0,$$
$$W-W'-W''+W''' = 0, \qquad (5)$$
$$W-W'+W''-W''' = 0,$$

Um die erste dieser drei Gleichungen zu befriedigen, setzen wir zugleich

$$W+W' = 0, \text{ und } W''+W''' = 0;$$
$$W-W'' = 0, \text{ „ } W'-W''' = 0;$$
$$W-W''' = 0, \text{ „ } W'-W'' = 0.$$

Hiernach erhalten wir ein neues Sechseck, dessen drei Diagonalen in demselben Puncte sich kreuzen. Die gegenüberstehenden Winkelpuncte desselben sind zwei Durchschnitte innerer und zwei Paar Durchschnitte äusserer gemeinschaftlicher Tangenten. Solcher Sechsecke erhalten wir drei, die den drei Gleichungen (5) entsprechen.

Wenn wir das Vorstehende zusammenfassen, so ergibt sich folgender Satz:

Wenn irgend vier Kreise gegeben sind, und man die gemeinschaftlichen Tangenten je zweier derselben zieht, so erhält man sechs Durchschnittspuncte innerer und sechs Durchschnittspuncte äusserer gemeinschaftlicher Tangenten. Diese zwölf Puncte, von denen sechzehnmal drei in gerader Linie liegen, bilden, zu sechs genommen, die Winkelpuncte von acht verschiedenen Sechsecken, deren drei Diagonalen in demselben Puncte sich schneiden.

Die sechs Puncte, welche die Winkelpuncte eines solchen Sechsecks bilden, sind dadurch bestimmt, dass die sechs übrigen Puncte (wovon wir uns leicht überzeugen) jedesmal zu drei und drei auf vier gerade Linien liegen.

447. Wir können die in der vorigen Nummer behandelten Gleichungen auch in zwei solche Gleichungen zerlegen, von denen die eine dreigliederig, die andere eingliederig ist. Auf diese Weise erhalten wir z. B., wenn wir die Gleichung:

$$W+W'+W''+W''' = 0,$$

nehmen, folgende Zerlegungen:

$$W+W'+W'' = 0, \text{ und } W''' = 0;$$
$$W+W'+W''' = 0, \text{ „ } W'' = 0;$$
$$W+W''+W''' = 0, \text{ „ } W' = 0.$$

Wir wollen hier uns auf den besondern Fall beschränken, wo der erste Kreis von jedem der drei übrigen ausserhalb berührt wird. Alsdann stellen die drei Gleichungen der ersten Vertical-Columne diejenigen drei Puncte dar, die man erhält, wenn man die drei letzten Kreise zu je zwei zusammenstellt, den Mittelpunct des einen mit dem Berührungspuncte auf dem andern durch zwei gerade Linien verbindet, und den Durchschnitt dieser Linien bestimmt. Die drei übrigen Gleichungen stellen die Mittelpuncte der drei letzten Kreise dar.

448. Wir wollen als letztes Beispiel die Construction folgender Gleichung

$$2W+W'+W''+W''' = 0$$

unmittelbar hier anschliessen. Diese Gleichung wird befriedigt, wenn wir zugleich:

$$W+W'+W'' = 0, \text{ und } W+W''' = 0;$$
$$W+W'+W''' = 0, \text{ „ } W+W'' = 0;$$
$$W+W''+W''' = 0, \text{ „ } W+W' = 0;$$

setzen. Die drei voranstehenden Gleichungen sind dieselben, als in der vorigen Nummer; die drei letzten Gleichungen stellen diejenigen Puncte dar, in welchen der erste

Digitized by Google

Kreis von den drei übrigen berührt wird. Wir können von diesen letzten Kreisen ganz abstrahiren, wenn wir von irgend drei Radien des ersten Kreises ausgehen, und drei beliebig auf den Verlängerungen derselben angenommenen Puncte als die Mittelpuncte jener drei Kreise, und die Endpuncte dieser Radien als die drei Berührungspuncte betrachten. Hiernach sind die Resultate dieser und der vorigen Nummer in folgendem Satze enthalten:

Wenn man auf den Verlängerungen dreier Radien eines gegebenen Kreises drei Puncte beliebig annimmt, diese Radien zu je zwei zusammenstellt und die Durchschnittspuncte derjenigen Linien-Paare bestimmt, welche den Endpunct jedes dieser Radien mit dem auf dem andern willkührlich angenommenen Puncte verbindet: so erhält man drei Puncte, die sowol mit den drei willkührlich angenommenen Puncten, als auch mit den Endpuncten der drei Radien, die Winkelpuncte eines solchen Sechsecks bilden, dessen drei Diagonalen durch denselben Punct gehen.

449. Wenn in einer Ebene n beliebige Puncte gegeben sind, und wir für die Gleichungen derselben folgende nehmen:

$$au+bv+w = o, \quad a'u+b'v+w = o, \quad a''u+b''v+w = o, \text{ u. s. w.}$$

so ergibt sich für die Summe der kürzesten Abstände dieser n Puncte von irgend einer geraden Linie (w', v', u'):

$$\pm P = \frac{au'+bv'+w'}{V(u'^2+v'^2)} + \frac{a'u'+b'v'+w'}{V(u'^2+v'^2)} + \frac{a''u'+b''v'+w'}{V(u'^2+v'^2)} + \ldots$$

wenn wir diese Summe P nennen und voraussetzen, dass alle gegebenen Puncte auf derselben Seite der geraden Linie liegen. Der letzten Gleichung können wir folgende Form geben:

$$\pm\frac{P}{n} = \frac{Au+Bv+w}{V(u^2+v^2)}, \qquad (1)$$

indem wir:

$$\frac{a+a'+a''\ldots}{n} = A, \qquad \frac{b+b'+b''\ldots}{n} = B,$$

setzen und die Accente von w, v und u fortlassen. Betrachten wir diese Grössen als veränderlich, so stellt die Gleichung (1) einen Kreis dar, dessen Radius gleich $\frac{P}{n}$, und dessen Mittelpunct der Schwerpunct gleicher Gewichte ist, die man sich in den gegebenen Puncten angebracht denken kann. Also:

Wenn beliebig viele Puncte in derselben Ebene gegeben sind; so wird ein und derselbe Kreis von allen denjenigen geraden Linien umhüllt, für welche die Summe der kürzesten Abstände von den gegebenen Puncten eine constante Grösse ist. *)

Wir können die constante Grösse so gross annehmen, dass alle gegebenen Puncte innerhalb des Kreises, also alle auf einer und derselben Seite jeder Tangente dieses Kreises liegen; und diesen Fall haben wir als Normal-Fall betrachtet. Wenn wir die constante Grösse kleiner annehmen, und einige der gegebenen Puncte ausserhalb des neuen Kreises liegen, so gehen einige Tangenten durch das System der gegebenen Puncte hindurch. Alsdann müssen wir, wenn der obige Satz auch für diesen Fall gelten soll, die Abstände von Puncten, die auf entgegengesetzten Seiten einer solchen Tangente liegen, mit entgegengesetzten Zeichen nehmen. Denn, vermindern wir den Radius $\frac{P}{n}$ des ur-

*) Gergonne, Annales XIX p. 224. (Questions proposées).

Digitized by Google

sprünglichen Kreises um ein Stück $\frac{p}{n}$, beschreiben mit dem Radius $\left(\frac{P-p}{n}\right)$ einen neuen Kreis, und legen an die beiden Kreise zwei parallele Tangenten, so ist die Summe der Abstände aller Puncte von der Tangente an den ersten Kreis (die alle dasselbe Zeichen, etwa das positive, haben) gleich P, und also auch die Summe der Abstände von der Tangente an den zweiten Kreis gleich $P-n.\frac{p}{n} = (P-p)$, wenn wir die Abstände zweier Puncte, die auf verschiedenen Seiten dieser Tangente liegen, subtractiv nehmen.

Wenn der Kreis auf einen Punct, den Schwerpunct, sich reducirt, so ist die, auf die eben angezeigte Weise genommene Summe der Abstände von jeder durch diesen Punct gehenden geraden Linien gleich Null.

Verwandlung der Coordinaten gerader Linien.

449. So wie die Coordinaten eines Punctes sich ändern, wenn wir ein anderes Coordinaten-System zu Grunde legen, so ändern sich auch die Coordinaten einer geraden Linie, wenn wir den Anfangspunct verlegen und die Richtung der beiden Coordinaten-Axen ändern. Wir wollen, auf ähnliche Weise, wie wir früher die Verwandlungs-Formeln für Punct-Coordinaten entwickelt haben, jetzt die entsprechenden Formeln für die Coordinaten gerader Linien entwickeln. Durch Hülfe dieser Formeln können wir alsdann die Gleichung jedes Ortes einer beliebigen Classe umformen in eine Gleichung desselben Ortes, bezogen auf irgend ein anderes Coordinaten-System.

Verlegung des Anfangspunctes mit Beibehaltung der Axen-Richtung.

450. Wir wollen **erstens**, indem wir $n = 1$ setzen, v und w als die ursprüngli- Fig. 7.
chen Coordinaten betrachten. Es bedeutet also, bei einem beliebigen Coordinaten-Winkel, v das Verhältniss der Sinus derjenigen beiden Winkel, welche die bezügliche gerade Linie mit der ersten und zweiten Axe bildet; w bedeutet das auf der zweiten Axe von jener geraden Linie bestimmte Segment, genommen mit entgegengesetztem Zeichen. Die neuen Coordinaten wollen wir u, v und w nennen. Indem wir wiederum $u = 1$ setzen, erhalten die beiden andern Coordinaten v und w eine analoge Bedeutung als v und w.

Wo wir auch den Anfangspunct annehmen mögen, so lange wir die Richtung der Axen nicht ändern, behalten wir immer:

$$v = v,$$

Verrücken wir blos die erste Axe, so dass der neue Anfangspunct O′, in irgend einen Punct (y′, o) der zweiten Axe fällt, so erhält man sogleich, indem man eine beliebige gerade Linie MN betrachtet;

$$w = w - y'. \qquad (1)$$

Verrücken wir blos die zweite Axe, so dass irgend ein Punct (o, x′) der ersten Axe, etwa der Punct O″, zum Anfangspuncte wird, so ist $w = -OQ$, $w = -O''Q'$ und da

$$OQ-O''Q' = RQ = x'\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = xv = x'v,$$

so ergibt sich:

$$w = \varpi - x'v. \qquad (2)$$

Wenn wir endlich den Anfangspunct in den durchaus beliebigen Punct O''' oder (y'', x'') verlegen, so ergibt sich aus (1) und (2):

$$w = \varpi - x'v - y''.$$

Wir können die Form dieser Gleichung leicht a priori rechtfertigen; denn w verschwindet nur in dem Falle, dass die bezügliche gerade Linie durch den ursprünglichen Anfangspunct geht. Die Gleichung dieses Anfangspunctes, bezogen auf das neue System, ist aber:

$$\varpi - x'v - y' = 0.$$

Es verschwindet ferner ϖ nur in dem Falle, dass die bezügliche gerade Linie durch den neuen Anfangspunct geht, dessen Gleichung in dem ursprünglichen Systeme folgende ist:

$$w + x'v + y' = 0.$$

Fig. 7. 451. Wir wollen zweitens, indem wir $w = \varpi = 1$ setzen, u und v als die ursprünglichen, u und v als die neuen Coordinaten betrachten. Alsdann bedeuten u und u die, negativ genommenen, reciproken Werthe den auf der zweiten, v und v die negativ genommenen reciproken Werthe der auf den ersten Axen von der bezüglichen geraden Linie bestimmten Segmente. Wenn wiederum O der ursprüngliche, O''' der neue Anfangspunct ist, so ist für die beliebige gerade Linie MN:

$$u = -\frac{1}{OQ'} \qquad u = -\frac{1}{O'''Q'} \qquad v = -\frac{1}{OP'} \qquad v = -\frac{1}{O'''P'}.$$

Es ist ferner, wenn man RQ' parallel mit der ersten Axe zieht:

$$OQ = OO' + O'R + RQ,$$

$$= y'\frac{1}{u} + x'\frac{v}{u},$$

$$= \frac{y'u + x'v - 1}{u},$$

mithin:

$$u = \frac{-u}{y'u + x'v - 1}, \qquad (3)$$

und hieraus folgt unmittelbar, weil $\frac{u}{v} = \frac{u}{v}$:

$$v = \frac{-v}{y'u + x'v - 1}. \qquad (4)$$

Die Form der letzten beiden Ausdrücke rechtfertigt sich wiederum leicht a priori; denn, wenn die bezügliche gerade Linie durch den ursprünglichen Anfangspunct geht, dessen Gleichung in dem neuen Systeme folgende ist:

$$y'u + xv - 1 = 0,$$

so werden u und v beide zugleich unendlich. Ferner werden u und u, v und v für solche gerade Linien, die den zweiten und ersten Axen parallel sind, Null.

Aenderung der Richtung der Coordinaten-Axen mit Beibehaltung des Anfangspunctes.

Fig. 8. 452. Es seien OX und OY die beiden ursprünglichen Axen; wir wollen, indem der Anfangspunct unverrückt bleibt, die erste Axe um einen Winkel φ, die zweite um

einen Winkel ψ' sich drehen lassen, und die auf solche Weise entstehenden neuen Axen OX' und OY' nennen. Durch die beiden Winkel φ und ψ' ist das neue Coordinaten-System vollständig bestimmt, der bequemern Entwicklung wegen, führen wir aber, wie wir es auch schon bei der Verwandlung der Punct-Coordinaten gethan haben, folgende Bezeichnung ein:

$$X'OX = \varphi, \quad Y'OX = \varphi', \quad X'OY = \psi, \quad Y'OY = \psi';$$
$$YOX = \varphi - \psi = \varphi' - \psi' = \vartheta,$$
$$Y'OX' = \varphi' - \varphi = \psi' - \psi = \xi.$$

Wir nennen also den ursprünglichen Coordinaten-Winkel ϑ, den neuen Coordinaten-Winkel ξ.

Zuerst wollen wir wiederum $\frac{v}{n}$ und $\frac{w}{n}$, oder, der Kürze halber, indem wir $n = 1$ setzen, v und w als Coordinaten betrachten, und die entsprechenden Coordinaten in dem neuen Systeme durch v und w bezeichnen. Da die Gleichung des Punctes immer vom ersten Grade bleibt, auf welches System wir denselben beziehen mögen, so erhalten wir für denselben beliebigen Punct Gleichungen von folgender Form:

$$a + bv + cw = 0$$
$$a' + b'v + c'w = 0$$

und, um von der ersten Gleichung zur zweiten überzugehen, ist die allgemeinste Form der Ausdrücke für v und w folgende:

$$v = \frac{m + nv + pw}{q + rv + sw},$$
$$w = \frac{m' + n'v + p'w}{q + rv + sw}. \qquad (5)\ ^*)$$

---

*) Wir dürfen durchaus nicht in diesen Ausdrücken die Nenner vernachlässigen. Wenn wir dieses thäten, so brauchten wir, um die unbestimmten Coefficienten, die alsdann auf sechs sich reducirten, zu bestimmen, nur die beiden ersten Axen und eine solche gerade Linie zu betrachten, die einer derselben parallel ist, und nicht, wie im Texte nothwendig ist, auch die beiden zweiten Axen. Ohne dass wir, bei dieser Bestimmung selbst, auf Widersprüche geriethen, kämen wir doch zu einem falschen Resultate. Es liefert diese Bemerkung einen Beleg für die Behauptung, dass wir nur mit Vorsicht uns der Methode der unbestimmten Coefficienten bedienen dürfen.

Man überzeugt sich leicht, dass die Nenner der in Rede stehenden Ausdrücke nur dann von v und w unabhängig werden und also vernachlässigt werden dürfen, wenn v und w zugleich mit v und w verschwinden, dass sie aber nie fehlen dürfen, wenn v und w für gewisse endliche Werthe von v und w unendlich werden. Der letztere Fall ist der vorliegende. Bei der Verwandlung der gewöhnlichen Punct-Coordinaten hingegen, gleichviel, ob wir zwei oder drei Dimensionen des Raumes betrachten, können wir sogleich annehmen, dass die ursprünglichen Coordinaten durch lineare und ganze Functionen der neuen Coordinaten gegeben seien; nur müssen wir, um diese Annahme zu rechtfertigen, zeigen, dass, für diesen besondern Fall, kein Nenner, der v oder w enthält, da sein kann. Die Schlussweise, welche Herr Biot in seinem

Essai de Géométrie analytique. Sixième Edition; Nro. 97

bei Gelegenheit der Verwandlung der Punct-Coordinaten im Raume anwendet, bedarf hiernach der Berichtigung.

Es ist ein nothwendiges Erforderniss, dass die Nenner in den Ausdrücken bei (5) beide dieselben sind. Es werden v und w zugleich unendlich. Und dies muss immer geschehen, wenn wir von irgend einer beliebigen Coordinaten-Bestimmung zu einer andern Coordinaten-Bestimmung vermittelst linearer Verwandlungs-Formeln übergehen wollen. Nur in diesem Falle wird bei der Veränderung des Coordinaten-Systems (ich nehme dies Wort in seiner allgemeinen Bedeutung) derselbe geometrische Ort immer durch eine Gleichung

Digitized by Google

In diesen Ausdrücken für v und w bezeichnen m, n, p, m', n', p', q, r und s unbestimmte Coefficienten, die von der Lage des neuen Systems in Beziehung auf das ursprüngliche abhängen, also Functionen der beiden Winkel φ und ψ sind. Um diese Coefficienten, von denen wir einen beliebigen beliebig annehmen können, zu bestimmen, wollen wir, da die letzten Gleichungen auf alle Fälle sich beziehen müssen, specielle Lagen von geraden Linien näher betrachten.

Für die erste neue Axe ist:

$$v = \frac{\sin\varphi}{\sin\psi}, \qquad \rho = 0, \qquad w = \varpi = 0;$$

hiernach geben die beiden Gleichungen (5):

$$\frac{\sin\varphi}{\sin\psi} = \frac{m}{q}, \tag{6}$$

$$0 = m'. \tag{7}$$

Für die zweite neue Axe ist:

$$v = \frac{\sin\varphi'}{\sin\psi'}, \qquad \rho = \infty, \qquad w = \varpi = 0;$$

hiernach geben die beiden Gleichungen (5):

$$\frac{\sin\varphi'}{\sin\psi'} = \frac{n}{r}, \tag{8}$$

$$0 = n'. \tag{9}$$

Für die erste ursprüngliche Axe ist:

$$v = 0, \qquad \rho = \frac{\sin\varphi}{\sin\varphi}, \qquad w = \varpi = 0,$$

für die zweite ursprüngliche Axe

$$v = \infty, \qquad \rho = \frac{\sin\psi}{\sin\psi}, \qquad w = \varpi = 0,$$

in diesen beiden Fällen gibt die erste der Gleichungen (5):

$$0 = m + n\frac{\sin\varphi}{\sin\varphi}, \tag{10}$$

$$0 = q + r\frac{\sin\psi}{\sin\psi}; \tag{11}$$

Der oben schon gemachten Bemerkung gemäss, wollen wir

$$q = \sin\psi$$

---

von demselben Grade dargestellt und nur dann wird, im Allgemeinen, die Coordinaten-Annahme den Vortheil einer leichten Discussion der Eigenschaften geometrischer Oerter gewähren. In der eben gemachten Bemerkung liegt ein Criterium für die Wahl eines solchen Coordinaten-Systems. Wenn wir z. B. statt eine gerade Linie durch die reciproken Werthe der Abstände ihrer Durchschnittspuncte mit der zweiten und ersten Axe vom Anfangspuncte zu bestimmen, dieselbe durch diese Abstände selbst bestimmten, und diese Abstände, die wir q und p nennen wollen, als Coordinaten dieser Linie betrachteten, und dann die Coordinaten-Axe um den Anfangspunct sich drehen liessen und die analogen Coordinaten der Linie in Beziehung auf die neuen Axen durch q' und p' bezeichneten: so würde, bei endlichen Werthen von q' und p', wenn die bezügliche gerade Linie der ersten ursprünglichen Axe parallel wäre, p unendlich werden, nicht aber q; und wenn die bezügliche gerade Linie der zweiten ursprünglichen Axe parallel wäre, würde q unendlich werden, nicht aber p. Wir sehen hieraus, dass p und q nicht so geeignet sind, als Coordinaten von geraden Linien genommen zu werden, als ihre reciproken Werthe, wenn wir auch auf den ersten Blick geneigt sein sollten, ihnen den Vorzug zu geben.

setzen, alsdann geben die beiden Gleichungen (6) und (11):

$$m = \sin\varphi, \qquad r = -\sin\psi',$$

und hiernach geben die Gleichungen (8) und (10) übereinstimmend:

$$n = -\sin\varphi'.$$

Die Gleichung (10) zeigt überdiess, dass

$$p = 0,$$

und die Gleichung (11), dass

$$s = 0.$$

Hiernach bleibt bloss noch der Coefficient p' zu bestimmen übrig. Wir können denselben auf eine einfache Weise bestimmen, wenn wir irgend eine, der ersten neuen Axe parallele, gerade Linie betrachten. Wir kommen dazu aber auch durch folgende Betrachtung. Wenn wir nur die erste Axe um irgend einen Winkel φ sich drehen lassen, die zweite Axe aber nicht, so ist $w = \varpi$. Es ist alsdann aber auch

$$q = \sin\psi = -\sin\xi, \qquad r = -\sin\psi' = 0,$$

und da überdies:

$$m' = n' = s = 0,$$

so gibt die zweite der Gleichungen (5):

$$w = -\frac{p'\varpi}{\sin\xi},$$

mithin:

$$p' = -\sin\xi.$$

Fassen wir endlich die letzten Resultate zusammen, so erhalten wir:

$$v = \frac{\sin\varphi - v\sin\varphi'}{\sin\psi - v\sin\psi'}, \qquad w = \frac{-\varpi\sin\xi}{\sin\psi - v\sin\psi'}. \tag{12}$$

Wir hätten die Form dieser Ausdrücke wiederum voraussehen können, denn

$$\sin\psi - v\sin\psi' = 0$$

ist die Gleichung eines Punctes, der auf der zweiten ursprünglichen Axe, oder, was dasselbe heisst, auf einer beliebigen, ihr parallelen, geraden Linie, unendlich weit liegt. Für solche Linien, die durch diesen Punct gehen (jener Axe parallel sind), und nur für solche Linien, ist v sowol als w unendlich. v ist Null nur für solche gerade Linien, die durch den Punct:

$$\sin\varphi - v\sin\varphi' = 0,$$

der auf der ersten Axe unendlich weit entfernt liegt, gehen und w verschwindet nur und immer für solche gerade Linien, die durch den Anfangspunct gehen, zugleich mit ϖ.

Wenn wir, umgekehrt, ϱ und ϖ durch v und w ausdrücken wollen, so ist klar, dass ϱ sowol als ϖ beide nur für solche gerade Linien unendlich werden, die durch den auf der zweiten neuen Axe unendlich weit liegenden Punct:

$$\sin\varphi' - v\sin\psi' = 0,$$

gehen, oder, mit andern Worten, der eben genannten Axe parallel sind: den ersten Theil der vorstehenden Gleichung können wir also für den gemeinschaftlichen Nenner der Ausdrücke von ϱ und ϖ nehmen. Ferner verschwindet v nur, wenn

$$\sin\varphi - v\sin\psi = 0,$$

und ϖ verschwindet mit w. Hiernach bestimmt sich die Form der Zähler in den gesuchten Ausdrücken von ϱ und ϖ und wir erhalten:

$$\varrho = c.\frac{\sin\varphi - v\sin\psi}{\sin\varphi' - v\sin\psi'},$$
$$\varpi = c'.\frac{w}{\sin\varphi' - v\sin\psi'}. \qquad (13)$$

c und c' sind zwei leicht zu bestimmende constante Grössen; man erhält nemlich:

$$c = 1, \qquad c' = \sin\vartheta.$$

Dieselben beiden Ausdrücke für ϱ und ϖ hätten wir durch Buchstaben-Vertauschung aus den Gleichungen (12) herleiten können.

Wenn das neue Coordinaten-System, zu dem wir übergehen, ein rechtwinkliges ist, so haben wir:

$$\xi = \varphi' - \varphi = \psi' - \psi = {}^1/_2\pi,$$

mithin:

$$\sin\xi = 1, \quad \sin\varphi' = \cos\varphi, \quad \sin\psi' = \cos\psi.$$

Wenn das ursprüngliche Coordinaten-System ein rechtwinkliges ist, so ist:

$$\vartheta = \varphi' - \psi' = \varphi - \psi = {}^1/_2\pi,$$

mithin:

$$\sin\vartheta = 1, \quad \sin\psi' = -\cos\varphi', \quad \sin\psi = -\cos\varphi.$$

Wenn wir endlich von einem rechtwinkligen Coordinaten-Systeme zu einem rechtwinkligen übergehen, so ist:

$$\sin\varphi' = \cos\varphi, \quad \sin\psi = -\cos\varphi, \quad \sin\psi' = \sin\varphi,$$
$$\sin\vartheta = \sin\xi = 1.$$

Nach diesen Bemerkungen erhalten wir aus den Gleichungen (12) und (13) folgende Zusammenstellung von Verwandlungs-Formeln, wenn wir wieder $\frac{v}{u}$, $\frac{\varrho}{u}$, $\frac{w}{u}$ und $\frac{\varpi}{u}$ an die Stelle von v, ϱ, w und ϖ schreiben:

1) Uebergang von einem schiefwinkligen Systeme zu einem schiefwinkligen und rückwärts:

$$(A)\begin{cases}\frac{v}{u} = \frac{u\sin\varphi - v\sin\varphi'}{u\sin\psi - v\sin\psi'} \\ \frac{w}{u} = \frac{-w\sin\xi}{u\sin\psi - v\sin\psi'}\end{cases} \qquad \begin{cases}\frac{\varrho}{u} = \frac{u\sin\varphi - v\sin\psi}{u\sin\varphi' - v\sin\psi'} \\ \frac{\varpi}{u} = \frac{w\sin\vartheta}{u\sin\varphi' - v\sin\psi'}\end{cases} (A')$$

2) Uebergang von einem schiefwinkligen Systeme zu einem rechtwinkligen und rückwärts:

$$(B)\begin{cases}\frac{v}{u} = \frac{\sin\varphi - v\cos\varphi}{\sin\psi - v\cos\psi} \\ \frac{w}{u} = \frac{-w}{\sin\psi - v\cos\psi};\end{cases} \qquad \begin{cases}\frac{\varrho}{u} = \frac{u\sin\varphi - v\sin\psi}{u\cos\varphi - v\cos\psi} \\ \frac{\varpi}{u} = \frac{w\sin\vartheta}{u\cos\varphi - v\cos\psi}\end{cases} (B')$$

3) Uebergang von einem rechtwinkligen Systeme zu einem schiefwinkligen und rückwärts:

$$(C)\begin{cases}\frac{v}{u} = -\frac{\sin\varphi - v\sin\varphi'}{u\cos\varphi - v\cos\varphi'} \\ \frac{w}{u} = \frac{w\sin\xi}{u\cos\varphi - v\cos\varphi};\end{cases} \qquad \begin{cases}\frac{\varrho}{u} = \frac{u\sin\varphi + v\cos}{u\sin\varphi' + v\cos\varphi'} \\ \frac{\varpi}{u} = \frac{w}{u\sin\varphi' + v\cos\varphi}\end{cases} (C')$$

4) Uebergang von einem rechtwinkligen Systeme zu einem rechtwinkligen und rückwärts:

$$(D)\begin{cases}\frac{v}{u} = -\frac{\sin\varphi - v\cos\varphi}{u\cos\varphi + v\sin\varphi} \\ \frac{w}{u} = \frac{w}{u\cos\varphi + v\sin\varphi};\end{cases} \qquad \begin{cases}\frac{\varrho}{u} = \frac{u\sin\varphi + v\cos\varphi}{u\cos\varphi - v\sin\varphi} \\ \frac{\varpi}{u} = \frac{w}{u\cos\varphi - v\sin\varphi}\end{cases} (D')$$

Digitized by Google

Wenn wir zweitens $\frac{n}{w}$ nnd $\frac{v}{w}$, $\frac{u}{w}$ und $\frac{v}{w}$ als die eigentlichen veränderlichen Grössen betrachten, so erhalten wir für diese Coordinaten aus den eben zusammengestellten Gleichungen die nachstehenden Verwandlungs-Formeln:

1) Uebergang von einem schiefwinkligen Systeme zu einem schiefwinkligen nnd rückwärts:

$$(E)\quad \left\{\begin{array}{ll} \frac{n}{w} = -\frac{u\sin\psi - v\sin\psi'}{w\sin\xi}, & \frac{u}{w} = \frac{u\sin\varphi' - v\sin\psi'}{w\sin\vartheta}, \\ \frac{v}{w} = -\frac{u\sin\varphi - v\sin\varphi'}{w\sin\xi}; & \frac{v}{w} = \frac{n\sin\varphi - v\sin\psi}{w\sin\vartheta}. \end{array}\right\} (E')$$

2) Uebergang von einem schiefwinkligen Systeme zu einem rechtwinkligen und rückwärts:

$$(F)\quad \left\{\begin{array}{ll} \frac{n}{w} = -\frac{u\sin\psi - v\cos\psi}{w}, & \frac{u}{w} = \frac{u\cos\varphi - v\cos\psi}{w\sin\vartheta}, \\ \frac{v}{w} = -\frac{u\sin\varphi - v\cos\varphi}{w}; & \frac{v}{w} = \frac{u\sin\varphi - v\sin\psi}{w\sin\vartheta}. \end{array}\right\} (F')$$

3) Uebergang von einem rechtwinkligen Systeme zu einem schiefwinkligen nnd rückwärts:

$$(G)\quad \left\{\begin{array}{ll} \frac{u}{w} = \frac{u\cos\varphi - v\cos\varphi'}{w\sin\xi}, & \frac{u}{w} = \frac{n\sin\varphi' + v\cos\varphi'}{w}, \\ \frac{v}{w} = -\frac{u\sin\varphi - v\sin\varphi'}{w\sin\xi}; & \frac{v}{w} = \frac{u\sin\varphi + v\cos\varphi}{w}. \end{array}\right\} (G')$$

4) Uebergang von einem rechtwinkligen Systeme zu einem rechtwinkligen und rückwärts:

$$(H)\quad \left\{\begin{array}{ll} \frac{n}{w} = \frac{u\cos\varphi + v\sin\varphi}{w}, & \frac{u}{w} = \frac{n\cos\varphi - v\sin\varphi}{w}, \\ \frac{v}{w} = -\frac{u\sin\varphi - v\cos\varphi}{w}; & \frac{v}{w} = \frac{n\sin\varphi + v\cos\varphi}{w}. \end{array}\right\} (H')$$

Gleichzeitige Verlegung des Anfangspunctes und Aenderung der Axen-Richtung.

453. Da sich $\frac{v}{u}$ nnd $\frac{v}{u}$, oder v nnd v, wenn wir n nnd u gleich Eins setzen, nicht ändern, wenn wir bloss den Anfangspnnct der Coordinaten verlegen, so bestehen die ersten der Gleichungen (A), (B), (C), (D), (A'), (B'), (C') und (D') auch für den allgemeinen Fall, wo wir zugleich Anfangspnnct nnd Axen-Richtung anders bestimmen.

Um für denselben allgemeinen Fall anch w durch die neuen Coordinaten auszudrücken, wollen wir zuerst den Anfangspnnct der Coordinaten verlegen. Alsdann erhalten wir nach der 450. Nummer:

$$w = W - Vx' - y',$$

wenn die Coordinaten W nnd V sich auf das, anf diese Weise hervorgehende, System beziehen, nnd (y', x') der nene Anfangspnnct ist. Dann wollen wir ferner die beiden Axen nm den neuen Anfangspnnct sich drehen lassen. Wir erhalten alsdann, bei derselben Winkelbezeichnung als vorher:

$$\left.\begin{array}{l} Y = \frac{u\sin\varphi - v\sin\varphi'}{u\sin\psi - v\sin\psi'}, \\ W = \frac{-w\sin\xi}{u\sin\psi - v\sin\psi'}, \end{array}\right\} (A')$$

und hiernach:

$$w = -\frac{u(y'\sin\psi + x'\sin\varphi) - v(y'\sin\psi' + x'\sin\varphi') + w\sin\xi}{u\sin\psi - v\sin\psi'}.$$

Um, umgekehrt, $\frac{w}{u}$ durch die ursprünglichen Coordinaten zu erhalten, brauchen wir nur in der zweiten der beiden Gleichungen (A') u gleich Eins zu setzen und für w zu schreiben: $w+vx'+y'$, alsdann ergibt sich sogleich:

$$\frac{w}{u} = \frac{(y'+vx'+w)\sin\vartheta}{\sin\varphi'-v\sin\psi'}.$$

Die Form der Zähler in den Ausdrücken von w und $\frac{w}{u}$ wird dadurch bedingt, dass diese Ausdrücke verschwinden, wenn die bezüglichen geraden Linien einmal durch den ursprünglichen, das andere Mal durch den neuen Anfangspunct gehen. Die Coordinaten, y und x, des ursprünglichen Anfangspunctes, bezogen auf das neue System, sind (90 (3)):

$$y' = \frac{y'\sin\psi+x'\sin\varphi}{\sin\xi}, \qquad x' = -\frac{y'\sin\psi'+x'\sin\varphi'}{\sin\xi};$$

mithin ist die Gleichung desselben:

$$u(y'\sin\psi+x'\sin\varphi)-v(y'\sin\psi'+x'\sin\varphi')+w\sin\xi = 0.$$

Der erste Theil dieser Gleichung muss also im Zähler des Ausdruckes für w vorkommen. Auf ähnliche Weise erscheint der erste Theil der Gleichung:

$$y'+vx'+w = 0,$$

die den neuen Anfangspunct darstellt, als Factor im Zähler des Ausdruckes von $\frac{w}{u}$.

Ich halte es für überflüssig, die Verwandlungs-Formeln für den allgemeinsten Fall, dass Axen-Richtung und Anfangspunct zugleich sich ändern, hier zusammenzustellen. Wir werden in dem Folgenden die beiden partiellen Umformungen jede für sich betrachten. —

Wir hätten auch alle die vorstehenden Entwicklungen an die Verwandlung der Punct-Coordinaten anschliessen können. Ich zog aber für jetzt vor, dieselben selbstständig für sich hinzustellen.

Digitized by Google

Zweiter Abschnitt.

Zur Theorie der Oerter zweiter Classe.

454. Jeder geometrische Ort, der durch eine homogene Gleichung des zweiten Grades zwischen den drei veränderlichen Grössen u, v und w, die Linien-Coordinaten bedeuten, dargestellt wird, nennen wir einen geometrischen Ort zweiter Classe. Für die allgemeine Gleichung der Oerter dieser Classe wollen wir folgende nehmen:

$$Aw^2+2Bvw+Cv^2+2Duw+2Euv+Fu^2 = 0.$$

In dieser Gleichung können wir jede der drei Coordinaten als constante Grösse betrachten und etwa gleich Eins setzen. Alsdann erhalten wir aus der vorstehenden Gleichung die vollständige Gleichung des zweiten Grades zwischen den beiden übrigbleibenden Coordinaten, die alsdann, so wie die Quotienten je zweier der drei Coordinaten in dem frühern Falle, für eine bestimmte gerade Linie bestimmte Werthe erhalten. Die Gleichungen, welche wir auf diese Weise erhalten, sind eben so allgemein als die vorstehende, und eine solche Gleichung irgend eines Ortes zwischen zwei veränderlichen Grössen können wir, wenn wir für spätere Entwicklungen Symmetrie bezwecken, durch Einführung der dritten veränderlichen Grösse sogleich homogen machen.

Wir haben den Factor 2, da wo er in der vorigen Gleichung vorkommt, lediglich nur, um in den folgenden Entwicklungen Brüche zu vermeiden, hinzugefügt. Einen der sechs Coefficienten dieser Gleichung können wir beliebig annehmen und etwa gleich Eins setzen; um aber für diesen Coefficienten, je nach den verschiedenen Absichten, jeden beliebigen nehmen zu können, behalten wir einstweilen alle sechs Coefficienten bei.

Diese sechs Coefficienten und ihre gegenseitige Beziehung zu einander sind zum Theil von der Natur des dargestellten geometrischen Ortes, zum Theil von der Annahme des Coordinaten-Systems abhängig. Durch schickliche Umformung der Coordinaten können wir der allgemeinen Gleichung die möglichst einfache Form geben und aus dieser möglichst einfachen Form die Natur der Curve am besten erkennen. Zugleich werden wir auf diese Weise alle besondern Arten von geometrischen Oertern, die durch die allgemeine Gleichung bei verschiedener Annahme der Constanten dargestellt werden, am leichtesten unterscheiden können.

Digitized by Google

Die characteristische Eigenschaft der Curven zweiter Classe, welche die unmittelbarste Folge daraus ist, dass solche Curven, der Definition gemäss, durch Gleichungen des zweiten Grades dargestellt werden, besteht darin, dass man, von jedem beliebigen Puncte aus, zwei und nur zwei Tangenten an dieselben legen kann. Denn, wenn wir zwischen der allgemeinen Gleichung (1) und der allgemeinen Gleichung des Punctes:

$$au+bv+cw = 0,$$

etwa die Werthe von $\frac{v}{u}$ und $\frac{w}{u}$ eliminiren, so erhalten wir eine zwiefache Bestimmung derselben, und also zwei gerade Linien, die, weil jene Werthe beide Gleichungen befriedigen, einerseits die Curve berühren und andrerseits durch den Punct gehen. Es versteht sich von selbst, dass diese beiden geraden Linien zusammenfallen und imaginär werden können.

§ 1.

Verlegung des Anfangs-Punctes der Coordinaten. Discussion aller einzelnen Fälle, welche die allgemeine Gleichung umfasst. Brennpuncte.

455. Indem wir u gleich Eins setzen, erhalten wir für die allgemeine Gleichung der Oerter zweiter Classe folgende:

$$Aw^2+2Bvw+Cv^2+2Dw+2Ev+F = 0. \qquad (1)$$

Wenn wir den Anfangspunct der Coordinaten in irgend einen Punct (y', x'), über den wir im Voraus durchaus keine nähere Bestimmung machen, verlegen, so bleibt in der vorstehenden Gleichung v unverändert, statt w müssen wir aber (450):

$$w-vx'-y',$$

in dieselbe substituiren. Diese Gleichung verwandelt sich hiernach in folgende:

$$Aw^2+2(B-Ax')vw+(C-2Bx'+Ax'^2)v^2+2(D-Ax')w$$
$$+2(E-Dx'-By'+Ax'y')v+(F-2Dy'+Ay'^2) = 0. \qquad (2)$$

Bei einer schicklichen Bestimmung des neuen Anfangspunctes der Coordinaten können wir immer, wenn nur nicht A gleich Null ist, aus der letzten Gleichung die mit w und vw behafteten Glieder ausfallen lassen. Wir brauchen zu diesem Ende nur:

$$x' = \frac{B}{A}, \qquad y' = \frac{D}{A} \qquad (3)$$

zu setzen. Alsdann geht die Gleichung (2), wenn wir zugleich mit A multipliciren, in folgende über:

$$A^2w^2+(AC-B^2)v^2+2(AE-BD)v+(AF-D^2) = 0. \qquad (4)$$

Die Form dieser Gleichung zeigt, dass jedem beliebigen Werthe von v zwei gleiche und entgegengesetzte Werthe von w entsprechen. Wenn wir also nach einander n beliebige Werthe für v annehmen und die bezüglichen geraden Linien construiren, so erhalten wir ein, der durch die Gleichung (2) dargestellten Curve umschriebenes, (2n)Eck, das den neuen Anfangspunct zum Mittelpuncte hat und dessen Diagonalen sich also auch in diesem Puncte gegenseitig halbiren. Wenn wir n immer mehr wachsen lassen, so nähert sich das Polygon der Curve immer mehr; der neue Anfangspunct (y', x') ist auch der Mittelpunct der Curve. Jede von der Curve begränzte gerade Linie, die durch

diesen Punct geht, jeder Durchmesser der Curve, wird in diesem Puncte halbirt. Durch die Gleichung (3) sind die Coordinaten-Werthe des Mittelpunctes des, durch die Gleichung (1) dargestellten, geometrischen Ortes bestimmt, und für die Gleichung dieses Punctes erhalten wir hiernach (406):

$$Aw+Bv+Du = 0.$$

456. Wir wollen uns nun zur Discussion der Gleichung (4) zurückwenden. Wir erhalten unmittelbar aus dieser Gleichung:

$$w^2 = -\frac{AC-B^2}{A^2}\left\{v^2+2\frac{AE-BD}{AC-B^2}v+\frac{AF-D^2}{AC-B^2}\right\}. \qquad (5)$$

Nun sind folgende drei Haupt-Fälle möglich, die wir näher untersuchen müssen; es kann der Werth von w, den die letzte Gleichung gibt, 1° für jeden Werth von v reell 2° für gewisse Werthe von v reell, für andere imaginär, 3° für alle Werthe von v imaginär sein.

Der in der Klammer befindliche Ausdruck bleibt, was aus der Theorie der Gleichungen bekannt ist, immer positiv, welche Werthe wir auch für v annehmen mögen, wenn die Gleichung:

$$v^2+2\frac{AE-BD}{AC-B^2}v+\frac{AF-D^2}{AC-B^2} = 0, \qquad (6)$$

imaginäre Wurzeln hat. Die Wurzeln dieser Gleichung sind aber:

$$-\frac{AE-BD\pm\sqrt{(AE-BD)^2-(AC-B^2)(AF-D^2)}}{AC-B^2}, \qquad (7)$$

und diese Wurzeln sind imaginär, wenn:

$$(AE-BD)^2-(AC-B^2)(AF-D^2) < 0. \qquad (8)$$

In diesem Falle hängt also die Realität von w einzig vom Zeichen des Werthes von $(AC-B^2)$ ab. Wenn

$$AC-B^2 > 0,$$

so ist w^2 immer negativ, und also w immer imaginär. Die durch die gegebene Gleichung (1) dargestellte Curve hat also in diesem Falle keine einzige reelle Tangente: die Curve selbst ist imaginär.

Wenn wir statt des letzten Ausdruckes folgenden haben:

$$AC-B^2 < 0,$$

so bleibt w^2 immer positiv und also w immer reell. Die Curve ist also, da ihre Tangenten alle möglichen Richtungen annehmen können, und keine derselben durch den neuen Anfangspunct geht, eine in sich geschlossene Curve, und heisst Ellipse.

457. Wenn die Wurzeln der Gleichung (6) reell sind, so ist:

$$(AE-BD)^2-(AC-B^2)(AF-D^2) > 0. \qquad (9)$$

Findet diese Bedingung Statt, so gibt es zwei Werthe von v, für welche w gleich Null wird. Die bezüglichen geraden Linien gehen durch den Anfangspunct, den Mittelpunct der Curve. Bezeichnen wir diese Werthe von v durch v' und v'', so kommt:

$$w^2 = -\frac{AC-B^2}{A^2}\{(v-v')(v-v'')\}.$$

Wenn

$$AC-B^2 > 0,$$

so sind die Werthe von w dann reell, wenn die Werthe von v zwischen v' und v'' angenommen werden; sonst imaginär. Wenn hingegen

$$AC-B^2 < 0,$$

so wird w dann imaginär, wenn v zwischen v' und v'' angenommen wird, und ist reell, wenn v entweder grösser als v' und v'', oder kleiner als v' und v'' bestimmt wird. Die durch die Gleichung (1) in den zuletzt betrachteten Fällen dargestellte Curve heisst Hyperbel, jene beiden durch v' und v'' bestimmten geraden Linien ihre Asymptoten. Man kann leicht, ohne vorzugreifen, bloss aus der geometrischen auf das Bisherige fussenden Betrachtung den Lauf der Curve nachweisen und insbesondere zeigen, dass die Berührungspuncte auf den Asymptoten unendlich weit liegen. Ohne hierauf einzugehen, bemerken wir bloss, dass die aus zwei gesonderten Zweigen bestehende Curve in dem einen oder dem andern Paare der von den beiden Asymptoten gebildeten Scheitelwinkel liegt, je nachdem der Ausdruck $(AC-B^2)$ positiv oder negativ ist.

458. Wenn endlich die Wurzeln der Gleichung (6) einander gleich sind, so kommt:

$$(AE-BD)^2-(AC-B^2)(AF-D^2) = 0, \qquad (10)$$

und die Wurzeln selbst werden gleich:

$$-\frac{AE-BD}{AC-B^2}.$$

Setzen wir diesen Ausdruck, der Kürze halber, gleich v''', so kommt:

$$w^2 = \frac{AC-B^2}{A^2}(v-v''')^2. \qquad (11)$$

Diese Gleichung gibt für w immer reelle Wurzeln, wie wir auch v annehmen mögen, wenn:

$$AC-B^2 < 0;$$

wenn hingegen:

$$AC-B^2 > 0,$$

so sind die Wurzeln immer imaginär, ausgenommen wenn

$$v = v''' = -\frac{AE-BD}{AC-B^2}.$$

Wir können der Gleichung (1) folgende Form geben:

$$\left\{w-\sqrt{B^2-AC}.\ \frac{v-v'''}{A}\right\}\left\{w+\sqrt{B^2-AC}.\ \frac{v-v'''}{A}\right\} = 0,$$

und dieselbe also in folgende zwei Gleichungen des ersten Grades auflösen:

$$w = \sqrt{B^2-AC}.\ \frac{v-v'''}{A},$$

$$w = -\sqrt{B^2-AC}.\ \frac{v-v'''}{A}.$$

Die gegebene Gleichung (1) stellt also in diesem Falle zwei Puncte dar, die je nachdem der Ausdruck $(AC-B^2)$ negativ oder positiv ist, reell oder imaginär sind.

Wenn wir die beiden letzten Gleichungen addiren, so ergibt sich:

$$w = 0,$$

d. h. (410) der Anfangspunct liegt in der Mitte zwischen den beiden durch die gegebene Gleichung (1) dargestellten Puncte; wir können diesen Punct also immer noch als Mittelpunct betrachten.

Diejenige gerade Linie, welche die beiden durch die gegebene Gleichung dargestellten Puncte verbindet, hat zu einer ihrer Coordinaten:

$$v''' = -\frac{AE-BD}{AC-B^2}. \qquad (12)$$

Digitized by Google

Substituiren wir diesen Werth für v in die Gleichung des neuen Anfangspunctes, durch den die in Rede stehende gerade Linie geht, also in folgende Gleichung:

$$Aw+Bv+D = 0,$$

so ergibt sich für die andere Coordinate, die wir durch w''' bezeichnen wollen:

$$w''' = \frac{BE-CD}{AC-B^2}. \qquad (13)$$

In dem Falle, dass die beiden, durch die gegebene Gleichung dargestellten, Puncte imaginär sind, können wir immer noch sagen, dass diese beiden Puncte auf der reellen geraden Linie (w''', v''') liegen. Wir können aber auch in diesem Falle von jenen beiden imaginären Puncten ganz abstrahiren, und sagen, dass die gegebene Gleichung eine einzige gerade Linie darstelle; weil es keine andern reellen Werthe für w und v gibt, durch welche diese Gleichung befriedigt wird, als w''' und v'''.

Die durch die allgemeine Gleichung dargestellten beiden Puncte sind, wenn wir die Mitte zwischen diesen beiden Puncten zum Anfangspuncte der Coordinaten nehmen, und demnach $B = D = 0$ setzen, jeder für sich allein durch folgende beiden, in eine einzige zusammengezogenen, Gleichungen gegeben:

$$Aw \mp V\overline{-AC}.\ v \mp V\overline{-AC}.\ v'''u = 0.$$

Da in diesem Falle die Bedingungs-Gleichung (10) auf folgende sich reducirt:

$$E^2-CF = 0,$$

und man überdiess:

$$v''' = -\frac{E}{C}$$

erhält, so gehen die Gleichungen der beiden Puncte in folgende über:

$$w \mp V\left(-\frac{C}{A}\right).\ v \mp V\left(-\frac{F}{A}\right).\ n = 0.$$

Die Coordinaten dieser beiden Puncte sind also:

$$y = \mp V\left(-\frac{F}{A}\right), \qquad x = \mp V\left(-\frac{C}{A}\right).$$

und hiernach ist das Quadrat ihrer Entfernung gleich

$$\left(-\frac{C+F}{A}\right).$$

459. Wir haben bisher durchgehends denjenigen Fall noch unberücksichtigt gelassen, wo

$$AC-B^2 = 0. \qquad (14)$$

Zuerst wollen wir annehmen, es bestehe diese Gleichung neben der Bedingungs-Gleichung:

$$(AE-BD)^2-(AC-B^2)(AF-D^2) = 0, \qquad (10)$$

welche anzeigt, dass der erste Theil der gegebenen Gleichung (1) sich in zwei Factoren der ersten Grades zerlegen lässt, und reducire also diese Gleichung auf

$$(AE-BD)^2 = 0,$$

aus der folgt, dass

$$AE-BD = 0.$$

Unter diesen Bedingungen verwandelt sich die Gleichung (3) in folgende:

$$A^2w^2+(AF-D^2) = 0.$$

Diese Gleichung zeigt, dass in diesem Falle die beiden, durch die gegebene Gleichung (1) dargestellten Puncte auf der neuen zweiten Axe, also auf einer, der ursprüng-

lichen zweiten Axe parallelen geraden Linie, liegen, und beide reell oder imaginär sind, je nachdem

$$AF-D^2 < o,$$

oder

$$AF-D^2 > o.$$

Für die gerade Linie, auf welcher diese beiden Puncte liegen, ergibt sich

$$-\frac{w}{v} = x' = \frac{B}{A}.$$

Wenn endlich:

$$AF-D^2 = o,$$

so verwandelt sich (4) in

$$w^2 = o:$$

die gegebene Gleichung (1) stellt alsdann zwei, in den neuen Anfangspunct $\left(\frac{D}{A}, \frac{B}{A}\right)$ zusammenfallende, Puncte dar.

460. Diese Resultate sind in Uebereinstimmung mit den Entwicklungen der 458. Nummer. Die beiden Gleichungen:

$$AC-B^2 = o, \qquad AE-BD = o,$$

bringen nemlich folgende dritte mit sich:

$$BE-CD = o;$$

und somit erscheinen die Ausdrücke für v''' und w''', d. h. für die Coordinaten derjenigen geraden Linie, welche die beiden in Rede stehenden Puncte verbindet, beide unter der Form $\frac{o}{o}$, und es kommt darauf an, die wahren Werthe dieser Ausdrücke zu erhalten. Man sieht sogleich aus der Form der Gleichung (10), dass, wenn wir $(AC-B^2)$ als eine kleine fast verschwindende Grösse betrachten, diese Grösse, so lange nicht auch $(AF-D^2)$ einen verschwindenden Werth erhält, nothwendig ein Kleines der zweiten Ordnung in Beziehung auf $(AE-BD)$ ist; und dann ist wiederum leicht ersichtlich, dass $(BE-CD)$ mit dem letzten Ausdrucke ein Kleines derselben Ordnung ist. Die wahren Gränzwerthe der beiden Ausdrücke:

$$v''' = \frac{AE-BD}{AC-B^2}, \qquad w''' = \frac{BE-CD}{AC-B^2},$$

sind also unendlich. Die bezügliche gerade Linie ist der zweiten Axe parallel. Für den Durchschnitt dieser Linie mit der ersten Axe erhalten wir:

$$\frac{w'''}{v'''} = \frac{BE-CD}{AE-BD},$$

einen Ausdruck, der wiederum unter der Form $\frac{o}{o}$ erscheint. Den wahren Werth desselben erhalten wir, wenn wir die Division des Nenners in den Zähler ausführen. Man hat nemlich:

$$\frac{BE-CD}{AE-BD} = \frac{B}{A} - \frac{A(AE-BD)}{AC-B^2},$$

und der letzte Theil dieser Gleichung reducirt sich, da sein zweites Glied verschwindet, auf $\frac{B}{A}$, in Uebereinstimmung mit der vorigen Nummer.

Wenn aber $(AF-D^2)$ zugleich mit $(AC-B^2)$ verschwindet, so erscheinen die Ausdrücke für v''', w''' und $\frac{w'''}{v'''}$ unter der Form $\frac{o}{o}$, die nicht mehr reducirbar ist: die gerade

Linie, welche durch die beiden in Rede stehenden (zusammenfallenden) Puncte geht, kann jede beliebige Richtung haben.

461. Es verwandelt sich ferner, wenn wir

$$AC-B^2 = 0$$

setzen, die Bedingung (9) in folgende:

$$(AE-BD)^2 > 0,$$

in eine Bedingung, die jedesmal erfüllt wird. In diesem Falle erhalten wir aus der Gleichung (6):

$$(AC-B^2)v^2+2(AE-BD)v+(AF-D^2) = 0,$$

deren Wurzeln die Richtung der beiden Asymptoten der Curve, die in diesem Falle immer eine Hyperbel ist, bestimmen,

$$v = \infty, \qquad v = -\tfrac{1}{2}\frac{AF-D^2}{AE-BD}.$$

Eine jener Asymptoten ist also der zweiten Axe parallel, und die Richtung der andern durch den zweiten Werth von v gegeben.

Wenn zugleich:

$$AF-D^2 = 0,$$

so ist der zweite Werth von v gleich Null. In diesem Falle sind also die beiden Asymptoten den beiden Axen parallel.

Hierher gehört insbesondere auch die Gleichung:

$$Aw^2+2Euv = 0,$$

die, weil in derselben überdiess keine mit vw und uw behafteten Glieder vorkommen, eine Hyperbel darstellt, deren Asymptoten die beiden Coordinaten-Axen selbst sind.

462. Endlich verwandelt sich die Bedingung (8), wenn wir

$$AC-B^2 = 0$$

setzen, in folgende:

$$(AE-BD)^2 < 0:$$

eine Bedingung, die niemals befriedigt werden kann, so lange die Coefficienten der gegebenen Gleichung reelle Grössen bleiben.

Um die vorstehenden beiden Bedingungen zu befriedigen, müssen D und E imaginär werden. Substituiren wir dem zufolge für diese Coefficienten $D\sqrt{-1}$ und $E\sqrt{-1}$, so zerfällt die gegebene Gleichung, die alsdann folgende wird:

$$Aw^2+2Bvw+Cv^2+F+\{Dw+Ev\}\sqrt{-1} = 0,$$

von selbst in folgende:

$$Aw^2+2Bvw+Cv^2+F = 0,$$
$$Dw+Ev = 0,$$

die beide zugleich befriedigt werden müssen. Wir erhalten also eine bestimmte Anzahl von geraden Linien, nemlich zwei, deren Coordinaten folgende sind:

$$v = \pm\sqrt{\left\{\frac{AE^2-2BDE+CD^2}{-FD^2}\right\}}, \qquad w = \pm\sqrt{\left\{\frac{AE^2-2BDE+CD^2}{-FE^2}\right\}}.$$ *)

*) Auf ganz analoge Weise stellt die allgemeine Gleichung des zweiten Grades zwischen Punct-Coordinaten:

$$y^2+2\alpha xy+\beta x^2+2\gamma y+2\delta x+\varepsilon = 0,$$

wenn wir für γ und δ imaginäre Werthe nehmen, zwei einzelne Puncte dar.

Digitized by Google

463. Wenn wir, statt in der allgemeinen Gleichung u gleich Eins zu nehmen, v gleich Eins gesetzt hätten, so hätten wir statt (4) folgende Gleichung erhalten:

$$A^2w^2+(AF-D^2)u^2+2(AE-BD)u+(AC-B^2) = 0,$$

und die Discussion dieser Gleichung ist der vorstehenden gleich, nur dass der Ausdruck $(AF-D^2)$ an die Stelle von $(AC-B^2)$, und die eine Coordinaten-Axe an die Stelle der andern tritt.

464. Es bleibt uns jetzt nur noch derjenige Fall zu discutiren übrig, den wir bisher unberücksichtigt gelassen haben, wo

$$A = 0.$$

Wenn wir A allmählig verschwinden lassen, so ist ersichtlich, dass alsdann der Mittelpunct der durch die allgemeine Gleichung dargestellten Curve, nemlich der Punct $\left(\frac{D}{A}, \frac{B}{A}\right)$ sich immer weiter vom Anfangs-Puncte der Coordinaten entfernt: wir können sagen, es liege der Mittelpunct unendlich weit, wenn $A = 0$. Die Gleichung dieses Punctes:

$$Aw+Bv+Du = 0,$$

reducirt sich alsdann auf:

$$Bv+Du = 0,$$

d. h. alle, durch diesen Punct gehende, gerade Linien, oder, mit andern Worten, alle Durchmesser der Curve, sind parallel und ihre Richtung ist gegeben durch

$$-\frac{v}{u} = \frac{D}{B}.$$

Aus der gegebenen allgemeinen Gleichung, die dem in Rede stehenden Falle entspricht:

$$2Bvw+Cv^2+2Duw+2Euv+Fu^2 = 0, \qquad (1)$$

erhalten wir

$$w = -\tfrac{1}{2}\frac{Cv^2+2Euv+Fu^2}{Bv+Du}. \qquad (2)$$

Wir erhalten also für jeden Werth von $\frac{v}{u}$ im Allgemeinen einen einzigen und bestimmten Werth für $\frac{w}{u}$. Es ist sogleich ersichtlich, dass die bezügliche Curve eine nach einer Seite hin offene und, ins Unendliche hin, sich erstreckende ist. Diese Curve heisst Parabel.

Der Werth des letzten Ausdruckes für w wird unendlich, wenn v unendlich wird; ausserdem aber auch noch, wenn der Nenner desselben verschwindet, im Allgemeinen, wenn

$$Bv+Du = 0:$$

die den Durchmessern der Curve parallelen Tangenten derselben liegen also unendlich weit.

465. Auch folgende einfache Gleichung:

$$Cv^2+2Duw = 0$$

stellt, da in derselben w^2 nicht vorkommt, eine Parabel dar. Wenn wir in dieser Gleichung $w = 0$ setzen, so kommt $v^2 = 0$; die durch dieselbe dargestellte Parabel wird also von der ersten Axe berührt und zwar im Anfangspuncte der Coordinaten. Die Richtung der Durchmesser ist, da in der vorstehenden Gleichung das mit vw behaftete Glied fehlt, durch die Gleichung

$$u = 0$$

gegeben: es sind diese Durchmesser also der zweiten Axe parallel.

Auf ganz analoge Weise ergibt sich, dass die Gleichung:

$$Fu^2+2Bvw = 0;$$

Digitized by Google

eine Parabel darstellt, welche von der zweiten Axe im Anfangspuncte berührt wird, und deren Durchmesser der ersten Axe parallel sind.

466. Es gibt aber auch besondere Fälle, bei der Voraussetzung, dass w^2 in der gegebenen Gleichung nicht vorkommt, wo diese Gleichung keine Curve darstellt. Diesen Fällen entspricht die Bedingung, dass in dem Ausdrucke für w (2) der Zähler durch den Nenner ohne Rest theilbar ist. Soll diese Bedingung erfüllt werden, so muss, wenn wir denjenigen Werth von v, den wir durch Annullirung des Nenners erhalten, nemlich $\left(-\frac{D}{B}u\right)$, in den Zähler substituiren, dieser Zähler verschwinden. Hiernach ergibt sich sogleich für den in Rede stehenden Fall, folgende Bedingungs-Gleichung:

$$CD^2-2BDE+FB^2 = 0. \qquad (3)$$

Wenn wir die Division des Nenners in den Zähler des Ausdruckes von w wirklich ausführen, so kommt:

$$w = -\tfrac{1}{2}\left(\frac{C}{B}v+\frac{2EB-CD}{B^2}u\right)+\tfrac{1}{2}\frac{CD^2-2BDE+FB^2}{B^2(Bv+Du)}u^2.$$

Indem wir den Rest gleich Null setzen, erhalten wir dieselbe Bedingungs-Gleichung als eben, und für w ergibt sich, mit Berücksichtigung dieser Bedingungs-Gleichung:

$$w = -\tfrac{1}{2}\left(\frac{C}{B}v+\frac{F}{D}u\right).$$

Die gegebene Gleichung verwandelt sich hiernach in folgende:

$$(Bv+Du)(2BDw+CDv+FBu) = 0,$$

und stellt also, wie ihre Form zeigt, das System folgender beiden Puncte dar:

$$Bv+Du = 0, \qquad (4)$$

$$2BDw+CDv+FBu = 0, \qquad (5)$$

von welchen der erstere unendlich weit liegt, und der zweite jeder beliebige sein kann. Die Coordinaten dieses zweiten Punctes sind:

$$y = \tfrac{1}{2}\frac{F}{D}, \qquad x = \tfrac{1}{2}\frac{C}{B}.$$

Für den in Rede stehenden Fall erscheint der Werth von w, der $v = -\frac{D}{B}u$ entspricht, unter der Form $\frac{0}{0}$; denn man hat:

$$w = \tfrac{1}{2}\frac{(Bv+Du)(CDv+FBu)}{BD(Bv+Du)}.$$

Jener Werth muss diese unbestimmte Form annehmen, weil die durch den einen, unendlich weit liegenden, Punct gehenden geraden Linien den beiden Axen in solchen Puncten begegnen, die unbestimmt bleiben. Lassen wir aber im Nenner und Zähler des vorstehenden Ausdrucks für w den Factor (Bv+Du), der sich auf diesen Punct bezieht, fort, wodurch wir die lineare Gleichung (5) erhalten, so finden wir:

$$\frac{w}{u} = \tfrac{1}{2}\frac{FB^2-CD^2}{B^2D}, \qquad \frac{w}{v} = -\frac{FB^2-CD^2}{BD^2},$$

für die Segmente, die auf den beiden Coordinaten-Axen von derjenigen geraden Linie abgeschnitten werden, welche durch den zweiten der beiden, durch die gegebene Gleichung (1) dargestellten, Puncte geht und die eben bezeichnete Richtung hat.

Wenn B und D zugleich Null sind, so werden die beiden letzten Ausdrücke für $\frac{w}{u}$ und $\frac{w}{v}$ unendlich. Auch der zweite Punct liegt unendlich weit. Die gege-

Digitized by Google

bene Gleichung reducirt sich in diesem Falle auf:

$$Cv^2+2Euv+Fu^2 = o,$$

und die beiden durch diese Gleichung dargestellten unendlich weit liegenden Puncte sind reell, fallen zusammen oder werden imaginär, je nachdem:

$$CF-E^2 < o, \qquad CF-E^2 = o, \qquad CF-E^2 > o.$$

467. Wenn eine Curve durch die allgemeine Gleichung des zweiten Grades:

$$Aw^2+2Bvw+Cv^2+2Duw+2Euv+Fu^2 = o,$$

dargestellt wird und wir den Anfangspunct in irgend einen Punct (y', x') verlegen, so wird dieselbe Curve durch folgende Gleichung dargestellt:

$$Aw^2+2(B-Ax')vw+(C-2Bx'+Ax'^2)v^2+2(D-Ay')uw$$
$$+2(E-Dx'-By'+Ay'x')uv+(F-2Dy'+Ay'^2)u^2 = o. \qquad (1)$$

Wir haben in dem Frühern y' und x' so bestimmt, dass in dieser Gleichung die mit w in der ersten Potenz behafteten Glieder ausfielen, und daran die allgemeine Discussion der gegebenen Gleichung (den einen Fall, dass A = o, ausgenommen) angeknüpft. Eine ganz analoge Discussion würden wir erhalten, wenn aus der umgeformten Gleichung diejenigen Glieder, die v oder u nur in der ersten Potenz enthalten, ausfielen. Dies geschieht aber, im Allgemeinen, durch keine Annahme von y' und x'. Denn setzen wir zum Beispiel:

$$B-Ax' = o,$$
$$E-Dx'-By'+Ax'y' = o, \qquad (2)$$

so reducirt sich die zweite dieser beiden Gleichungen, vermittelst der ersten, auf

$$E-Dx' = o;$$

und, da die Coordinaten-Umformung, wenn y' unendlich wird, nicht Statt finden kann, können beide Gleichungen nur dann zugleich bestehen, wenn

$$AE-BD = o.$$

Wir erhalten dieselbe Bedingungs-Gleichung, wenn wir annehmen, dass statt der ersten der beiden Gleichungen (2) die Gleichung

$$D-Ay' = o,$$

zugleich mit der zweiten der Gleichungen (2) bestehen soll.

Die geometrische Bedeutung der Bedingungs-Gleichung (3) ergibt sich aus der Betrachtung der Gleichung (4) der 455. Nummer. Es findet dieselbe nemlich dann Statt, wenn zwei durch den Anfangspunct der Coordinaten den beiden Asymptoten der Curve parallel gezogene gerade Linien mit den beiden Coordinaten-Axen vier Harmonicalen bilden, oder, wie wir später sehen werden, wenn die beiden Axen zweien zugeordneten Durchmessern der Curve parallel sind.

Wir gehen in die durch das Vorstehende angedeutete Discussion nicht ein, weil sie sich nur auf einen besondern Fall bezieht.

468. Wir können aus der umgeformten Gleichung durch gehörige Bestimmung des neuen Anfangspunctes, im Allgemeinen, auch die mit v^2 und u^2 behafteten Glieder ausfallen lassen. Wir müssen zu diesem Ende x' und y' durch folgende beiden Gleichungen bestimmen:

$$Ax'^2-2Bx'+C = o,$$
$$Ay'^2-2Dy'+F = o. \qquad (4)$$

Wir erhalten für die Möglichkeit dieser Umformung folgende Bedingungen:

$$AC-B^2 < o, \qquad AF-D^2 < o.$$

Digitized by Google

Für den Fall der Ellipse werden diese beiden Bedingungen immer erfüllt (456). Für den Fall der Hyperbel wird die erste Bedingung nur dann erfüllt, wenn die Curve Tangenten hat, die der ersten Axe parallel sind (457). Die zweite Bedingung bezieht sich auf eine ganz analoge Weise auf die Richtung der zweiten Axe. Die Gränzen für die Möglichkeit der in Rede stehenden Umformung sind dadurch bestimmt, dass die Coordinaten-Axen den Asymptoten parallel sind (461). Alsdann sind die gleichen Wurzeln der Gleichungen (4) die Werthe für die Coordinaten des Mittelpunctes der gegebenen Curve.

Dasselbe ergibt sich aus der Betrachtung der umgeformten Gleichung, welche, wenn y' und x' durch die Gleichungen (4) bestimmt werden, folgende Form annimmt:

$$Aw^2+2Bvw+2Duw+Euv = o.$$

Denn, setzen wir in dieser Gleichung nach einander u = o und v = o, so erhalten wir beidesmal für w Werthe, von denen einer ebenfalls gleich Null ist. Es wird also die Curve von den beiden neuen Coordinaten-Axen berührt und die Wurzeln der beiden Gleichungen (4) bestimmen die Coordinaten der vier Winkelpuncte eines um die Curve beschriebenen Parallelogramms, dessen Seiten den beiden Coordinaten-Axen parallel sind.

Für den Fall der Parabel, wo A = o, reduciren sich die beiden Gleichungen (4) auf den ersten Grad und wir erhalten:

$$x' = \frac{C}{2B}, \qquad y' = \frac{F}{2D};$$

und hiernach verwandelt sich die umgeformte Gleichung (1) in folgende:

$$2B^2Dvw+2BD^2uw-(CD^2-2BDE+FB^2)uv = o.$$

Indem wir alle Glieder der vorstehenden Gleichung durch uvw dividiren, erhält dieselbe folgende Form:

$$\frac{u'}{u}+\frac{v'}{v}+\frac{w'}{w} = o,$$

indem wir, der Kürze und Symmetrie halber, die Coefficienten der letzten Gleichung durch u', v' und w' bezeichnen.

469. Wenn in der umgeformten Gleichung (1) bloss das mit uv behaftete Glied ausfallen soll, so können wir den Punct (y', x') beliebig auf der durch die Gleichung:

$$Ayx-By-Dx+E = o, \qquad (5)$$

dargestellten Curve annehmen. Es stellt diese Gleichung, der wir auch folgende Form geben können:

$$\left(x-\frac{B}{A}\right)\left(y-\frac{D}{A}\right) = \frac{BD-AE}{A^2}, \qquad (6)$$

eine Hyperbel dar, deren Mittelpunct, für welchen man (229):

$$y = \frac{D}{A}, \qquad x = \frac{B}{A},$$

erhält, mit dem Mittelpuncte der gegebenen Curve zusammenfällt und deren Asymptoten den Coordinaten-Axen parallel sind.

Wenn wir den Anfangspunct in irgend einen Punct dieser Curve verlegen, so hat also die umgeformte Gleichung folgende Form:

$$A'w^2+2B'vw+C'v^2+2D'nw+F'u^2 = o,$$

und wir erhalten, wenn wir w = o setzen, zwei gleiche und entgegengesetzte Werthe für $\frac{v}{u}$. Es bilden mithin die beiden durch den neuen Anfangspunct gehenden Tangenten der

gegebenen Curve und die beiden neuen Axen ein System von vier Harmonicalen. In dem Falle also, dass die Axen sich unter rechten Winkeln schneiden, sind diejenigen beiden geraden Linien, welche die Scheitel-Winkel, die zwei von einem beliebigen Puncte der Hyperbel (5) an die gegebene Curve gelegte Tangenten mit einander bilden, halbiren, den beiden ursprünglichen Coordinaten-Axen parallel. Es folgt aus diesen geometrischen Betrachtungen, dass, wenn man um die gegebene Curve ein Parallelogramm beschreibt, dessen gegenüberliegende Seiten den beiden Coordinaten-Axen parallel sind, die in Rede stehende Hyperbel durch die vier Berührungs-Puncte auf den vier Seiten des Parallelogramms gehen muss. Wenn keine Tangenten der gegebenen Curve den beiden Coordinaten-Axen parallel sind, so wird sie von der Hyperbel (5) nicht geschnitten.

470. Die nachstehende Aufgabe:

Auf einer gegebenen geraden Linie einen Punct so zu bestimmen, dass die beiden von diesem Puncte an eine gegebene Curve zweiter Classe gelegten Tangenten mit einer zweiten gegebenen geraden Linie ein gleichschenkliches Dreieck bilden;

gestattet also, wenn nicht die beiden gegebenen geraden Linien parallel sind oder auf einander senkrecht stehen, im Allgemeinen eine doppelte Auflösung.

Wenn $E = 0$, so geht die durch (1) dargestellte Hyperbel durch den Anfangspunct der Coordinaten, was mit der 467. Nummer in Uebereinstimmung ist.

471. Die Gleichung (5) reducirt sich auf den ersten Grad, wenn $A = 0$ und also die gegebene Curve eine Parabel ist. Man erhält in diesem Falle:

$$By + Dx - E = 0. \qquad (7)$$

Die durch diese Gleichung dargestellte gerade Linie geht nothwendig durch diejenigen beiden Puncte, in welcher die gegebene Parabel von zwei den Coordinaten-Axen parallelen geraden Linien berührt wird, und ist also durch diese beiden Puncte vollkommen bestimmt. Hierin ist folgender Satz enthalten:

Wenn irgend eine gerade Linie eine gegebene Parabel in zwei Puncten schneidet und man in diesen beiden Puncten die beiden Tangenten construirt und ausserdem von irgend einem beliebigen Puncte der geraden Linie noch zwei Tangenten an die Parabel legt, so erhält man vier Tangenten, welche die Richtung von vier Harmonicalen haben.

Wenn die Coordinaten-Axen rechtwinklig sind, so geht die durch (7) dargestellte gerade Linie nach einem bekannten Satze durch den Brennpunct der Parabel (343). Um Umschreibungen zu vermeiden, knüpfen wir an diese Bemerkung die Aussage folgender Sätze, die unmittelbar aus dem vorstehenden Satze sich ergeben:

Wenn zwei Tangenten einer Parabel in irgend einem Puncte einer durch den Brennpunct derselben gehenden geraden Linie sich schneiden, so sind diejenigen beiden geraden Linien, welche die von denselben gebildeten Scheitel-Winkel halbiren, den beiden Tangenten in den Durchschnittspuncten der Parabel und der durch den Brennpunct derselben gehenden geraden Linie parallel.

Wenn man von irgend zwei Puncten, die mit dem Brennpuncte einer Parabel in gerader Linie liegen, zwei Tangenten-Paare an die Curve legt, so schneiden sich dieselben unter gleichen Winkeln.

472. Aus der umgeformten Gleichung (1) fällt, wie wir oben gesehen haben, das mit uv behaftete Glied aus, wenn wir den Anfangspunct der Coordinaten in irgend einen

Digitized by Google

beliebigen Punct der durch die Gleichung (5) dargestellten Hyperbel verlegen. Jene umgeformte Gleichung, die wir, der Kürze halber, auf folgende Weise schreiben wollen:

$$Aw^2+2B'vw+C'v^2+2D'uw+2E'uv+F'u^2 = 0,$$

können wir alsdann auch auf folgende Form bringen:

$$C'(v+\frac{B'}{C'}w)^2+F'(u+\frac{D'}{F'}w)^2 = \left(\frac{B'^2}{C'}+\frac{D'^2}{F'}-A\right)w^2. \qquad (8)$$

Der neue Anfangspunct der Coordinaten, der beliebig auf der durch (5) dargestellten Hyperbel angenommen worden ist, kann zugleich auch noch auf einer zweiten gegebenen Curve liegen. Wir erhalten eine solche Curve, wenn wir folgende Bedingung erfüllen wollen:

$$C' = F'.$$

Denn setzen wir für C' und F' ihre Werthe, so ergibt sich:

$$C-2Bx+Ax^2 = F-2Dy+Ay^2, \qquad (9)$$

wenn wir die Accente von y und x fortlassen. Wenn wir dieser Gleichung folgende Form geben:

$$\left(y-\frac{D}{A}\right)^2-\left(x-\frac{B}{A}\right)^2 = \frac{(C-F)A-(B^2-D^2)}{A^2}, \qquad (10)$$

so ist sogleich ersichtlich, dass, wenn wir y und x als veränderlich betrachten, die bezügliche Curve eine Hyperbel ist, deren Mittelpunct mit dem Mittelpuncte des gegebenen Ortes zweiter Classe zusammenfällt, und deren irgend zwei zugeordnete Durchmesser den Coordinaten-Axen parallel sind.

Wir können also durch blosse Verlegung des Anfangspunctes der allgemeinen Gleichung der Oerter zweiter Classe, indem wir w gleich der Einheit nehmen, und in (8):

$$\frac{B'}{C'} = -v', \qquad \frac{D'}{F'} = -u',$$

$$\frac{1}{C'}\left(\frac{B'^2}{C'}+\frac{D'^2}{F'}-A\right) = \frac{B'^2+D'^2-AC'}{C'^2} = M,$$

setzen, folgende Form geben:

$$(v-v')^2+(u-u')^2 = M:$$

also die Form der auf rechtwinklige Coordinaten-Axen bezogenen allgemeinen Kreis-Gleichung. Der neue Anfangspunct, der dadurch gegeben ist, dass er in einem der Durchschnitte zweier Hyperbeln (6) und (10) liegt, deren beider Mittelpunct mit dem Mittelpuncte des gegebenen Ortes zusammenfällt, und von denen die eine zwei den Coordinaten-Axen parallele gerade Linien zu Asymptoten, die andere zu zugeordneten Durchmessern hat, kann immer auf doppelte Weise bestimmt werden.

473. Um die Coordinaten des neuen Anfangspunctes zu bestimmen, müssen wir aus den Gleichungen (6) und (10) die Werthe von y und x ziehen. Setzen wir zu diesem Ende:

$$y-\frac{D}{A} = y'', \qquad x-\frac{B}{A} = x'', \qquad (11)$$

d. h. verlegen wir den Anfangspunct in den Mittelpunct der gegebenen Curve, so gehen die beiden angezogenen Gleichungen in folgende beiden über:

$$x''y'' = \frac{BD-AE}{A^2},$$

$$y''^2-x''^2 = \frac{(C-F)A-(B^2-D^2)}{A^2}.$$

Wenn wir aus der ersten dieser beiden Gleichungen nach einander den Werth von y'' und x'' nehmen und ihn in die zweite Gleichung substituiren, so kommt:

$$y''^4 - \frac{(C-F)A-(B^2-D^2)}{A^2}y''^2 - \left(\frac{BD-AE}{A^2}\right)^2 = 0,$$

$$x''^4 + \frac{(C-F)A-(B^2-D^2)}{A^2}x''^2 - \left(\frac{BD-AE}{A^2}\right)^2 = 0.$$

Da das von y'' und x'' unabhängige Glied dieser beiden Gleichungen eine negative Grösse ist, so erhalten wir für y''^2 und x''^2 nothwendig zwei reelle Werthe, von denen einer positiv, der andere negativ ist, und also für y'' und für x'' vier Werthe, von denen, in Uebereinstimmung mit dem eben schon Bemerkten, zwei reell und zwei imaginär sind. Wenn wir jene Gleichungen wirklich auflösen und, der Kürze halber:

$$(C-F)A-(B^2-D^2) = P,$$

$$\sqrt{\{4(BD-AE)^2+P^2\}} = Q,$$

setzen, so ergibt sich:

$$y''^2 = \frac{P\pm Q}{2A^2},$$

$$x''^2 = \frac{-P\pm Q}{2A^2}.$$

In diesen Ausdrücken für y''^2 und x''^2 müssen wir offenbar die obern Zeichen, so wie die untern zusammennehmen; es beziehen sich jene auf die reellen, diese auf die imaginären Durchschnitte der beiden in Rede stehenden Hyperbeln. Wenn wir die beiden letzten Gleichungen addiren, so erhalten wir:

$$y''^2+x''^2 = \pm\frac{Q}{A^2},$$

wodurch, wenn wir rechtwinklige Coordinaten voraussetzen, die Entfernung jener Durchschnitte vom Mittelpuncte der gegebenen Curve bestimmt wird.

474. Wenn wir die beiden reellen Werthe von y'' durch β und β', die beiden imaginären durch β'' und β''', und die vier entsprechenden Werthe von x'' durch α, α', α'' und α''' bezeichnen, so ist:

$$\begin{bmatrix}\beta\\ \beta'\end{bmatrix} = \frac{\pm\sqrt{(P+Q)}}{A\sqrt{2}}, \qquad \begin{bmatrix}\alpha\\ \alpha'\end{bmatrix} = \frac{\pm\sqrt{(-P+Q)}}{A\sqrt{2}};$$

$$\begin{bmatrix}\beta''\\ \beta'''\end{bmatrix} = \frac{\pm\sqrt{(P-Q)}}{A\sqrt{2}}, \qquad \begin{bmatrix}\alpha''\\ \alpha'''\end{bmatrix} = \frac{\mp\sqrt{-(P+Q)}}{A\sqrt{2}};$$

oder: (11)

$$\begin{bmatrix}\beta\\ \beta'\end{bmatrix} = \frac{\pm\sqrt{(P+Q)}}{A\sqrt{2}}, \qquad \begin{bmatrix}\alpha\\ \alpha'\end{bmatrix} = \frac{\mp\sqrt{(-P+Q)}}{A\sqrt{2}};$$

$$\begin{bmatrix}\beta''\\ \beta'''\end{bmatrix} = \frac{\pm\sqrt{(P-Q)}}{A\sqrt{2}}, \qquad \begin{bmatrix}\alpha''\\ \alpha'''\end{bmatrix} = \frac{\pm\sqrt{-(P+Q)}}{A\sqrt{2}}.$$

Zuerst ist klar, dass in beiden Gruppen von Coordinaten-Werthen, die Werthe für β, β', α und α' immer reell sind, weil $+Q$, oder die positive arithmetische Wurzel aus dem Ausdrucke $\sqrt{\{4(BD-AE)^2+P^2\}}$, nothwendig grösser ist als P.

Ob wir ferner die erste oder zweite Gruppe von Coordinaten-Werthen nehmen müssen, hängt davon ab, ob

$$BD-AE > 0,$$

oder

$$BD-AE < 0.$$

Digitized by Google

Es folgt nemlich aus der Gleichung:

$$x''y'' = \frac{BD-AE}{A^2},$$

dass in dem ersten Falle das Product der zusammengehörigen Werthe von y'' und x'' positiv sein muss, und also die reellen Werthe β und α, so wie β' und α', mit demselben Zeichen genommen werden müssen, hingegen die imaginären Werthe β'' und α'', so wie β''' und α''', mit entgegengesetztem Zeichen. Diesem entspricht die erste Gruppe. Aus derselben Gleichung folgt, dass in dem zweiten Falle das Product der zusammengehörigen Werthe von y'' und x' negativ sein muss, so dass wir β und α, β' und α' mit entgegengesetztem, β'' und α'', β''' und α''' aber mit gleichem Zeichen nehmen müssen. Diesem entspricht die zweite Gruppe.

Wenn

$$BD-AE = 0,$$

so ist $P = Q$ und mithin $\alpha = \alpha' = 0$ und $\beta'' = \beta''' = 0$. Alsdann liegen die beiden reellen Puncte (β, α) und (β', α') auf der neuen zweiten Axe und die beiden imaginären Puncte (β'', α'') und $\beta''', \alpha''')$ auf der neuen ersten Axe.

475. Diejenige gerade Linie, welche die beiden reellen Durchschnittspuncte (β, α) und (β', α') verbindet, und diejenige, welche die beiden imaginären Durchschnittspuncte (β'', α'') und (β''', α''') enthält, gehen beide durch den Mittelpunct der gegebenen Curve zweiter Classe und bilden mit der ersten Coordinaten-Axe Winkel, deren trigonometrische Tangenten gleich sind:

$$\frac{\beta}{\alpha} = \pm\sqrt{\left(-\frac{P+Q}{P-Q}\right)},$$

$$\frac{\beta''}{\alpha''} = \mp\sqrt{\left(-\frac{P-Q}{P+Q}\right)};$$

und da das Product dieser beiden trigonometrischen Tangenten gleich ist: (-1), so sehen wir, dass jene beiden geraden Linien auf einander senkrecht stehen.

Wir kommen zu demselben Resultate, wenn wir berücksichtigen, dass in dem Falle rechtwinkliger Coordinaten die beiden Hyperbeln (6) und (10) gleichseitige sind und dass die geraden Linien, welche die Durchschnittspuncte zweier gleichseitigen Hyperbeln, paarweise genommen, verbinden, sich unter rechten Winkeln schneiden (295). Diese letzte Bemerkung gilt auch dann, wenn, wie in dem vorliegenden Falle, zwei jener Durchschnitte imaginär sind.

476. Wir haben in dem Vorstehenden nachgewiesen, dass, wenn man irgend zwei rechtwinklige Coordinaten-Axen beliebig annimmt, sich immer solche vier Puncte, von denen zwei reell sind, bestimmen lassen, welche die Eigenschaft besitzen, dass, wenn man in einen beliebigen dieser (reellen) Puncte den Anfangspunct der Coordinaten verlegt, die allgemeine Gleichung der Curven zweiter Classe die Form der Kreis-Gleichung erhält. Es bietet sich uns hier die natürliche Frage dar, ob, wenn wir die Richtung der beiden rechtwinkligen Coordinaten-Axen beliebig ändern, die in Rede stehenden vier Puncte immer dieselben bleiben oder auf irgend einem geometrischen Orte fortrücken. Dass der erste dieser beiden Fälle der wirkliche ist, wird in dem folgenden Paragraphen unmittelbar sich ergeben. Um dies indess schon hier zu zeigen, bemerken wir, dass, wenn diess Statt finden soll, das mit uv behaftete Glied aus der umgeformten Gleichung immer ausfallen muss, wie wir auch das neue Coordinaten-System um einen der in dem

Digitized by Google

Obigen bestimmten Puncte drehen mögen. Dies geschieht aber immer und nur dann, wenn die beiden von diesem Puncte an die Curve gelegten (imaginären) Tangenten mit je zwei beliebigen in demselben Puncte sich rechtwinklig schneidenden geraden Linien vier Harmonicalen bilden (469). Wir müssen also untersuchen, in welchen Fällen diese Bedingung erfüllt wird.

Zwei vom Anfangspuncte der Coordinaten aus an eine Curve zweiter Classe gelegte Tangenten können wir immer durch folgende beiden Gleichungen ausdrücken:

$$y = tang\alpha . x, \qquad y = tang\alpha' . x,$$

indem wir die Winkel, welche dieselben mit der ersten Axe bilden, α und α' nennen. (Wenn diese Tangenten, wie in demjenigen Falle, welchen wir vor Augen haben, imaginär sind, so sind es auch α und α'. Diese Winkel, so wie ihre trigonometrischen Tangenten, sind indess immer noch durch bestimmte algebraische Ausdrücke gegeben). Wenn die beiden Axen und die beiden Tangenten vier Harmonicalen bilden sollen, so erhalten wir, wie bekannt, folgende Bedingungs-Gleichung:

$$tang\alpha + tang\alpha' = 0.$$

Lassen wir die beiden Coordinaten-Axen um irgend einen Winkel, den wir ω nennen wollen, sich drehen, und sollen jene beiden Tangenten auch noch mit den neuen Coordinaten-Axen vier Harmonicalen bilden, so ergibt sich, ähnlich wie eben, folgende Bedingungs-Gleichung:

$$tang(\alpha-\omega) + tang(\alpha'-\omega),$$

oder, wenn wir entwickeln:

$$(tang\alpha + tang\alpha')(1-tang^2\omega) + 2(tang\alpha tang\alpha' - 1)tang\omega = 0:$$

eine Gleichung, die nach der ursprünglichen Bedingungs-Gleichung sich auf folgende von ω unabhängige Gleichung reducirt:

$$tang\alpha tang\alpha' = 1,$$

und also, in Verbindung mit jener Gleichung, zeigt, dass $tang\alpha$ und $tang\alpha'$ die Wurzeln folgender Gleichung sind:

$$z^2 + 1 = 0.$$

Wenn aber die allgemeine Gleichung:

$$Aw^2 + 2Bvw + Cv^2 + 2Duw + 2Euv + Fu^2 = 0,$$

eine Curve zweiter Classe darstellen soll, welche von solchen zwei, durch den Anfangspunct gehenden geraden Linien berührt wird, die mit der ersten Axe Winkel bilden, deren trigonometrische Tangenten die Wurzeln der Gleichung $z^2+1 = 0$ sind, so muss diese Gleichung mit derjenigen, welche wir erhalten, wenn wir in den allgemeinen Gleichung $w = 0$ setzen, durch u^2 dividiren, und $\left(-\frac{v}{u}\right)$ als unbekannte Grösse betrachten, nemlich mit folgender Gleichung:

$$C\left(\frac{v}{u}\right)^2 - 2E\left(-\frac{v}{u}\right) + F = 0,$$

übereinstimmen. Dies gibt uns neben der Bedingungs-Gleichung: $E = 0$, auch noch folgende: $C = F$.

Wenn wir also den Anfangspunct der Coordinaten in einen der beiden Puncte $(\beta\ \alpha)$, und $(\beta,\ \alpha')$ (wir abstrahiren hier von den beiden andern Puncten, die imaginär sind,) verlegen, so erhält die allgemeine Gleichung der Curven zweiter Classe, welche Richtung wir auch den Coordinaten-Axen geben mögen, sobald wir dieselben nur auf einander senkrecht nehmen, jedesmal die Form der Kreis-Gleichung. Diese Puncte, die also

Digitized by Google

von der Annahme des Coordinaten-Systems unabhängig sind, und sich einzig durch die Natur der Curve bestimmen, heissen Brennpuncte.

Wir können von zwei reellen und zwei imaginären Brennpuncten sprechen.

477. Wir erhalten die Coordinaten der beiden (reellen) Brennpuncte der durch die allgemeine Gleichung:

$$Aw^2+2Bvw+Cv^2+2Dow+2Eov+Fu^2 = o,$$

dargestellten Oerter zweiter Classe, wenn wir die Werthe von α und α', β und β' (12) in die Gleichung (11) für x'' und y'' substituiren. Auf diese Weise ergibt sich, wenn wir zugleich auch für P und Q ihre Werthe schreiben und zusammenziehen:

$$y = \frac{D\sqrt{2}\pm\sqrt{((C-F)A-(B^2-D^2)+\sqrt{[4(DB-AE)^2+((C-F)A-(B^2-D^2))^2]})}}{A\sqrt{2}},$$

$$x = \frac{B\sqrt{2}\pm\sqrt{-((C-F)A-(B^2-D^2))+\sqrt{[4(DB-AE)^2+((C-F)A-(B^2-D^2))^2]})}}{A\sqrt{2}}.$$

Wir müssen in den vorstehenden Ausdrücken die obern und untern Zeichen, oder jedes obere Zeichen mit einem untern zusammennehmen, je nachdem der Ausdruck (BD—AE) positiv oder negativ ist.

Wenn wir annehmen, dass die allgemeine Gleichung auf den Mittelpunct der Curve als Anfangspunct der Coordinaten bezogen sei, und dem entsprechend B und D gleich Null setzen, so gehen die obigen Werthe für y und x in folgende über:

$$y = \frac{\pm\sqrt{(C-F+\sqrt{[(C-F)^2+4E^2]})}}{\sqrt{2}A},$$

$$x = \frac{\pm\sqrt{(F-C+\sqrt{[(C-F)^2+4E^2]})}}{\sqrt{2}A}.$$

Die Gleichung des Kreises hat für den Fall, dass der Mittelpunct desselben zum Anfangspuncte der Coordinaten genommen wird, folgende Form (442):

$$v^2+u^2 = r^2;$$

und mithin müssen wir zur Bestimmung der Brennpuncte in den letzten Ausdrücken E = o und C = F setzen. Wir sehen alsdann sogleich, dass alle vier Brennpuncte in den Mittelpunct des Kreises zusammenfallen und es eigentlich keine imaginären Brennponcte gibt.

Wenn endlich die Gleichung:

$$Aw^2+Cv^2+2Eov+Fu^2 = o,$$

ein System von zwei Puncten darstellen soll, die alsdann folgende sind (458):

$$\left[\sqrt{\left(-\frac{F}{A}\right)}, \sqrt{\left(-\frac{C}{A}\right)}\right], \qquad \left[-\sqrt{\left(-\frac{F}{A}\right)}, -\sqrt{\left(-\frac{C}{A}\right)}\right],$$

so erhalten wir die Bedingungs-Gleichung:

$$E^2-CF = o,$$

und hiernach verwandeln sich die Coordinaten-Werthe der beiden reellen Brennpuncte in folgende:

$$y = \frac{\pm\sqrt{[C-F\pm(C+F)]}}{\sqrt{2}A},$$

$$x = \frac{\pm\sqrt{[F-C\pm(C+F)]}}{\sqrt{2}A}.$$

In dem vorliegenden Falle, wo wir den Werth von Q durch Wurzel-Ausziehung auf rationale Weise erhalten, müssen wir vor diesem Ausdrucke, nemlich vor (C+F), das

Digitized by Google

doppelte Zeichen einführen, und zwar müssen wir in jedem Falle das Zeichen so wählen, dass $\pm(C+F)$ positiv ist. Wenn in dem vorliegenden Falle die beiden durch die gegebene Gleichung dargestellten Puncte reell sind, so sind (wir nehmen A positiv) C und F beide negativ, und wir erhalten:

$$y = \frac{\pm\sqrt{[C-F-(C+F)]}}{\sqrt{2A}} = \pm\sqrt{\left(-\frac{F}{A}\right)},$$

$$x = \frac{\pm\sqrt{[F-C-(C+E)]}}{\sqrt{2A}} = \pm\sqrt{\left(-\frac{C}{A}\right)}.$$

Die Rolle der beiden Brennpuncte spielen alsdann die beiden gegebenen Puncte selbst.

Aber auch wenn die durch die gegebene Gleichung dargestellten Puncte imaginär sind, erhalten wir zwei reelle Brennpuncte. In diesem Falle müssen wir, da C und F alsdann beide positiv sind, den Ausdruck (C+F) mit positivem Zeichen nehmen und erhalten:

$$y = \pm\sqrt{\left(\frac{C}{A}\right)},$$

$$x = \pm\sqrt{\left(\frac{F}{A}\right)}.$$

Die beiden imaginären Brennpuncte sind, wie man sogleich sieht, die gegebenen Puncte selbst.

478. Wir wollen die Difinition der Brennpuncte einer Curve zweiter Classe, die wir in dem Vorstehenden gegeben haben, von der geometrischen Seite noch näher ins Auge fassen. Diese Puncte sind solche, welche die Eigenschaft haben, dass die, durch jeden derselben gehenden, beiden (imaginären) Tangenten der Curve und irgend zwei in demselben sich rechtwinklig schneidende gerade Linien vier Harmonicalen bilden.

Als mit dieser Difinition gleichbedeutend können wir folgende nehmen:

Die Brennpuncte einer Curve zweiter Classe sind solche Puncte, welche die Eigenschaft haben, dass jede durch dieselben gehende imaginäre gerade Linie eine (imaginäre) Tangente der Curve ist.

Diese Definition scheint mir die allgemeinste und natürlichste zu sein. *)

---

*) Jede durch den Brennpunct gehende Tangente bildet mit der ersten Axe einen Winkel, dessen trigonometrische Tangente $\sqrt{-1}$ ist und dies für jede beliebige Richtung dieser Axe. Um das Paradoxe dieser Behauptung von der analytischen Seite fortzuräumen (von geometrischer Bedeutung kann gar keine Rede sein) oder wenigstens doch zu zeigen, dass hierin kein Widerspruch liegt, füge ich die folgende Bemerkung hinzu.

Man hat allgemein, indem man durch φ und ψ irgend zwei Bogen bezeichnet:

$$tang(\varphi+\psi) = \frac{tang\varphi+tang\psi}{1-tang\varphi\, tang\psi}.$$

Setzen wir nun $tang\varphi = \sqrt{-1}$, so kommt:

$$tang(\varphi+\psi) = \frac{\sqrt{-1}+tang\psi}{1-tang\psi\sqrt{-1}} = \sqrt{-1}.$$

Um welche reelle oder imaginäre Grösse ψ man also den Bogen φ, der zur Tangente $\sqrt{-1}$ gehört, auch wachsen lassen mag, die trigonometrische Tangente des neuen Bogens bleibt immer gleich $\sqrt{-1}$.

Digitized by Google

Wir haben in der 469. Nummer gesehen, dass der geometrische Ort für diejenigen Puncte, in welchen solche zwei Tangenten der Curve sich schneiden, welche mit den in denselben Punct verlegten Coordinaten-Axen vier Harmonicalen bilden, eine gleichseitige Hyperbel ist, deren Asymptoten den Coordinaten-Axen parallel sind, deren Mittelpunct der Mittelpunct der gegebenen Curve ist, und welche diese Curve in denjenigen vier Puncten schneidet, in welchen dieselbe von den, den beiden Coordinaten-Axen parallelen, Tangenten berührt wird. Wir erhalten eine solche gleichseitige Hyperbel für jede beliebige Annahme rechtwinkliger Coordinaten-Axen. Alle diese Curven schneiden sich also in denselben vier Puncten, von denen immer zwei reell und zwei imaginär sind, nemlich in den Brennpuncten der gegebenen Curve.

479. Es liegen die Brennpuncte zugleich aber auch auf der, bei einer durchaus beliebigen Annahme der Coordinaten-Axen, durch die Gleichung (10) dargestellten Hyperbel, welche der geometrische Ort derjenigen Puncte ist, welche die Eigenschaft haben, dass, wenn man in einen beliebigen derselben den Anfangspunct verlegt, ohne die Richtung der beliebig angenommenen Coordinaten-Axen zu ändern, in der umgeformten Gleichung:

Wir wollen in dem Nächstfolgenden einen analytischen Ausdruck für denjenigen Bogen suchen, welcher zur Tangente $\sqrt{-1}$ gehört. Wenn wir irgend einen Bogen durch φ und die zugehörige Tangente durch u bezeichnen, so ist bekanntlich:

$$\varphi = \frac{u}{1} - \frac{u^3}{3} + \frac{u^5}{5} - \frac{u^7}{7} + \text{etc.}$$

und wir erhalten also für $u = \sqrt{-1}$:

$$\varphi = \left\{\frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \text{etc.}\right\}\sqrt{-1}.$$

Die Reihe im zweiten Theile dieser Gleichung ist divergent; wir können daher ihre arithmetische Summe nicht unmittelbar bestimmen. Statt hier in detaillirte Entwicklungen einzugehen, um zu zeigen, dass diese Summe unendlich wird, wollen wir die Sache lieber auf eine andere Weise angreifen.

Man hat nemlich allgemein:

$$\varphi = -\log(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi)\sqrt{-1}.$$

Wenn φ wiederum den Bogen bedeutet, dessen trigonometrische Tangente $\sqrt{-1}$ ist, so ergibt sich:

$$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{(1+\tang^2\varphi)}} = \infty,$$

$$\sin\varphi = \sqrt{1-\cos^2\varphi} = \infty\sqrt{-1},$$

und mithin erscheint φ unter der unbestimmten Form:

$$-\log(\infty - \infty)\sqrt{-1}.$$

Es ist leicht, den wahren Werth von φ zu erhalten. Denn, entwickeln wir nach der Binomial-Formel den Werth von $\sin\varphi$, so kommt:

$$\sin\varphi = \sqrt{-1}\cos\varphi\sqrt{\left\{1 - \frac{1}{\cos^2\varphi}\right\}},$$

$$= \sqrt{-1}\cos\varphi\left\{1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\cos^2\varphi} - \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{\cos^4\varphi} - \text{etc.}\right\};$$

und hiernach:

$$\cos\varphi + \sin\varphi\sqrt{-1} = \left\{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\cos\varphi} + \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{\cos^3\varphi} + \text{etc.}\right\} = 0,$$

und endlich:

$$-\log(\cos\varphi + \sin\varphi\sqrt{-1})\sqrt{-1} = 0\sqrt{-1}.$$

$$Aw^2+2B'vw+C'v^2+2D'uw+2E'uv+F'u^2 = 0,$$

$C' = F'$ wird. Die geometrische Deutung dieser Bedingungs-Gleichung ergibt sich leicht; denn, setzen wir in der umgeformten Gleichung nach einander u und v gleich Null, so kommt:

$$\left(\frac{w}{v}\right)^2+2\frac{B'}{A}\cdot\frac{w}{v}+\frac{C'}{A} = 0,$$
$$\left(\frac{w}{u}\right)^2+2\frac{D'}{A}\cdot\frac{w}{v}+\frac{F'}{A} = 0.$$

Wenn $C' = F'$, so ist das Product der beiden Werthe von $\frac{w}{v}$, welche die erste dieser beiden Gleichungen gibt, dem Producte der beiden Werthe von $\frac{w}{u}$, welche die zweite Gleichung gibt, gleich. Wenn man also die beiden, jeder der beiden Coordinaten-Axen parallelen, Tangenten zieht; so ist das Product der Segmente, die von diesen Tangenten auf der ersten Axe bestimmt werden, dem Producte der analogen Segmente auf der zweiten Axe gleich. Hieraus ist zugleich ersichtlich, dass die Hyperbel (t0) auch durch die vier Winkelpuncte desjenigen Parallelogramms geht, das der gegebenen Curve umschrieben ist und dessen Seiten den Coordinaten-Axen parallel sind. Denn für diese Winkelpuncte verschwinden die in Rede stehenden Producte beide zugleich.

Die Bestimmung der Hyperbel (t0) ist nur in so fern von der gegebenen Curve abhängig, als durch diese Curve das umschriebene Parallelogramm gegeben ist: nehmen wir dieses Parallelogramm beliebig an, so ist jene Hyperbel vollkommen bestimmt. Wir erkennen hierin unter andern folgenden Satz:

Die Brennpuncte aller Curven zweiter Classe, welche demselben Parallelogramm eingeschrieben sind, liegen auf einer Hyperbel, die eine gleichseitige wird, wenn jenes Parallelogramm ein Rechteck ist.

Für jede veränderte Richtung der beiden rechtwinkligen Coordinaten-Axen erhalten wir ein anderes umschriebenes Parallelogramm und eine andere Hyperbel. Alle solche Hyperbeln gehen durch die Brennpuncte der gegebenen Curve zweiter Classe. Hiernach erhalten wir folgenden Satz:

Das Product der Abstände eines Brennpunctes einer Curve zweiter Classe von zwei parallelen Tangenten ist constant, welche Richtung wir diesen parallelen Tangenten auch geben mögen.

An diesen Satz hätten wir ebenfalls die Definition der Brennpuncte anknüpfen und also solche Puncte Brennpuncte nennen können, welche die eben ausgesprochene Eigenschaft haben. Doch wenn diese geometrische Definition vor der obigen auch den Vorzug haben mag, dass sie von imaginären Grössen unabhängig ist, so ist sie, von der andern Seite, weniger allgemein, denn sie verliert für den Fall der Parabel ihre Anwendbarkeit.

Aus dem letzten Satze und einer allbekannten Eigenschaft des Kreises geht endlich noch folgender Satz hervor:

Die Fusspuncte der von einem der Brennpuncte auf alle Tangenten einer Curve zweiter Classe gefällten Perpendikel, oder überhaupt, der nach denselben unter irgend einem gegebenen Winkel gezogenen geraden Linien, liegen auf dem Umfange ein und desselben Kreises.

Dieser bekannte Satz (342) schliesst sich also unmittelbar an die Definition der Brennpuncte an.

Digitized by Google

480. Wir haben bis jetzt denjenigen Fall unberücksichtigt gelassen, wo die gegebene Curve eine Parabel ist. Nehmen wir für die allgemeine Gleichung derselben:

$$2Bvw+Cv^2+2Duw+2Euv+Fu^2 = 0,$$

so geht die umgeformte Gleichung (1) in folgende über:

$$2Buw+(C-2Bx')v^2+2Duw+2(E-Dx'-By')uv+(F-2Dy')u^2 = 0.$$

Wenn wir die Coordinaten des neuen Anfangspunctes durch folgende beide lineare Gleichungen bestimmen:

$$\begin{aligned} By'+Dx'-E &= 0, \\ 2(Dy'-Bx')+C-F &= 0, \end{aligned} \qquad (13)$$

so erhält die umgeformte Gleichung folgende Form:

$$2Bvw+2Duw+C'(v^2+u^2) = 0, \qquad (14)$$

und hiernach folgende:

$$\left(v+\frac{B}{C'}w\right)^2+\left(u+\frac{D}{C'}w\right)^2 = \frac{B^2+D^2}{C'^2}w^2.$$

Aus den beiden Gleichungen (13) erhalten wir:

$$y' = \frac{2BE-D(C-F)}{2(B^2+D^2)},$$

$$x' = \frac{2DE+B(C-F)}{2(B^2+D^2)}.$$

Diese Werthe von y' und x' werden nur dann unendlich, wenn

$$B^2+D^2 = 0,$$

und diese Gleichung wird nur dann befriedigt, wenn zugleich

$$B = 0, \qquad D = 0.$$

In diesem Falle geht die gegebene Gleichung in folgende über:

$$Cv^2+2Euv+Fu^2 = 0,$$

und stellt also ein System zweier unendlich weit entfernt liegender Puncte dar. Wenn wir von diesem speciellen Falle abstrahiren, so ist die in Rede stehende Coordinaten-Umformung immer, aber nur auf eine einzige Weise, möglich; denn für den Coordinaten des neuen Anfangspunctes erhalten wir in allen obigen Fällen reelle und endliche Werthe.

Den neuen Anfangspunct, der immer derselbe Punct bleibt, wie wir auch die Richtung der beiden rechtwinkligen Coordinaten-Axen bestimmen mögen (476), nennen wir den Brennpunct der Parabel. Die Parabel hat nur einen Brennpunct.

Wir haben:

$$C' = C-2Bx' = \frac{CD^2-2BDE+FB^2}{B^2+D^2},$$

und hiernach verwandelt sich die Gleichung (13) in folgende:

$$2B(B^2+D^2)vw+2D(B^2+D^2)uw+(CD^2-2BDE+FB^2)(u^2+v^2) = 0.$$

481. Wenn wir y' und x' als veränderliche Grössen betrachten und demnach die Accente fortlassen, so stellt die erste der beiden Gleichungen (13):

$$By+Dx-E = 0, \qquad (15)$$

wie wir schon in der 471. Nummer bemerkt haben, diejenige gerade Linie dar, welche die Berührungspuncte auf den beiden den Coordinaten-Axen parallelen Tangenten verbindet. Wenn wir die Richtung der Axen auf alle mögliche Weise ändern, so erhalten wir unendlich viele solcher gerader Linien, die alle durch ein und denselben Punct gehen.

Digitized by Google

Hiernach können wir die allgemeine Definition der Brennpuncte (478) für den Fall der Parabel auf folgende Weise umschreiben:

Diejenige gerade Linie, welche die Berührungspuncte auf irgend zweien auf einander senkrechten Tangenten einer gegebenen Parabel verbindet, geht durch einen festen Punct: dieser Punct heisst der Brennpunct der Parabel.

482. Der Brennpunct liegt ferner auf der durch folgende Gleichung:

$$2(Dy-Bx)+C-F = 0, \qquad (16)$$

dargestellten geraden Linie. Diese Gleichung wird befriedigt, wenn wir zugleich

$$y = \frac{F}{2D}, \qquad x = \frac{C}{2B},$$

setzen. Hieraus folgt, wie man leicht sieht (468), dass die bezügliche gerade Linie durch den Durchschnitt der beiden, der Coordinaten-Axen parallelen, Tangenten geht. Zugleich ist ersichtlich, dass diese gerade Linie auf der geraden Linie (15) senkrecht steht. Also:

Wenn man von dem Durchschnittspuncte zweier auf einander senkrechter Tangenten einer gegebenen Parabel ein Perpendikel auf diejenige gerade Linie, welche die beiden Berührungspuncte verbindet, fällt, so ist der Fusspunct dieses Perpendikels der Brennpunct der Parabel.

Auch an diesen Satz könnten wir die Definition des Brennpunctes der Parabel anknüpfen.

483. Wenn, bei der Voraussetzung rechtwinkliger Coordinaten-Axen, in der umgeformten Gleichung, die wir wiederum, der Kürze halber, auf folgende Weise schreiben wollen:

$$Aw^2+2B'vw+C'v^2+2D'uw+2E'uv+E'u^2 = 0,$$

die Coefficienten von v^2 und u^2 gleich, aber von entgegengesetztem Zeichen sind, so hat diese Gleichung, wenn wir $w = 1$ setzen und v und u als die eigentlichen veränderlichen Grössen betrachten, die Form der gewöhnlichen Gleichung der gleichseitigen Hyperbel. Die Gleichung:

$$C' = -F,$$

gibt aber, wenn wir substituiren, folgende Bedingungs-Gleichung zwischen den Coordinaten des neuen Anfangspunctes:

$$Ay^2-2Dy+F = -(Ax^2-2Bx+C), \qquad (17)$$

wenn y und x diese Coordinaten bedeuten. Dieser Gleichung können wir folgende Form geben:

$$\left(y-\frac{D}{A}\right)^2+\left(x-\frac{B}{A}\right)^2 = \frac{B^2+D^2-A(C+F)}{A^2}. \qquad (18)$$

Wir können also, im Allgemeinen, auf unendlich viele Arten durch blosse Verlegung des Anfangspunctes der allgemeinen Gleichung der Oerter zweiter Classe die Form der Gleichung der gleichseitigen Hyperbel geben. Der geometrische Ort für den neuen Anfangspunct der Coordinaten ist ein Kreis, dessen Mittelpunct der Mittelpunct des gegebenen Ortes zweiter Classe ist.

Um den in Rede stehenden Kreis zu construiren, bemerken wir, dass die Gleichung (17) befriedigt wird, wenn wir y und x durch folgende beide Gleichungen:

$$Ay^2-Dy+F = 0,$$
$$Ax^2-Bx+C = 0,$$

bestimmen. Es geht dieser Kreis also durch die vier Winkelpuncte eines um die gegebene Curve beschriebenen Rechtecks, dessen gegenüberliegende Seiten den Coordinaten-Axen parallel sind. Der Kreis ist hierdurch vollkommen bestimmt.

Wenn C' gleich (—F') ist, und wir in der umgeformten Gleichung w gleich Null setzen, so ergibt sich:

$$\left(\frac{u}{v}\right)^2+\left(\frac{E'}{A'}\right)\frac{u}{v}-1 = 0.$$

Hieraus folgt, dass die beiden durch den neuen Anfangspunct gehenden Tangenten auf einander senkrecht stehen. Wenn, umgekehrt, diese Tangenten auf einander senkrecht stehen, so ist in derjenigen Gleichung, die der letzten Gleichung entspricht, das letzte Glied immer gleich (—1) und also sind in der allgemeinen Gleichung die Coefficienten von u^2 und v^2 gleich, aber von entgegengesetztem Zeichen. Wenn wir also die neuen Coordinaten-Axen um den Anfangspunct sich drehen lassen, so behält die allgemeine Gleichung immer die besagte Form. Hieraus folgt zugleich, dass, welch ein rechtwinkliges Coordinaten-System wir ursprünglich auch annehmen mögen, der durch (18) dargestellte Kreis immer derselbe bleibt, und dass mithin die Winkelpuncte aller der gegebenen Curve zweiter Classe umschriebenen Rechtecke auf dem Umfange ein und desselben Kreises liegen. Demselben Satze werden wir später nochmals begegnen (510).

Der durch die Gleichung (18) dargestellte Kreis wird imaginär und also die in Rede stehende Coordinaten-Verwandlung unmöglich, wenn

$$B^2+D^2 < A(C+F);$$

derselbe Kreis reducirt sich auf einen Punct und die Coordinaten-Verwandlung ist nur auf eine einzige Weise möglich, wenn

$$B^2+D^2 = A(C+F).$$

Dieser letzte Fall bezieht sich auf die gleichseitige Hyperbel, deren Asymptoten sich unter rechten Winkeln schneiden. Der Mittelpunct derselben liegt nothwendig auf dem Kreise (18) und dieser Kreis muss daher auf einen Punct sich reduciren. In der Gleichung der gleichseitigen Hyperbel sind die Coefficienten von v^2 und u^2 nur dann gleich und von entgegengesetztem Zeichen, wenn die rechtwinkligen Coordinaten-Axen zwei Durchmesser derselben sind (343).

Für den Fall der Parabel, wo A gleich Null ist, reducirt sich die Gleichung (17) auf folgende:

$$Dx+By = C+F, \qquad (19)$$

und stellt mithin eine gerade Linie dar.

Die Winkelpuncte aller rechten Winkel, deren Schenkel eine gegebene Parabel berühren, liegen auf derselben geraden Linie.

Wenn die Coordinaten-Axen rechtwinklig sind und in irgend einem Puncte der geraden Linie (19) sich schneiden, so sind in der Gleichung der Parabel die Coefficienten von v^2 und u^2 gleich und von entgegengesetztem Zeichen.

484. Wenn wir in der umgeformten Gleichung:

$$Aw^2+2B'vw+Cv^2+2D'uw+2E'uv+F'u^2 = 0,$$

nochmals w gleich Eins setzen, so ist dieselbe in Beziehung auf die beiden übrigen veränderlichen Grössen v und u, eben so beschaffen, als die gewöhnliche Gleichung der Parabel in Beziehung auf x und y, wenn nachstehende Bedingungs-Gleichung Statt findet

$$E'^2-CF' = 0. \qquad (20)$$

Es ist aber:

$$C' = Ax'^2-2Bx'+C,$$
$$F' = Ay'^2-2Dy'+F,$$
$$E' = Ax'y'-By'-Dx'+E.$$

Substituiren wir diese Werthe für C', F' und E' in die obige Bedingungs-Gleichung, so kommt nach einer leichten Reduction, wenn wir zugleich die Accente von y' und x' fortlassen:

$$(B^2-AC)y^2+2(AE-BD)xy+(D^2-AF)x^2+2(CD-BE)y$$
$$+2(BF-DE)x+(E^2-CF) = 0. \qquad (21)$$

Wenn wir in der hiernach umgeformten Gleichung w = 0 setzen, so erhalten wir für die beiden durch den Anfangspunct der Coordinaten gehenden Tangenten:

$$C\left(\frac{v}{u}\right)^2+E'\left(\frac{v}{u}\right)+F' = 0,$$

und diese Gleichung hat gleiche Wurzeln, wenn die Bedingungs-Gleichung (21) befriedigt wird. Jene beiden Tangenten fallen in diesem Falle zusammen, was, wenn die allgemeine Gleichung nicht ein System von zwei Puncten darstellt, offenbar nur dann geschehen kann, wenn der neue Anfangspunct auf dem Umfange der gegebenen Curve zweiter Classe angenommen wird. Wenn wir also y und x als veränderliche Grössen betrachten, so stellt die Gleichung (21) dieselbe Curve durch gewöhnliche Coordinaten dar.

485. Wir können der allgemeinen Gleichung der Curven zweiter Classe:

$$Aw^2+Bvw+Cv^2+2Duw+2Euv+Fu^2 = 0,$$

eine symmetrische Form geben, wenn neben der Bedingungs-Gleichung:

$$E^2-CF = 0,$$

auch noch die beiden Bedingungs Gleichungen:

$$B^2-AC = 0, \qquad D^2-AF = 0,$$

bestehen. Wir erhalten alsdann:

$$C = \frac{B^2}{A}, \qquad F = \frac{D^2}{A}, \qquad E = \pm\frac{BD}{A},$$

und hiernach verwandelt sich die gegebene Gleichung, wenn wir zugleich mit A multipliciren, in folgende:

$$A^2w^2+2ABvw+B^2v^2+2ADuw\pm2BDuv+D^2u^2 = 0.$$

Wenn wir in dieser Gleichung das obere Zeichen nehmen, so können wir ihr folgende Form geben:

$$(Aw+Bv+Du)^2 = 0,$$

sie stellt also in diesem Falle zwei zusammenfallende Puncte dar. Es ist dies in Uebereinstimmung mit der 459. Nummer, weil man alsdann

$$AE-BD = 0$$

erhält. Abstrahiren wir von diesem Falle und nehmen das untere Zeichen, so stellt die allgemeine Gleichung eine Hyperbel dar, die durch den Anfangspunct der Coordinaten geht und deren Asymptoten den Coordinaten-Axen parallel sind. Diese Gleichung nimmt alsdann folgende Form an:

$$(Aw+Bv+Du)^2 = 4BDuv.$$

Wenn wir die Quadrat-Wurzel aus den beiden Theilen dieser Gleichung ziehen, so kommt:

$$Aw+Bv+Du = 2B^{\frac{1}{2}}D^{\frac{1}{2}}u^{\frac{1}{2}}v^{\frac{1}{2}},$$

Digitized by Google

und wenn wir anders ordnen:

$$Bv+2B'D'u'v'+Du = -Aw.$$

Ziehen wir nochmals die Quadrat-Wurzel aus, so ergibt sich:

$$B'v'+D'u' = (-A)'w'.$$

Die Constanten dieser Gleichung sind, wenn wir A gleich Eins setzen, die Mittelpunct-Coordinaten der gegebenen Curve.

§ 2.

Veränderung der Richtung der Coordinaten-Axen. Bestimmung der Grösse und Richtung zugeordneter Durchmesser.

486. Es sei wiederum:

$$Aw^2+2Bvw+Cv^2+2Duw+2Euv+Fu^2 = 0, \qquad (1)$$

die allgemeine Gleichung der geometrischen Oerter zweiter Classe. Den Winkel, den die beiden Coordinaten-Axen mit einander bilden, wollen wir ϑ nennen. Indem wir den Anfangspunct beibehalten, wollen wir die erste Axe um irgend einen Winkel φ und die zweite Axe um irgend einen Winkel ψ' sich drehen lassen. Alsdann müssen wir, um dieselbe Curve, welche bei einer beliebigen Constanten-Bestimmung durch die Gleichung (1) dargestellt wird, auf die neuen Coordinaten-Axen zu beziehen, in der Gleichung (1), nachdem wir zuvor durch w^2 dividirt haben:

$$\frac{u\sin\varphi-v\sin\varphi'}{w\sin\xi} \text{ und } \frac{u\sin\psi-v\sin\psi'}{w\sin\xi},$$

an die Stelle von $\frac{v}{w}$ und $\frac{u}{w}$ schreiben; wenn wir die Bezeichnung der 452. Num. beibehalten und demnach den neuen Coordinaten-Winkel ξ, den Winkel, welchen die neue zweite Axe mit der ersten ursprünglichen bildet, φ', und endlich den Winkel, den die neue erste Axe mit der zweiten ursprünglichen bildet, ψ nennen. Durch diese Substitution verwandelt sich die gegebene Gleichung in folgende:

$$\begin{aligned} &Aw^2-2.\frac{B\sin\varphi+D\sin\psi}{\sin\xi}.uw+2.\frac{B\sin\varphi'+D\sin\psi'}{\sin\xi}.vw \\ &-2.\frac{C\sin\varphi\sin\varphi'+E(\sin\varphi\sin\psi'+\sin\psi\sin\varphi')+F\sin\psi\sin\psi'}{\sin^2\xi}.uv \\ &+\frac{C\sin^2\varphi+2E\sin\varphi\sin\psi+F\sin^2\psi}{\sin^2\xi}.u^2 \\ &+\frac{C\sin^2\varphi'+2E\sin\varphi'\sin\psi'+F\sin^2\psi'}{\sin^2\xi}.v^2 = 0. \qquad (2) \end{aligned}$$

Für die beiden neuen Axen erhalten wir folgende Coordinaten-Werthe:

$$v = \frac{\sin\varphi}{\sin\psi}, \qquad v = \frac{\sin\varphi'}{\sin\psi'},$$

die wir der Kürze halber durch v' und v'' bezeichnen wollen. Durch die Einführung dieser Grössen erhält die Gleichung (2) folgende Form:

$$\begin{aligned} &Aw^2-2\frac{\sin\psi}{\sin\xi}(Bv'+D)uw+2\frac{\sin\psi'}{\sin\xi}(Bv''+D)vw \\ &-2.\frac{\sin\psi\sin\psi'}{\sin^2\xi}(Cv'v''+E(v'+v'')+F)uv \end{aligned}$$

Digitized by Google

$$+\frac{\sin^2\psi}{\sin^2\xi}(Cv'^2+2Ev'+F)u^2$$
$$+\frac{\sin^2\psi'}{\sin^2\xi}(Cv''^2+2Ev''+F)v^2 = 0. \qquad (3)$$

487. Wenn wir zuerst die Coefficienten von u^2 und v^2 betrachten, nemlich folgende Ausdrücke:

$$\frac{\sin^2\psi}{\sin^2\xi}(Cv'^2+2Ev'+F),$$
$$\frac{\sin^2\psi'}{\sin^2\xi}(Cv''^2+2Ev''+F),$$

so ist ersichtlich, dass eine einzige Gleichung vom zweiten Grade diejenigen Werthe von v' und v'' zu Wurzeln hat, die machen, dass aus der umgeformten Gleichung die mit u^2 und v^2 behafteten Glieder ausfallen. Diese Gleichung, deren Wurzeln jene Werthe von v' und v'' sind, ist folgende:

$$Cz^2+2Ez+F = 0. \qquad (4)$$

Hieraus folgt, dass, wenn es möglich ist, aus der allgemeinen Gleichung das eine der beiden in Rede stehenden Glieder fortzuschaffen, es immer auch möglich ist, das andere derselben aus dieser Gleichung ausfallen zu lassen. Und dieses ist dann immer möglich, wenn

$$E^2-CF > 0 \text{ oder } E^2-CF = 0.$$

Doch können in dem letztern Falle nicht jene beiden Glieder zugleich fortgeschafft werden, denn, wenn dies geschähe, würden die beiden neuen Coordinaten-Axen zusammenfallen.

488. Wenn aus der umgeformten Gleichung die beiden mit u^2 und v^2 behafteten Glieder verschwinden, so stellt diese Gleichung, wie wir schon früher bemerkt haben, einen geometrischen Ort dar, der von den beiden Coordinaten-Axen berührt wird. Durch die Wurzeln der Gleichung (4) ist also die Richtung derjenigen beiden geraden Linien bestimmt, die durch den ursprünglichen Anfangspunct gehen und die durch die allgemeine Gleichung gegebene Curve berühren. Dieser Anfangspunct liegt ausserhalb der Curve, innerhalb derselben oder auf ihrem Umfange, je nachdem

$$E^2-CF > 0, \qquad E^2-CF < 0, \qquad E^2-CF = 0.$$

489. Wenn der Mittelpunct der Curve in den Anfangspunct der Coordinaten fällt, d. h. wenn in der gegebenen Gleichung B und D gleich Null sind, so bestimmen die Wurzeln der Gleichung (4), nemlich:

$$\frac{-E\pm\sqrt{(E^2-CF)}}{C}, \qquad (5)$$

die Richtung der beiden Asypmtoten. Dieser Ausdruck zeigt, dass, weil der Mittelpunct der Hyperbel ausserhalb, der Mittelpunct der Ellipse aber innerhalb der Curve liegt, in dem ersten Falle die Asymptoten reell, in dem zweiten Falle imaginär sind.

Wenn der Mittelpunct nicht in den Anfangspunct der Coordinaten fällt, so müssen wir, um die Richtung der Asymptoten zu bestimmen, zuvörderst den Anfangspunct in jenen Punct verlegen, und also, was sogleich aus der Form der Gleichung (4) der 455. Nummer erhellt, C, E und F mit

$$\frac{AC-B^2}{A^2}, \qquad \frac{AE-BD}{A^2}, \qquad \frac{AF-D^2}{A^2},$$

Digitized by Google

vertauschen und erhalten mithin statt (5):

$$\frac{-(AE-BD)\pm\sqrt{\left((AE-BD)^2-(AC-B^2)(AF-D^2)\right)}}{AC-B^2}; \qquad (6)$$

dieselben Ausdrücke, die wir bereits schon in der 456. Nummer erhalten haben.

Um die Segmente zu bestimmen, welche auf der zweiten Axe von den beiden Asymptoten abgeschnitten werden, müssen wir in die Gleichung des Mittelpunctes der Curve:

$$Aw+Bv+D = 0,$$

für v die vorstehenden Werthe substituiren, und die entsprechenden Werthe für w entwickeln. Auf diese Weise kommt:

$$w = \frac{A(BE-CD)\mp B\sqrt{\left((AE-BD)^2-(AC-B^2)(AF-D^2)\right)}}{A(AC-B^2)}.$$

490. Der Winkel, den die beiden Asymptoten mit einander bilden, und den wir η nennen wollen, ist, wenn wir die beiden Ausdrücke bei (6) durch a und a' bezeichnen, durch folgende Gleichung gegeben:

$$tang\eta = \frac{(a-a')sin\vartheta}{1+(a+a')cos\vartheta+aa'}.$$

Wir haben aber:

$$a+a' = -\frac{2(AE-BD)}{AC-B^2},$$

$$aa' = \frac{AF-D^2}{AC-B^2},$$

$$a-a' = 2.\frac{\sqrt{\left((AE-BD)^2-(AC-B^2)(AF-D^2)\right)}}{AC-B^2};$$

und mithin:

$$tang\eta = \frac{2\sqrt{\left((AE-BD)^2-(AC-B^2)(AF-D^2)\right)}sin\vartheta}{(AC-B^2)-2(AE-BD)cos\vartheta+(AF-D^2)}. \qquad (7)$$

Wenn die Hyperbel eine gleichseitige d. h. der Asymptoten-Winkel ein rechter ist, so kommt:

$$(AC-B^2)-2(AE-BD)cos\vartheta+(AF-D^2) = 0, \qquad (8)$$

und für den besondern Fall eines rechtwinkligen Coordinaten-Systems:

$$A(C+F)-B^2-D^2 = 0. \qquad (9)$$

Wenn der Anfangspunct der Coordinaten mit dem Mittelpuncte der Curve zusammenfällt, so reduciren sich die Gleichungen (7), (8) und (9), indem wir B = D = 0 setzen, auf folgende:

$$tang\eta = \frac{2\sqrt{(E^2-CF)}sin\vartheta}{C-2Ecos\vartheta+F}, \qquad (10)$$

$$C-2Ecos\vartheta+F = 0, \qquad (11)$$

$$C+F = 0. \qquad (12)$$

491. Wenn aus der umgeformten Gleichung durch die angezeigte Coordinaten-Verwandlung die mit v^2 und u^2 behafteten Glieder ausfallen, so verwandelt sich der Coefficient von uv, nemlich der Ausdruck:

$$-2.\frac{sin\psi sin\psi'}{sin^2\xi}(Cv'v''+E(v'+v'')+F), \qquad (13)$$

da

$$v'v'' = \frac{F}{C}, \qquad v'+v'' = -\frac{2E}{C},$$

zunächst in folgenden:

$$4.\ \frac{\sin\psi\sin\psi'}{\sin^2\xi}\cdot\frac{E^2-CF}{C}. \qquad (14)$$

Aus den Gleichungen:

$$v' = \frac{\sin\varphi}{\sin\psi} = \frac{\sin(\psi+\vartheta)}{\sin\psi}, \qquad v'' = \frac{\sin\varphi'}{\sin\psi'} = \frac{\sin(\psi'+\vartheta)}{\sin\psi'},$$

folgt ferner:

$$\cot\psi = \frac{v'-\cos\vartheta}{\sin\vartheta}, \qquad \cot\psi' = \frac{v''-\cos\vartheta}{\sin\vartheta};$$

und da endlich:

$$\sin\xi = \sin(\psi'-\psi),$$

so ergibt sich:

$$\frac{\sin\xi}{\sin\psi\sin\psi'} = \cot\psi-\cot\psi',$$
$$= \frac{v'-v''}{\sin\vartheta} = \frac{2\sqrt{[E^2-CF]}}{C\sin\vartheta}.$$

Hiernach geht der Aosdruck (14) in folgende über:

$$2.\ \frac{\sin\vartheta}{\sin\xi}\sqrt{[E^2-CF]} = \frac{C\sin^2\vartheta}{\sin\psi\sin\psi'}.$$

492. Wir wollen uns hier auf den Fall beschränken, dass der Anfangspunct der Coordinaten mit dem Mittelpuncte der bezüglichen Curve zusammenfällt. Wenn wir alsdann die beiden Axen sich so drehen lassen, dass sie mit den beiden Asymptoten der Curve, die, wenn die in Rede stehende Coordinaten-Verwandlung möglich ist, eine Hyperbel sein muss, zusammenfallen, so erhalten wir folgende Gleichung:

$$Aw^2+2.\ \frac{\sin\vartheta}{\sin\eta}\sqrt{(E^2-CF)}uv = 0,$$

indem wir η an die Stelle von ξ schreiben. Aus (10) erhalten wir:

$$\sin\eta = 2\sqrt{\left\{\frac{E^2-CF}{C^2+4E^2+F^2-4E(C+F)\cos\vartheta+2CF\cos2\vartheta}\right\}}\sin\vartheta,$$

und hiernach verwandelt sich die vorstehende Gleichung der auf ihre Asymptoten bezogene Hyperbel in folgende:

$$Aw^2+\sqrt{[C^2+4E^2+F^2-4E(C+F)\cos\vartheta+2CF\cos2\vartheta]}uv = 0,$$

und wenn der ursprüngliche Coordinaten-Winkel ein rechter ist, in:

$$Aw^2+\sqrt{[(C-F)^2+4E^2]}uv = 0. —$$

493. Wenn aus der umgeformten Gleichung (3) das mit uv behaftete Glied ausfallen soll, so erhalten wir folgende Bedingungs-Gleichung:

$$Cv'v''+E(v'+v'')+F = 0.$$

Diese Gleichung kann auf unendlich verschiedene Weise befriedigt werden, und zwar so, dass wir hierbei den Werth für v' und v'' beliebig annehmen können. Bestimmen wir v'' durch v', so kommt:

$$v'' = -\frac{F+Ev'}{E+Cv'}.$$

Hiernach erhalten wir:

$$Cv''^2+2Ev''+F = \frac{(CF-E^2)(Cv'^2+2Ev'+F)}{(E+Cv')^2}. \qquad (15)$$

Wenn wir also die umgeformte Gleichung, der Kürze halber, auf folgende Weise schreiben:

$$Aw^2+2B'vw+C'v^2+2D'uw+F'u^2 = 0, \qquad (16)$$

und mithin:

Digitized by Google

$$C' = \frac{\sin^2\psi}{\sin^2\xi}(Cv'^2+2Ev'+F),$$

$$F' = \frac{\sin^2\psi'}{\sin^2\xi}(Cv''^2+2Ev''+F),$$

setzen, so ergibt sich:

$$\frac{F'}{C'} = \frac{\sin^2\psi'}{\sin^2\psi} \cdot \frac{CF-E^2}{(E+Cv')^2}, \qquad (17)$$

494. Aus der Gleichung (16) können wir, im Allgemeinen, keines der beiden mit u^2 und v^2 behafteten Glieder mehr fortschaffen; denn wenn z. B. F' gleich Null sein soll, so müssen wir im Allgemeinen:

$$Cv''^2+2Ev''+F = 0, \qquad (18)$$

setzen, und diese Gleichung bringt nach (15), im Allgemeinen folgende mit sich:

$$Cv'^2+2Ev'+F = 0,$$

und also würde C' zugleich mit F' verschwinden. Es könnte diess aber nur auf eine doppelte Weise geschehen, einmal wenn v'' und v' gleich, das andere Mal wenn v'' und v' Wurzeln derselben quadratischen Gleichung wären. In dem erstern Falle würde die Coordinaten-Verwandlung illusorisch, weil die beiden neuen Axen zusammenfallen würden. In dem zweiten Falle erhalten wir die Bedingungs-Gleichung:

$$CF-E^2 = 0.$$

Wenn aber diese Gleichung befriedigt wird, so verschwindet in diesem besondern Falle C' und F', im Allgemeinen, nicht zu gleicher Zeit. Die Gleichung (18) gibt alsdann für v'' gleiche Werthe, und man hat:

$$Cv''+E = 0.$$

Die Gleichung (15) zeigt, dass alsdann, im Allgemeinen, F' verschwindet und C' nicht. In diesem Falle liegt aber der Anfangspunct auf der Curve und die zweite Axe ist eine Tangente derselben. Wenn wir, immer in der Voraussetzung, dass:

$$CF-E^2 = 0,$$

C' = 0 setzen, so ergibt sich:

$$Cv'+E = 0;$$

und die Curve wird von der ersten Coordinaten-Axen berührt, während die zweite Axe jede beliebige Richtung haben kann. Alsdann aber erscheint der Ausdruck für $\frac{F'}{C'}$ unter der Form $\frac{0}{0}$, und wir sehen sogleich, dass der wahre Werth dieses Ausdruckes unendlich wird und also F' nicht zugleich mit C' verschwindet.

495. Wenn also der Anfangspunct der Coordinaten in irgend einem Puncte der durch die Gleichung (1) dargestellten Curve liegt, so geht die umgeformte Gleichung (3), wenn wir:

$$Cv''+E = 0,$$

setzen, in folgende über:

$$Aw^2-2\frac{\sin\psi}{\sin\xi}(Bv'+D)uw-2\frac{\sin\psi'}{\sin\xi}\left(\frac{BE-CD}{C}\right)vw$$
$$+\frac{\sin^2\psi}{\sin^2\xi}(Cv'+E)^2u^2 = 0. \qquad (19)$$

Wir können die Form dieser Gleichung noch vereinfachen, wenn wir die erste Axe durch den Mittelpunct der Curve legen und zu diesem Ende:

$$Bv'+D = 0$$

setzen. Alsdann verwandelt sich nemlich die letzte Gleichung in folgende:

$$Aw^2-2\frac{\sin\psi'}{\sin\xi}\cdot\frac{BE-CD}{C}\cdot vw+\frac{\sin^2\psi}{\sin^2\xi}\cdot\left(\frac{BE-CD}{B}\right)^2\cdot u^2=0. \qquad (10)$$

Wenn A = 0 und also die bezügliche Curve eine Parabel ist, so gehen die beiden Gleichungen (19) und(20) in folgende über:

$$2\sin\psi(Bv'+D)uw+2\sin\psi'\cdot\frac{BE-CD}{C}\cdot uw-\frac{\sin^2\psi}{\sin\xi}(Cv'+E)^2u^2=0,$$

$$u^2=2\frac{\sin\psi'\sin\xi}{\sin^2\psi}\cdot\frac{B^2}{C(BE-CD)}vw.$$

Die Coefficienten, die in der letzten Gleichung vorkommen, zu entwickeln, liegt nicht in unserer Absicht; es kommt uns nur darauf an, auf die Form dieser Gleichungen aufmerksam zu machen.

496. Nachdem wir den besondern Fall, wo der Anfangspunct auf der Curve liegt, und wo, wenn wir das mit u^2 oder v^2 behaftete Glied fortschaffen wollen, zugleich auch das mit uv behaftete Glied ausfällt, betrachtet haben, wenden wir uns zur Gleichung (16):

$$Aw^2+2B'vw+C'v^2+2D'uw+F'u^2=0 \qquad (16)$$

zurück. Die beiden neuen Axen, auf welche diese Gleichung bezogen ist, bilden, wie wir es für den gleichen Fall in der 469. Nummer schon bemerkt haben, mit den beiden vom Anfangspuncte an die Curve gelegten Tangenten vier Harmonicalen. Diess hat in der Construction dann, wenn der Anfangspunct innerhalb liegt, keine unmittelbare Bedeutung mehr; doch, analytisch genommen, können wir diese Beziehung auch dann uns fortbestehend denken. Denn, von vier Harmonicalen sowol, als von vier harmonischen Theilungspuncten, können zwei imaginär werden.

497. Wenn der Anfangspunct der Coordinaten in den Mittelpunct der Curve fällt, so ist:

$$B'=\frac{\sin\psi'}{\sin\xi}(Bv''+D)=0,$$

$$D'=-\frac{\sin\psi}{\sin\xi}(Bv'+D)=0,$$

und hiernach geht die Gleichung (16) in folgende über:

$$Aw^2+Cv^2+Fu^2=0. \qquad (21)$$

In diesem Falle sind die beiden neuen Axen zwei Durchmesser der Curve, und aus dem Vorstehenden ergibt sich, dass wir einen derselben ganz beliebig annehmen und dann, auf einzige Weise, den andern bestimmen können. Setzen wir in der vorstehenden Gleichung nach einander $\frac{w}{u}$ und $\frac{w}{v}$ gleich Null, so erhalten wir beidesmal für $\frac{v}{u}$ zwei gleiche und entgegengesetzte Werthe. Wenn man also von irgend einem Puncte eines beliebigen jener beiden Durchmesser zwei Tangenten an die Curve und eine dem andern Durchmesser parallele gerade Linie, zieht, so bilden die drei gerade Linien, welche man auf diese Weise erhält, mit jenem erstgenannten Durchmesser vier Harmonicalen. Liegt jener auf einem Durchmesser beliebig angenommene Punct zugleich auf der Curve, so fallen die beiden Tangenten zusammen und sind mithin, da mit zwei zusammenfallenden Harmonicalen nothwendig noch eine dritte zusammenfallen muss, dem andern Durchmesser parallel.

Wir erhalten die jenen beiden Durchmessern parallele Tangenten, wenn wir in der letzten Gleichung nach einander u und v gleich Null setzen. Auf diese Weise kommt:

Digitized by Google

$$\frac{w}{v} = \pm\sqrt{-\frac{C}{A}},$$

$$\frac{w}{u} = \pm\sqrt{-\frac{F}{A}}.$$

Durch diese Ausdrücke für $\frac{w}{v}$ und $\frac{w}{u}$ ist also die Grösse der beiden halben in der erste und zweite Coordinaten-Axe fallenden Durchmesser der Curve gegeben.

Die beiden in Rede stehenden Dorchmesser heissen zugeordnete. Jeder Durchmesser hat seinen zugeordneten.

498. Setzen wir in der Gleichung (21) $w = o$, so erhalten wir für die Asymptoten der Curve:

$$\frac{v}{u} = \pm\sqrt{-\frac{F}{C}}.$$

Es bilden dieselben also mit den beiden Coordinaten-Axen, wie wir bereits schon bemerkt haben, vier Harmonicalen.

Die beiden Asymptoten und irgend zwei zugeordnete Durchmesser einer Curve zweiter Classe bilden ein System von vier Harmonicalen.

Nach dem vorstehenden Satze ergibt sich auf die leichteste Weise die Construction folgender beiden Aufgaben:

Wenn die Richtung der beiden Asymptoten und eines Durchmessers einer Curve zweiter Classe gegeben ist, die Richtung des zugeordneten Durchmessers zu finden.

Wenn die Richtung irgend zweier zugeordneten Durchmesser und einer Asymptote einer Hyperbel gegeben ist, die Richtung der andern Asymptote zu bestimmen.

Und endlich schliesst sich hier auch noch folgende Anfgabe an:

Wenn die Richtung irgend zweier Paare zugeordneter Durchmesser einer Curve zweiter Classe gegeben ist, die Richtung der beiden Asymptoten zu bestimmen.

Diese letzte Aufgabe kömmt daranf hinaus, zwei gerade Linien zu construiren, die mit jedem der beiden Paare zugeordneter Durchmesser ein System von vier Harmonicalen bilden, und hierzu gelangen wir durch die Construction der Wurzeln einer leicht zu entwickelnden quadratischen Gleichung. Für den Falle, dass diese Wurzeln imaginär werden, sind die Curven, denen jene beiden Paare zugeordneter Durchmesser angehören, Ellipsen.

An die letzten Bemerkungen knüpft sich auch noch folgender Satz:

Wenn man einer Asymptote einer Hyperbel irgend eine gerade Linie parallel zieht, so werden von irgend zwei Durchmessern und ihren beiden zugeordneten auf dieser geraden Linie gleiche Stücke interceptirt. —

499. Wenn wir die Grössen der in die beiden Coordinaten-Axen fallenden Durchmesser der Curve zweiter Classe als Constante in der Gleichnng derselben einführen und demnach

$$\sqrt{-\frac{C}{A}} = a,$$

$$\sqrt{-\frac{F}{A}} = b,$$

setzen, so geht die Gleichnng (21) in folgende über:

Digitized by Google

$$w^2 = a^2v^2+b^2u^2.$$

Für den Fall der Ellipse sind a und b beide reell; für den Fall der Hyperbel ist eine dieser beiden Grössen reell, die andere imaginär. Vertauschen wir demnach, wenn a oder b imaginär werden, diese Grössen mit $a\sqrt{-1}$ und $b\sqrt{-1}$, so erhalten wir:

$$w = \pm a^2v^2 \mp b^2u^2,$$

für die Gleichung einer auf zwei ihrer zugeordneten Durchmesser bezogenen Hyperbel. Wir müssen in dieser Gleichung die obern oder untern Zeichen nehmen, je nachdem die erste oder zweite Coordinaten-Axe der Curve begegnet. Von zweien zugeordneten Durchmessern einer Hyperbel ist immer einer imaginär. Gewöhnlich aber nimmt man für diesen Durchmesser eine reelle Grösse und nennt z. B. a und b diejenigen halben Durchmesser der durch die letzte Gleichung dargestellten Hyperbel, die in die erste und zweite Coordinaten-Axe fallen. —

500. Zwei zugeordnete Durchmesser einer Curve zweiter Classe, die auf einander senkrecht stehen, heissen die Axen der Curve. Wenn wir annehmen, dass der Anfangspunct der Coordinaten in den Mittelpunct der Curve falle, und wir also folgende Gleichung zu Grunde legen:

$$Aw^2+Cv^2+2Euv+Fu^2 = o, \qquad (22)$$

so erhalten wir, um die Richtung der beiden Axen zu bestimmen, folgende beide Gleichungen:

$$\begin{aligned} Cv'v''+E(v'+v'')+F &= o, \\ v'v''+(v'+v'')cos\vartheta+1 &= o. \end{aligned} \qquad (23)$$

Da diese beiden Gleichungen in Beziehung auf v' und v'' symmetrisch sind, so sind diese Grössen Wurzeln derselben Gleichung des zweiten Grades, und diese Gleichung erhalten wir sogleich, wenn wir zwischen den vorstehenden beiden Gleichungen die Werthe von v'v'' und (v'+v'') eliminiren. Man findet:

$$v^2+\frac{F-C}{E-Ccos\vartheta}v-\frac{E-Fcos\vartheta}{E-Ccos\vartheta} = o. \qquad (24)$$

Wenn:

$$F = C,$$

so reducirt sich die vorstehende Gleichung auf folgende:

$$v^2-1 = o.$$

Bezeichnen wir den Winkel, welchen eine der beiden Axen der Curve mit der ersten Coordinaten-Axe bildet, durch ω, so sind die beiden Wurzeln der Gleichung (24):

$$-\frac{sin\omega}{sin(\vartheta-\omega)} \text{ und } -\frac{sin(\omega+\frac{1}{2}\pi)}{sin(\vartheta-\omega-\frac{1}{2}\pi)} = \frac{cos\omega}{cos(\vartheta-\omega)},$$

und da die Summe dieser Wurzeln für den in Rede stehenden Fall Null ist, so kommt:

$$o = sin(\vartheta-\omega)cos\omega-sin\omega cos(\vartheta-\omega) = sin(\vartheta-2\omega),$$

also ist $\omega = \frac{1}{2}\vartheta$, und somit halbiren die beiden Axen die beiden Paare der von den Coordinaten-Axen gebildeten Scheitelwinkel.

Die beiden Coefficienten in der Gleichung (24) erscheinen unter der unbestimmten Form $\frac{o}{o}$, oder, was dasselbe heisst, die beiden Gleichungen (23) werden identisch, wenn

$$F = C, \qquad E-Ccos\vartheta = E-Fcos\vartheta = o.$$

Alsdann gibt es nur rechtwinklige Systeme zugeordneter Durchmesser und die erste der Gleichungen (23) drückt anders nichts aus, als dass je zwei sich rechtwinklig schneidende Durchmesser zugeordnete sind.

Digitized by Google

Wenn wir statt der Gleichung (22) die allgemeinste Gleichung:

$$Aw^2+2Bvw+Cv^2+2Duw+2Euv+Fu^2 = 0,$$

zu Grunde legen, so gehen die beiden letzten Bedingungs-Gleichungen in folgende über:

$$AC-B^2 = AF-D^2; \qquad AE-BD = (AC-B^2)\cos\vartheta.$$

Wir können der allgemeinen Gleichung, nachdem wir dieselbe mit A multiplicirt haben, folgende Form geben:

$$(Aw^2+Bv+Du)^2+(AC-B^2)v^2+2(AE-BD)uv+(AF-D^2)u^2 = 0,$$

und dann erhalten wir mit Berücksichtigung der letzten Bedingungs-Gleichung:

$$\frac{v^2+2uv\cos\vartheta+u^2}{(Aw+Bv+Du)^2} = B^2-AC.$$

In dieser Gleichung erkennen wir (442) sogleich die Gleichung eines Kreises wieder, dessen Mittelpuncts-Coordinaten $\frac{B}{A}$ und $\frac{D}{A}$ sind und dessen Radius $\sqrt{B^2-AC}$ ist.

Je zwei zugeordnete Durchmesser eines Kreises stehen auf einander senkrecht; und, umgekehrt, je zwei auf einander senkrecht stehende Durchmesser eines Kreises sind zugeordnete.

501. Wenn wir annehmen, dass der Coordinaten-Winkel ein rechter sei, so verwandelt sich die Gleichung (24) in folgende:

$$v^2+\frac{F-C}{E}v-1 = 0, \qquad (25)$$

und die Wurzeln dieser Gleichung sind die, mit entgegengesetztem Zeichen genommenen, teigonometrischen Tangenten derjenigen beiden Winkel, welche die beiden Axen der Curve mit der ersten Coordinaten-Axe bilden. Nennen wir diese Winkel ω und ω', so ist $\omega' = \omega+{}^1/_2\pi$, mithin:

$$tang2\omega = tang2\omega',$$

und da:

$$tang2\omega = \frac{2tang\omega}{1-tang^2\omega} = -\frac{2v}{1-v^2},$$

und ferner nach (25):

$$\frac{1-v^2}{v} = \frac{F-C}{E},$$

so kommt:

$$tang2\omega = \frac{2E}{C-F} = tang2\omega'.$$

502. Wenn der Winkel, den zwei zugeordnete Durchmesser mit einander bilden, irgend ein gegebener ist, so können wir die Richtungen dieser Durchmesser selbst leicht bestimmen. Denn, bezeichnen wir jenen Winkel durch ξ und diejenigen beiden Winkel, welche die Durchmesser mit der ersten Axe bilden, durch ω und ω', so ist $\xi = \omega'-\omega$ mithin:

$$tang\omega' = \frac{tang\omega+tang\xi}{1-tang\omega tang\xi}.$$

Neben dieser Gleichung erhalten wir, bei der Voraussetzung rechtwinkliger Coordinaten-Axen, nachstehende Gleichung, welche ausdrückt, dass die durch jene Werthe von ω und ω' bestimmten Durchmesser zugeordnete sind:

$$Ctang\omega tang\omega'-E(tang\omega+tang\omega')+F = 0.$$

Eliminiren wir zwischen diesen beiden Gleichungen $tang\omega'$, so ergibt sich folgende Glei-

chung des zweiten Grades zur Bestimmung von $tang\omega$:

$$tang^2\omega - \frac{2E-(C-F)tang\xi}{C+Etang\xi}tang\omega + \frac{F-Etang\xi}{C+Etang\xi} = 0.$$

Die Wurzeln dieser Gleichung sind:

$$tang\omega = \frac{2E-(C-F)tang\xi \pm \sqrt{[(C+F)^2tang^2\xi + 4(E^2-CF)(1+tang^2\xi)]}}{2(C+Etang\xi)}.$$

Diesen beiden Werthen für $tang\omega$ entsprechen zwei Werthe für $tang\omega'$ oder $tang(\omega+\xi)$, die wir unmittelbar erhalten, wenn wir in den vorstehenden Ausdrücken für $tang\omega$ das Zeichen von $tang\xi$ ändern (246).

Es gibt also im Allgemeinen zwei Systeme zugeordneter Durchmesser, die einen gegebenen Winkel mit einander bilden. Diese beiden Systeme fallen zusammen, wenn der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen in den Werthen von $tang\omega$ verschwindet. Alsdann ist:

$$sin^2\xi = 4.\frac{CF-E^2}{(C+F)^2}. \qquad (26)$$

Diese Gleichung gibt das Minimum für den Sinus der Winkel, die irgend zwei zugeordnete Durchmesser mit einander bilden können. Es kann diese Gleichung nur für den Fall der Ellipse befriedigt werden, nur hier gibt es ein Minimum, während, wenn die bezügliche Curve eine Hyperbel ist, der Winkel zugeordneter Durchmesser jeder beliebige sein kann. Für den Fall des Kreises reducirt sich die letzte Gleichung auf:

$$sin^2\xi = 1:$$

es gibt, wie wir schon bemerkt haben, nur rechtwinklige Systeme zugeordneter Durchmesser. —

503. Wenn wir von der Gleichung:

$$Aw^2+2Bvw+2Duw+C(v^2+u^2) = 0, \qquad (1)$$

die bei der Voraussetzung rechtwinkliger Coordinaten-Axen, irgend einen Ort zweiter Classe darstellt, dessen Brennpunct zum Anfangspuncte der Coordinaten genommen worden ist, ausgehen, und die der umgeformten Gleichung (2) der 486. Nummer entsprechende Gleichung, der Kürze halber auf folgende Weise schreiben:

$$Aw^2+2B'vw+2D'uw+C'v^2+2E'uv+F'u^2 = 0,$$

so kommt, indem wir:

$$sin\psi = -cos\varphi, \qquad sin\psi' = -cos\varphi',$$
$$C = F, \qquad E = 0,$$

setzen:

$$F' = -\frac{C(sin\varphi sin\varphi'+cos\varphi cos\varphi')}{sin^2\xi} = -\frac{Ccos(\varphi'-\varphi)}{sin^2\xi} = -\frac{Ccos\xi}{sin^2\xi},$$

$$C' = F' = \frac{C}{sin^2\xi}.$$

Die umgeformte Gleichung ist hiernach folgende:

$$(Aw^2+2B'vw+2D'uw)sin^2\xi + C(v^2-2vcos\xi+u^2) = 0. \qquad (2)$$

Diese Gleichung ist also, wenn wir A, B', D' und C als unbestimmte Coefficienten betrachten, die allgemeine Gleichung der Curven zweiter Classe, wenn wir den Anfangspunct in einen Brennpunct derselben legen und ξ der beliebige Coordinaten-Winkel ist. Aus der Zusammenstellung der beiden Gleichungen (1) und (2) ergeben sich direct die Folgerungen, bei denen wir schon in der 476. Nummer verweilt haben. Wenn ξ ein rechter Winkel ist, so geht die letzte Gleichung in folgende über:

Digitized by Google

$$Aw^2+2B'vw+2D'uw+C(v^2+u^2) = o, \qquad (3)$$

eine Gleichung, welche, ausser dass die beiden Coefficienten von vw und uw andere Werthe erhalten, mit der ursprünglichen Gleichung identisch ist. Wir haben in diesem Falle, indem wir:

$$sin\varphi' = cos\varphi, \quad sin\psi = -cos\varphi, \quad sin\psi' = sin\varphi, \quad sin\xi = 1,$$

setzen, folgende Bestimmung dieser Coefficienten:

$$B' = Bcos\varphi+Dsin\varphi, \qquad D' = -(Bsin\varphi-Dcos\varphi). \qquad (4)$$

Hiernach erhält man ferner für jede Annahme des Winkels φ:

$$B'^2+D'^2 = B^2+D^2;$$

ein Resultat, das wir, wenigstens für den Fall der Ellipse und Hyperbel, hätten voraussehen können, weil die letzten Ausdrücke, dividirt durch A^2, anders nichts sind, als das Quadrat der Entfernung des Brennpunctes vom Mittelpuncte der Curve. Es ist also auch, wenn wir ein und dieselbe Curve um den Anfangspunct, wenn derselbe im Brennpuncte angenommen wird, beliebig drehen, in der Gleichung derselben die Quadrat-Summe der Coefficienten von vw und uw constant.

Wenn wir die Coordinaten-Axen so drehen, dass die eine derselben, etwa die erste Axe, durch den Mittelpunct der Curve geht, so wird D' gleich Null und folglich:

$$B' = \pm\sqrt{B^2+D^2},$$

und wir erhalten statt (3):

$$Aw^2\pm2\sqrt{(B^2+D^2)}.\ vw+C(v^2+u^2). \qquad (5)$$

504. Für den Fall der Parabel verwandeln sich die Gleichungen (1) und (5) in folgende:

$$2Bvw+2Duw+C(v^2+u^2) = u,$$
$$vw+P(v^2+u^2) = o,$$

indem wir in der letzten Gleichung:

$$\frac{\pm C}{\sqrt{(B^2+D^2)}} = 2P$$

setzen. Es bedeuten, wie man sogleich sieht, die Ausdrücke $\frac{C}{2B}$ und $\frac{C}{2D}$ diejenigen Segmente, die auf der ursprünglichen ersten und zweiten Axe von solchen zwei Tangenten, die der zweiten und ersten Axe parallel sind, bestimmt werden. Die Quadrat-Summe der reciproken Werthe dieser Segmente

$$4.\frac{B^2+D^2}{C^2}$$

ist also constant und gleich $\frac{1}{P^2}$; P ist die Entfernung des Brennpunctes vom Scheitel der Axe der Parabel. Das Vierfache dieser Entfernung heisst Parameter.

Die erste der Gleichungen (4) gibt, wenn wir D = o setzen:

$$B' = Bcos\varphi,$$

und mithin kommt:

$$\frac{C}{2B}cos\varphi = \frac{C}{2B} = P.$$

Die geometrische Deutung dieser Gleichung gibt folgenden bekannten Satz:

Die Fusspuncte der vom Brennpuncte einer gegebenen Parabel auf alle Tangenten derselben gefällten Perpendikel liegen in gerader Linie, der Tangente im Scheitel der Axe.

Die analogen Sätze für Ellipse und Hyperbel haben wir schon angeführt (479).

505. Nach dem Vorstehenden können wir alle diejenigen Corven, welche dieselben beiden Brennpuncte haben, wenn wir die erste Coordinaten-Axe dorch diese beiden Puncte legen und einen derselben zum Anfangspuncte nehmen, durch folgende Gleichung darstellen:

$$w^2+2Bvw+C(v^2+u^2) = 0,$$

indem wir durch 2B die Entfernung der beiden Brennpuncte von einander und durch C nach einander alle möglichen Grössen bezeichnen.

506. An die letzten Entwicklongen knüpft sich auf eine bequeme Weise die Bestimmong der Dimensionen einer durch die allgemeine Gleichung:

$$2Bvw+2Dow+Cv^2+2Eov+Fu^2 = 0, \qquad (1)$$

dargestellten Parabel. Wenn diese Gleichung auf schiefwinklige Coordinaten-Axen bezogen ist und wir den Coordinaten-Winkel ϑ nennen, so können wir dieselbe Corve zuvörderst aof rechtwinklige Axen beziehen. Lassen wir zu diesem Ende bloss die zweite Axe om einen Winkel $(\frac{1}{2}\pi-\vartheta)$ sich drehen, so erhalten wir, indem wir:

$$\varphi = 0, \qquad \varphi' = \tfrac{1}{2}\pi, \qquad \psi = -\vartheta, \qquad \psi' = \tfrac{1}{2}\pi-\vartheta,$$

setzen, nnd

$$2B'vw+2D'ow+C'v^2+2E'ov+F'u^2 = 0, \qquad (2)$$

für die umgeformte Gleichong nehmen und nicht redociren, nach der 486. Nommer folgende Coefficienten-Bestimmong:

$$B' = B+D\cos\vartheta, \qquad D' = D\sin\vartheta,$$
$$E' = E\sin\vartheta+F\sin\vartheta\cos\vartheta, \qquad F' = F\sin^2\vartheta,$$
$$C' = C+2E\cos\vartheta+F\cos^2\vartheta.$$

Wenn wir ferner den Anfangspunct der Coordinaten in den Brennponct der gegebenen Parabel verlegen, so nimmt ihre Gleichung folgende Form an:

$$2B''vw+2D''ow+C''(v^2+o^2) = 0$$

und wir haben nach der 480. Nommer:

$$\frac{C''}{B''} = \frac{C'D'^2-2B'D'E'+F'B'^2}{B'(B'^2+D'^2)}$$
$$\frac{C''}{D''} = \frac{C'D'^2-2B'D'E'+F'B'^2}{D'(B'^2+D'^2)}.$$

Wenn wir wiederum den vierten Theil des Parameters P nennen, so kommt endlich nach der 504. Nommer:

$$P = \pm\tfrac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{C''^2}{B''^2+D''^2}\right)};$$

und nach successiven Substitutionen:

$$P = \pm\frac{C'D'^2-2B'D'E'+F'B'^2}{2(B'^2+D'^2)^{\frac{3}{2}}},$$
$$= \pm\frac{(CD^2-2BDE+FB^2)\sin^2\vartheta}{2(B^2+2BD\cos\vartheta+D^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Wir können auch auf eine ganz analoge Weise die Grösse der beiden Axen der durch die allgemeine Gleichung dargestellten mit einem Mittelpuncte versehenen Corven zweiter Classe bestimmen. Doch zo demselben Ziele kommen wir aoch auf einem andern Wege, der demjenigen entspricht, auf welchem wir im ersten Bande dieselben Bestimmnngen bei Gleichungen zwischen Punct-Coordinaten gemacht haben.

507. Wir wollen, indem wir für den Coordinaten-Winkel einen rechten nehmen nnd den Anfangspunct in den Mittelpunct der Corve legen, und, der Kürze wegen, den

Digitized by Google

Coefficienten von w^2 gleich der Einheit setzen, folgende Gleichung:

$$w^2+Cv^2+2Euv+Fu^2 = 0, \qquad (1)$$

als die allgemeine Gleichung der geometrischen Oerter zweiter Classe betrachten. Um denselben Ort auf zwei andere Durchmesser als Coordinaten-Axen zu beziehen, die mit einander irgend einen Winkel ϑ und mit der ursprünglichen ersten Axe die Winkel φ und φ' bilden, so dass mithin

$$\varphi'-\varphi = \vartheta,$$

müssen wir uns nachstehender Verwandlungs-Formeln bedienen (452):

$$\frac{v}{w} = \frac{v\sin\varphi'-u\sin\varphi}{w\sin\vartheta}, \qquad \frac{u}{w} = -\frac{v\cos\varphi'-u\cos\varphi}{w\sin\vartheta}. \qquad (G)$$

Hiernach erhalten wir statt (1) eine Gleichung, die wir folgendergestallt schreiben können:

$$w^2+C'v^2+2E'uv+F'u^2 = 0 \qquad (2)$$

indem wir:

$$\frac{C\sin^2\varphi'-2E\sin\varphi'\cos\varphi'+F\cos^2\varphi'}{\sin^2\vartheta} = C', \qquad (3)$$

$$\frac{C\sin^2\varphi-2E\sin\varphi\cos\varphi+F\cos^2\varphi}{\sin^2\vartheta} = F', \qquad (4)$$

$$\frac{C\sin\varphi\sin\varphi'-E(\sin\varphi\cos\varphi'+\sin\varphi'\cos\varphi)+F\cos\varphi\cos\varphi'}{\sin^2\vartheta} = E', \qquad (5)$$

setzen. Um von der Gleichung (2) zur Gleichung (1) zurückzugehen, haben wir folgende Verwandlungs-Formeln:

$$\frac{v}{w} = \frac{v\cos\varphi+u\sin\varphi}{w}, \qquad \frac{u}{w} = \frac{v\cos\varphi'+u\sin\varphi'}{w}; \qquad (G')$$

und erhalten, indem wir die hierdurch angezeigten Substitutionen ausführen:

$$C = C'\cos^2\varphi+2E'\cos\varphi\cos\varphi'+F'\cos^2\varphi', \qquad (6)$$

$$F = C'\sin^2\varphi+2E'\sin\varphi\sin\varphi'+F'\sin^2\varphi', \qquad (7)$$

$$E = C'\sin\varphi\cos\varphi+E'(\sin\varphi\cos\varphi'+\cos\varphi\sin\varphi')+F'\sin\varphi'\cos\varphi'. \qquad (8)$$

508. Aus der Gleichung (3), (4) und (5) erhalten wir, wenn wir darauf Rücksicht nehmen, dass ϑ gleich $(\varphi'-\varphi)$ ist, nach einigen trigonometrischen Umformungen:

$$E'^2-C'F' = \frac{E^2-CF}{\sin^2\vartheta},$$

mithin:

$$(E'^2-C'F')\sin^2\vartheta = E^2-CF. \qquad (9)$$

Auf ähnliche Weise erhalten wir, wenn wir die Gleichungen (6) und (7) addiren:

$$C'+2E'\cos\vartheta+F' = C+F. \qquad (10)$$

Aus den Gleichungen (9) und (10) folgt, dass die Ausdrücke:

$$(E'^2-C'F')\sin^2\vartheta, \qquad C+2E'\cos\vartheta+F' \qquad (11)$$

unverändert dieselben bleiben, auf welche zwei, irgend einen Winkel ϑ einschliessende, Durchmesser wir auch die Gleichung der gegebenen Curve beziehen mögen.

Wenn wir die gegebene Curve auf beliebige, aber unter rechten Winkeln sich schneidende, Durchmesser beziehen, so sind folgende Ausdrücke constant:

$$E'^2-C'F', \qquad C+F'. \qquad (12)$$

Wenn wir endlich nur zugeordnete Durchmesser zu Coordinaten-Axen nehmen, so sind folgende Ausdrücke constant:

$$C'F'\sin^2\vartheta, \qquad C+F'. \qquad (13)$$

509. Die Deutung der vorstehenden Resultate führt uns zu bekannten Sätzen. Es seien zuvörderst:

$$w^2 = a^2v^2+b^2u^2,$$
$$w^2 = a'^2v^2+b'^2u^2,$$

die Gleichungen irgend einer Ellipse, bezogen auf zwei verschiedene Systeme zugeordneter Durchmesser. Alsdann ist (13):

$$a^2b^2\sin^2\vartheta = a'^2b'^2\sin^2\vartheta',$$

wenn wir die von den beiden Paaren zugeordneten Durchmesser eingeschlossenen Winkel ϑ und ϑ' nennen. Es ist also auch:

$$4ab\sin\vartheta = 4a'b'\sin\vartheta':$$

Alle um eine gegebene Ellipse beschriebenen Parallelogramme, deren gegenüberliegende Seiten zweien zugeordneten Durchmessern parallel sind, sind einander gleich.

Es ist ferner (13):

$$a^2+b^2 = a'^2+b'^2:$$

Die Summe der Quadrate irgend zweier zugeordneter Durchmesser einer gegebenen Ellipse bleibt sich immer gleich.

510. Wenn

$$w^2+cv^2+2cuv+fu^2 = 0$$

die Gleichung einer auf zwei sich unter rechten Winkeln schneidende Durchmesser bezogenen Ellipse ist, so ist (12)

$$c + f$$

constant, wie wir auch jene rechtwinkligen Durchmesser annehmen mögen. Es ist aber sogleich ersichtlich, dass $(-c)$ und $(-f)$ die Quadrate derjenigen Segmente sind, die auf der ersten und zweiten Axe von solchen Tangenten der Ellipse, die bezüglich der zweiten und ersten Axe parallel sind, abgeschnitten werden. Die Summe dieser Quadrate ist also constant und zwar gleich der Quadratsumme der beiden halben Axen der Curve. Man sieht hieraus, dass die Diagonalen aller um eine gegebene Ellipse beschriebenen Rechtecke dieselbe Länge haben und doppelt so gross sind, als diejenige Chorde, welche die Scheitel der beiden Axen der Ellipse verbindet. Also (I, 343):

Der Ort für die Durchschnitte zweier auf einander senkrechten Tangenten einer gegebenen Ellipse (oder Hyperbel) ist ein Kreis. *)

511. Wenn die Coordinaten-Axen, auf welche wir ein und dieselbe gegebene Curve zweiter Classe beziehen, irgend zwei beliebige sind, und wir demnach die allgemeine Gleichung:

$$Aw^2+2Bvw+Cv^2+2Duw+2Euv+Fu^2 = 0,$$

---

*) In der Behandlung der geometrischen Oerter zweiter Ordnung haben wir gezeigt, dass

$$\mu+\beta$$

constant ist, wenn die allgemeine Gleichung:

$$\mu y^2+2\alpha xy+\beta x^2+2\gamma y+2\delta x+1 = 0,$$

dieselbe Ellipse auf beliebige rechtwinkliche Coordinaten-Axen bezogen, darstellen soll. Wenn γ und δ gleich Null sind und also der Anfangspunct der Coordinaten in den Mittelpunct der Curve fällt, so bedeuten $\frac{1}{\beta}$ und $\frac{1}{\mu}$ die Quadrate der halben in die Coordinaten-Axen fallenden Durchmesser. Also:

Die Summe der Quadrate der reciproken Werthe irgend zweier auf einander senkrecht stehender Durchmesser einer Ellipse oder Hyperbel ist eine constante Grösse.

zu Grunde legen, so können wir für diesen allgemeinsten Fall unmittelbar die Ausdrücke der letzten Nummern umformen, indem wir (455):

$$\frac{AC-B^2}{A^2}, \qquad \frac{AE-BD}{A^2}, \qquad \frac{AF-D^2}{A^2}$$

für C, E und F schreiben. Statt der Ausdrücke (11) erhalten wir alsdann folgende:

$$\frac{[(AE-BD)^2-(AC-B^2)(AF-D^2)]\sin^2\vartheta}{A^4}, \qquad (14)$$

$$\frac{(AC-B^2)+2(AE-BD)\cos\vartheta+(AF-D^2)}{A^4}; \qquad (15)$$

indem wir, wie dort, den jedesmaligen Coordinaten-Winkel durch ϑ bezeichnen. Für den Fall der Parabel, wo $A = 0$, werden die beiden vorstehendrn Ausdrücke unendlich. Wenn aber A nicht gleich Null ist, und wir dasselbe ein für alle Mal beliebig annehmen, so sind diese Ausdrücke constant, auf welches Coordinaten-System wir die gegebene Curve auch beziehen mögen. Indem wir insbesondere zwei zugeordnete Durchmesser der Curve, die irgend einen Winkel ξ mit einander bilden, als Coordinaten-Axen nehmen, erhalten wir, wenn wir die Quadrate dieser Durchmesser durch z' und z'' bezeichnen, und, der Einfachheit halber, in der allgemeinen Gleichung $A = t$ setzen:

$$z'+z'' = (C-B^2)+2(E-BD)\cos\vartheta+(F-D^2),$$
$$-z'z''\sin^2\xi = [(E-BD)^2-(C-B^2)(F-D^2)]\sin^2\vartheta.$$

z' und z'' sind also die beiden Wurzeln folgender quadratischer Gleichung:

$$z^2-[(C-B^2)+2(E-BD)\cos\vartheta+(F-D^2)]z-\frac{\sin^2\vartheta}{\sin^2\xi}[(E-BD)^2-(C-B^2)(F-D^2)] = 0. \qquad (16)$$

Wenn das letzte Glied dieser Gleichung negativ ist, so lehrt die Theorie der algebraischen Gleichungen, dass die Wurzeln beide reell und von entgegengesetztem Zeichen sind. Für diesen Fall, wo die hezügliche Curve eine Hyperhel ist, haben wir also folgende Bedingung:

$$(E-BD)^2-(C-B^2)(F-D^2) > 0,$$

in Uebereinstimmung mit der 457. Nummer.

Die Hyperhel ist eine gleichseitige, wenn das mit der ersten Potenz von z behaftete Glied aus der obigen Gleichung ausfällt, also in dem Falle, dass:

$$(C-B^2)+2(E-BD)\cos\vartheta+(F-D^2) = 0.$$

Wenn das von z unabhängige Glied der Gleichung (16) einen positiven Werth erhält, so sind die Wurzeln dieser Gleichung entweder imaginär oder reell und von demselben Zeichen. Diesem Falle entspricht die Bedingung:

$$(E-BD)^2-(C-B^2)(F-D^2) < 0. \qquad (17)$$

In dem Falle reeller Wurzeln können beide positiv oder beide negativ sein, einmal ist die Curve eine Ellipse, das andere Mal ist dieselbe imaginär. Jenes findet Statt, wenn der Coefficient von z in der Gleichung (16) negativ, dieses, wenn derselbe positiv ist. Dieser Coefficient:

$$-[(C-B^2)+2(E-BD)\cos\vartheta+(F-D^2)], \qquad (18)$$

hat offenbar das entgegengesetzte Zeichen mit den Ausdrücken:

$$(C-B^2) \text{ und } (F-D^2), \qquad (19)$$

die nach der vorstehenden Bedingung nothwendig im Zeichen übereinstimmen müssen. Wenn nemlich dem Ausdrucke (18) dasselbe Zeichen als den Ausdrücken (19) zukommen sollte, so müsste $2(E-BD)\cos\vartheta$ mit den beiden letztgenannten Ausdrücken von entgegen-

gesetztem Zeichen und, abgesehen vom Zeichen, grösser als die Summe dieser Ausdrücke sein, was unmöglich ist, da, nach (17):

$$(E-BD) < \sqrt{[(C-B^2)(F-D^2)]}.$$

Für den Fall der Ellipse sind also die Ausdrücke (19) negativ; sie sind positiv für den Fall, dass die bezügliche Curve imaginär ist.

512. Die beiden Wurzeln der Gleichung (16) sind:

$$z = \tfrac{1}{2}[(C-B^2)+2(E-BD)\cos\vartheta+(F-D^2)],$$

$$\pm\frac{\sqrt{([C-B^2+2(E-BD)\cos\vartheta+F-D^2]^2\sin^2\xi+4[(E-BD)^2-(C-B^2)(F-D^2)]\sin^2\vartheta)}}{2\sin\xi}, \quad (20)$$

und als Bedingung für die Realität dieser Wurzeln erhalten wir:

$$\sin^2\xi > -4.\frac{(E-BD)^2-(C-B^2)(F-D^2)}{(C-B^2+2(E-BD)\cos\vartheta+F-D^2)^2}.\sin^2\vartheta.$$

Für den Fall der Hyperbel wird diese Bedingung immer erfüllt; für den Fall der Ellipse und imaginären Curve, ist, wovon man sich leicht überzeugt, derjenige Ausdruck, welcher, nach dieser Bedingung, kleiner sein muss als $\sin^2\xi$, immer kleiner als die Einheit, und somit hat die Gleichung (16) bei gehöriger Bestimmung des Winkels ξ immer reelle Wurzeln. Die Gleichung (16) hat gleiche Wurzeln, wenn:

$$\sin^2\xi = -4\frac{(E-BD)^2-(C-B^2)(F-D^2)}{(C-B^2+2(E-BD)\cos\vartheta+F-D^2)}2.\sin^2\vartheta.$$

Dieser Werth von $\sin^2\xi$ ist derselbe, der, nach der 501. Nummer, sich auf diejenigen beiden zugeordneten Durchmesser bezieht, welche sich unter den kleinsten (und grössesten) Winkeln schneiden. Denn die letzte Gleichung geht in die Gleichung (26) der eben angezogenen Nummer über, wenn $B = D = 0$. Von allen zugeordneten Durchmessern schneiden die gleichen einander unter dem kleinsten Winkel.

Wenn wir annehmen, dass der Coordinaten-Winkel ein rechter ist, und wir die Grösse der beiden Axen bestimmen wollen, so gehen, indem wir $\vartheta = \xi = \frac{1}{2}\pi$ setzen, die Ausdrücke für z (20) in folgende über:

$$z = \tfrac{1}{2}((C-B^2)+(F-D^2))\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{([(C-B^2)-(F-D^2)]^2+4(E-BD)^2)}.$$

Wenn wir annehmen, dass der Anfangspunct der Coordinaten mit dem Mittelpuncte der Curve zusammenfalle, und demnach $B = D = 0$ setzen, so erhalten wir aus (16) zur Bestimmung der Quadrate der beiden Axen der Curve, folgende Gleichung:

$$z = \tfrac{1}{2}[C+2E\cos\vartheta+F]\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{[(C+2E\cos\vartheta+F)^2+4(E^2-CF)]},$$

und wenn wir überdiess noch die Annahme rechtwinkliger Coordinaten-Axen machen:

$$z = \tfrac{1}{2}(C+F)\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{[(C-F)^2+4E^2]}.$$

§ 3.

Allgemeinere Coordinaten-Bestimmung. Zweite Discussion aller einzelnen Fälle, welche die allgemeine Gleichung umfasst.

513. Wenn man in dem gewöhnlichen Systeme der Punct-Coordinaten y und x den Anfangspunct verlegt, ohne die Richtung der Axen zu ändern, so wachsen oder vermindern sich diese Coordinaten um eine constante Grösse. Wenn wir erstens, indem wir $\nu = 1$ setzen, jede der beiden Linien-Coordinaten v und u um eine constante Grösse

ändern, so erhalten wir aus den Gleichungen zwischen diesen Linien-Coordinaten andere Gleichungen desselben Grades und diese Umformung entspricht derjenigen Umformung der Gleichungen zwischen Punct-Coordinaten, die aus der blossen Verlegung des Anfangspunctes hervorgeht. Es tritt uns hier also die natürliche Frage entgegen, was die neuen veränderlichen Grössen bedeuten, die aus den ursprünglich gegebenen Coordinaten v und u sich ergeben, wenn wir diese um constante Grössen v' und u' wachsen oder sich vermindern lassen.

v, als Ordinate irgend einer geraden Linie QP, bedeutet den reciproken Werth Fig. 9.
des mit entgegengesetztem Zeichen genommenen, von dieser geraden Linie auf der ersten Axe bestimmten, Segmentes OP. Wir wollen die Ordinate v um eine gegebene Grösse v' verkleinern. Wenn wir diese gegebene Grösse, ähnlich wie v, als Ordinate construiren, so gehört dieselbe irgend einer geraden Linie Q'P' an, die in einem bestimmten Puncte, P', in die erste Axe einschneidet und es kommt:

$$v' = -\frac{1}{OP'}.$$

Es ist hiernach, wenn wir die neue veränderliche Grösse durch ϱ bezeichnen:

$$\varrho = v - v',$$

und also:

$$\varrho = -\left(\frac{1}{OP} - \frac{1}{OP'}\right) = \frac{OP - OP'}{OP.OP'} = \frac{P'P}{OP.OP'}.$$

Bei einer analogen Bezeichnung erhält man:

$$u = n - n' = \frac{Q'Q}{OQ.OQ'}.$$

Wenn v' und n' ihr Zeichen ändern, so rücken die beiden Puncte P' und Q' auf die negative Seite der x und y.

Wir sehen hieraus, dass, wenn wir statt v und u die neuen veränderlichen Grössen und Coordinaten, ϱ und σ, durch folgende Gleichungen einführen:

$$v = \varrho + v', \qquad n = u + n',$$

diese neuen Coordinaten die reciproken Werthe der vierten Proportionalen zu den auf den beiden Coordinaten-Axen zwischen der beliebigen geraden Linie (v, n) und der geraden Linie (v', n') und den auf diesen Axen zwischen jeder der beiden eben bezeichneten geraden Linien und dem Anfangspuncte liegenden Segmente bedeuten. Wir können die bisherige Bestimmung der Linien-Coordinaten als einen besondern Fall dieser neuen Coordinaten-Bestimmung betrachten; denn wir kommen auf jene zurück, wenn wir die gerade Linie (v', u') sich unendlich weit vom Anfangspuncte entfernen lassen. Die neue Coordinaten-Bestimmung wird illusorisch, wenn v' und u' unendlich werden und also die gerade Linie (v', u') durch den Anfangspunct geht. Für jede durch den Durchschnitt dieser Linie mit der ersten und zweiten Axe gehende gerade Linie sind ϱ und σ gleich Null, für diese Linie selbst ist ϱ sowol als σ gleich Null. Je nachdem eine gerade Linie in Beziehung auf die Durchschnittspuncte P' und Q' nach der positiven oder negativen Seite der x und y einschneidet, sind ϱ und σ positiv oder negativ. Für jede durch den Anfangspunct gehende gerade Linie sind ϱ und σ beide unendlich, aber:

$$\frac{\varrho}{\sigma} = \frac{PP'}{OP.OP'} : \frac{QQ'}{OQ.OQ'} = \frac{1}{OP} : \frac{1}{OQ} = \frac{v}{u}.$$

514. Wir können zweitens auch, indem wir n = 1 setzen, die Linien-Coordinaten Fig. 9.
w und v um constante Grössen w' und v' sich ändern lassen. Wenn wir wiederum diese

Grössen als Coordinaten irgend einer geraden Linie P'Q' betrachten, so erhalten wir:

$$w' = -OQ', \qquad v' = \frac{OQ'}{OP'}.$$

Beziehen wir ferner w und v auf irgend eine beliebige gerade Linie PQ, so ist

$$w = -OQ, \qquad v = \frac{OQ}{OP},$$

und wenn wir

$$w - w' = \varpi, \qquad v - v' = \varrho,$$

setzen, so kommt:

$$\varpi = -Q'Q,$$

$$\varrho = \frac{OQ}{OP} - \frac{OQ'}{OP'} = \frac{OQ.OP' - OQ'.OP}{OP.OP'} = \frac{Q'Q}{MN},$$

indem wir die Abscisse des Durchschnittspunctes der beiden geraden Linien PQ und P'Q', für welche sich sogleich folgender Werth ergibt:

$$\frac{OP.OP'(OQ - OQ')}{OQ.OP' - OQ'.OP},$$

durch MN bezeichnen.

Wir sehen hieraus, dass, wenn wir neue Linien-Coordinaten durch folgende beide Gleichungen:

$$w = \varpi + w', \qquad v = \varrho + v',$$

einführen, die erste dieser beiden Coordinaten, ϖ, das negativ genommene Segment bedeutet, das sich auf der zweiten Axe von ihrem Durchschnittspuncte mit der geraden Linie (w', v') bis zu ihrem Durchschnitte mit der geraden Linie (w, v) erstreckt. Die zweite neue Coordinate ϱ ist der Quotient der Abscisse des Durchschnittspunctes der beiden eben genannten geraden Linien in das, zwischen diesen beiden geraden Linien liegende, Segment der zweiten Axe. ϖ ist positiv oder negativ, je nachdem die bezügliche gerade Linie in Beziehung auf (w', v') in die zweite Axe nach der negativen oder positiven Seite der y einschneidet. ϱ ist positiv oder negativ, je nachdem das Segment Q'Q und die Abscisse MN gleiche oder entgegengesetzte Vorzeichen haben; oder, was für den Fall rechtwinkliger Axen dasselbe heisst, je nachdem

$$tang QPX < tang Q'P'X, \text{ oder } tang QPX < tang Q'P'X.$$

Für die gerade Linie P'Q' sind ϖ und ϱ beide gleich Null. Für irgend eine gerade Linie, die mit P'Q' parallel ist, ist $\varrho = 0$. Für irgend eine der zweiten Axe parallele gerade Linie, MR, sind ϖ und ϱ beide unendlich, aber es ist:

$$\frac{\varpi}{\varrho} = -MN.$$

Wenn die gerade Linie P'Q' oder (w', v') der ersten Axe parallel ist, so haben ϱ und v dieselbe geometrische Bedeutung; wir kommen ganz auf die ursprüngliche Coordinaten-Bestimmung zurück, wenn wir diese gerade Linie mit der ersten Axe zusammenfallen lassen. Wenn die gerade Linie P'Q' der zweiten Axe parallel ist, so wird die neue Coordinaten-Bestimmung illusorisch. Wenn diese gerade Linie durch den Anfangspunct geht, so haben ϖ und w dieselbe Bedeutung und den Werth von ϱ können wir wie oben construiren. Für parallele gerade Linien hat ϱ dieselben Werthe.

5t5. Wir wollen, indem wir n gleich Eins setzen, von der allgemeinen Gleichung:

$$Aw^2 + 2Bvw + Cv^2 + 2Dw + 2Ev + F = 0, \qquad (1)$$

ausgehen. Diese Gleichung verwandelt sich, wenn wir

$$w = t+w', \qquad v = s+v',$$

setzen, in folgende:

$$At^2+2Bst+Cs^2+2(Aw'+Bv'+D)t+2(Bw'+Cv'+E)s$$
$$+Aw'^2+2Bv'w'+Cv'^2+2Dw'+2Ev'+F = 0. \qquad (2)$$

Da wir über die beiden constanten Grössen w' und v' vorläufig durchaus keine nähere Bestimmung gemacht haben, so können wir dieselben nun so annehmen, dass die Form der letzten Gleichung sich vereinfacht. Setzen wir demnach:

$$\begin{aligned} Aw'+Bv'+D &= 0, \\ Bw'+Cv'+E &= 0, \end{aligned} \qquad (3)$$

so erhalten wir für w' und v' folgende Werthe:

$$v' = \frac{BD-AE}{AC-B^2}, \qquad w' = \frac{BE-CD}{AC-B^2}. \qquad (4)$$

Diese Coordinaten-Werthe werden nur dann unendlich oder unbestimmt, wenn

$$AC-B^2 = 0;$$

abstrahiren wir also von diesem besondern Falle, so können wir der Gleichung (2) jedesmal, und nur auf eine einzige, Weise folgende Form geben:

$$At^2+2Bst+Cs^2+F' = 0, \qquad (5)$$

indem wir, der Kürze halber,

$$Aw'^2+2Bv'w'+Cv'^2+2Dw'+2Ev'+F = F' \qquad (6)$$

setzen. Wenn wir die erste der beiden Gleichungen (3) mit w', die zweite derselben mit v' multipliciren und dann ihre Summe von der Gleichung (6) abziehen, so kommt:

$$Dw'+Ev'+F = F',$$

mithin, wenn wir für w' und v' ihre Werthe substituiren:

$$\frac{(AC-B^2)F-CD^2+2BDE-AE^2}{AC-B^2} = F';$$

oder auch, wie man leicht sieht:

$$-\frac{(AE-BD)^2-(AC-B^2)(AF-D^2)}{A(AC-B^2)} = F',$$
$$-\frac{(BE-CD)^2-(AC-B^2)(CF-E^2)}{C(AC-B^2)} = F'.$$

516. Die Gleichung:

$$t = \varkappa s, \qquad (7)$$

stellt, wenn wir durch $\varkappa$ irgend eine constante Grösse bezeichnen, einen Punct dar, und dieser Punct liegt, da in dieser Gleichung t und s zugleich verschwinden, auf der geraden Linie (w', v'). $\varkappa$ bedeutet, was sogleich aus der 514. Nummer folgt, die mit entgegengesetztem Zeichen genommene Abscisse dieses Punctes. Eliminiren wir aus dieser Gleichung und der Gleichung (5) die Werthe für t und s, d. h. für die Coordinaten der durch den Punct (7) gehenden Tangenten der gegebenen Curve zweiter Classe, so kommt:

$$s = \pm\left(\frac{-F'}{A\varkappa^2+2B\varkappa+C}\right)^{1/2}, \qquad t = \pm\left(\frac{-F'\varkappa^2}{A\varkappa^2+2B\varkappa+C}\right)^{1/2}. \qquad (8)$$

Wir erhalten also, sowol für t als für s, gleiche und entgegengesetzte Werthe. Wenn wir also von irgend einem Puncte der geraden Linie (w', v') an die gegebene Curve zwei Tangenten legen, so wird das von diesen beiden Tangenten auf der zweiten Axe interceptirte Stück von jener geraden Linie (w', v') halbirt: diese Linie, die beiden Tangenten und eine, durch ihren gemeinschaftlichen Durchschnittspunct gehende, der

zweiten Axe parallele, gerade Linie, bilden also ein System von vier Harmonicalen. Setzen wir $x = \infty$, so kommt:

$$s = \pm 0, \qquad t = \pm\left(-\frac{F'}{A}\right)^{1/2}.$$

Die beiden, der geraden Linie (w', v') parallelen, Tangenten der gegebenen Curve liegen also zu beiden Seiten dieser Linie und gleich weit von ihr entfernt. (Der letzte Werth für t ist gleich demjenigen halben Durchmesser der gegebenen Curve, welcher der zweiten Axe parallel ist). Setzen wir $x = 0$, so kommt:

$$s = \pm\left(-\frac{F'}{C}\right)^{1/2}, \qquad t = \pm 0.$$

Bestimmen wir x so, dass

$$Ax^2 + 2Bx + C = 0, \qquad (9)$$

so kommt:

$$s = \pm\infty; \qquad t = \pm\infty.$$

Für jeden der beiden so bestimmten Werthe für x erhalten wir also zwei, der zweiten Axe parallele, und zusammenfallende Tangenten: es sind diese Werthe für x die Abscissen derjenigen beiden Puncte, in welchen die gerade Linie (w', v') der Curve begegnet und die Tangenten in diesen beiden Puncten sind der zweiten Axe parallel. Alle diese Bemerkungen führen dahin, dass die gerade Linie (w', v') derjenige Durchmesser der gegebenen Curve ist, dessen zugeordneter der zweiten Axe parallel ist.

Wir sehen auf den ersten Blick, wie sich an das Vorstehende eine vollständige Bestimmung der durch die gegebene Gleichung dargestellten Curve bequem anschliesst. In dem Folgenden wollen wir indess uns bloss darauf beschränken, die Discussion der verschiedenen Fälle, welche die allgemeine Gleichung des zweiten Grades zwischen w und v umfasst, kurz anzudeuten, und zeigen, wie wir auch auf diesem andern Wege zu den Resultaten der 456. — 467. Nummer gelangen können.

517. Wenn wir erstens annehmen, dass

$$AC - B^2 < 0, \qquad (10)$$

so hat die Gleichung (9) reelle Wurzeln, die wir x' und x'' nennen wollen und die gerade Linie (w', v') begegnet also der Curve wirklich in zwei Puncten, deren Abscissen jene beiden Wurzeln sind. Für gewisse Werthe von x erhält man also reelle, für andere Werthe von x imaginäre Tangenten. Wir können dem Ausdrucke unter dem Wurzelzeichen in dem Werthe für s folgende Form geben:

$$\frac{-F'}{A(x-x')(x-x'')},$$

und dieser Ausdruck muss positiv sein, wenn die bezüglichen Tangenten reell sein sollen.

Wenn:

$$\frac{F'}{A} < 0 \text{ oder } \frac{F'}{A} > 0,$$

so ergibt sich, wenn wir für F' seinen Werth substituiren und auf die Bedingung (10) Rücksicht nehmen:

$$(AE - BD)^2 - (AC - B^2)(AF - D^2) < 0 \qquad (11)$$

oder:

$$(AE - BD)^2 - (AE - B^2)(AF - D^2) > 0. \qquad (12)$$

Wenn also die Bedingung (11) neben der Bedingung (10) besteht, so erhalten wir nur dann reelle Tangenten, wenn wir für x einen solchen Werth annehmen, der nicht

zwischen x' und x'' fällt. Es kann dieser Werth bis $\pm\infty$ wachsen und abnehmen. Die durch die allgemeine Gleichung (1) dargestellte Curve liegt in diesem Falle ganz innerhalb der beiden der zweiten Axe parallelen Tangenten, ist eine geschlossene Curve und heisst Ellipse.

Wenn hingegen die Bedingung (12) zugleich mit der Bedingung (10) besteht, so entsprechen nur solchen Werthen von x reelle Tangenten, die zwischen x' und x'' fallen. Es gibt alsdann einen grössten negativen Werth für den Ausdruck:

$$(x-x')(x-x''). \qquad (13)$$

Bekanntlich erhalten wir diesen, wenn wir

$$x = \frac{x'+x''}{2}$$

setzen und also der durch (7) dargestellte Punct die Mitte des von der Curve auf der geraden Linie (w', v') interceptirten Segmentes (der Mittelpunct der Curve) ist. Es ergibt sich für die Abscisse dieser Mitte aus (9):

$$-\frac{x'+x''}{2} = \frac{B}{A}.$$

Dem auf diese Weise bestimmten *maximum* entspricht ein kleinster positiver und negativer Werth von s. Wenn wir also von einem derjenigen beiden Puncte der geraden Linie (w', v'), auf welche x' und x'' sich beziehen, die auf der Curve liegen und in denen die Tangenten der zweiten Axe parallel sind, zu Puncten übergehen, welche zwischen denselben liegen, so nähert sich die Richtung der durch solche Puncte gehenden Tangenten immer mehr der Richtung der geraden Linie (w', v'), bis wir zu jenem Puncte kommen, der in der Mitte der beiden eben bezeichneten liegt. Die beiden Tangenten, die dieser Gränze entsprechen, heissen Asymptoten. Denken wir uns nun die Puncte der Curve als die Durchschnitte der stetig auf einander folgenden Tangenten, so ist offenbar, dass diese Curve aus zwei Zweigen besteht, die ganz auf den beiden äussern Seiten der, der zweiten Axe parallelen, Tangenten liegen. Die Puncte dieser beiden Zweige liegen immer weiter von diesen Tangenten entfernt, je mehr sich die ihnen entsprechenden Tangenten den Asymptoten nähern. Die Berührungspuncte auf den Asymptoten liegen unendlich weit, oder wenn man sich so ausdrücken will, jede Asymptote schneidet die beiden Zweige in zwei, nach entgegengesetzter Seite hin, unendlich weit entfernt liegenden Puncten und solche Puncte sind als zusammenfallend zu betrachten; sie bildet den Uebergang von den Tangenten, die einen Zweig berühren, zu den Tangenten, die den andern Zweig berühren.

Die Curve, welche in dem in Rede stehenden Fall durch die allgemeine Gleichung (1) dargestellt wird, heisst Hyperbel, und liegt in denjenigen beiden von den Asymptoten gebildeten Scheitelwinkeln, in denen derjenige Durchmesser nicht liegt, welcher der zweiten Axe parallel ist.

518. Wenn $A = 0$, so reduciren sich die Gleichungen (8) auf folgende:

$$s = \pm\left(\frac{-F'}{2Bx+C}\right)^{1/2} \qquad t = \pm\left(\frac{-Fx^2}{2Bx+C}\right)^{1/2}.$$

Nehmen wir in der ersten dieser beiden Gleichungen:

$$x = -\frac{C}{2B} = x',$$

so erhalten wir:

$$s = \pm\infty.$$

Die gerade Linie (w', v') begegnet der Curve nur in dem einzigen Puncte, dessen Abscisse gleich ist ($-x'$) und nur in diesem Puncte ist die Tangente der zweiten Axe parallel. Nehmen wir $x = \infty$, so kommt:

$$s = \pm 0, \qquad t = \pm\infty.$$

Die Curve erstreckt sich also zu beiden Seiten der geraden Linie (w', v') ins Unendliche. Dem allgemeinen Ausdrucke für s können wir folgende Form geben:

$$s = \pm\left(\frac{-F'}{B(x-x')}\right)^{1/2}.$$

Der Werth für F' reducirt sich in vorliegendem Falle auf:

$$\frac{FB^2-2BDE+CD^2}{B^2}.$$

Nehmen wir daher an, was immer erlaubt ist, B sei positiv, so ist $\left(-\frac{F'}{B}\right)$ positiv oder negativ, je nachdem:

$$FB^2-2BDE+CD^2 < 0, \qquad (14)$$

oder:

$$FB^2-2BDE+CD^2 > 0. \qquad (15)$$

Wenn die Bedingung (t4) erfüllt wird, so ist also der Werth von s reell, wenn wir:

$$x > x'$$

nehmen, und imaginär im entgegengesetzten Falle; d. h. alle reelle Tangenten schneiden in Beziehung auf die der zweiten Axe parallele Tangente nach der positiven Seite der x in die gerade Linie (w', v') ein. Die Curve liegt also ganz nach der negativen Seite und erstreckt sich nach dieser Seite hin ins Unendliche. Wenn statt der Bedingung (t4) die Bedingung (t5) befriedigt wird, erhalten wir gerade die umgekehrten Beziehungen.

Die durch die allgemeine Gleichung (t), in dem Falle, dass A = 0 ist, dargestellte Curve heisst Parabel.

519. Wenn wir zweitens annehmen, dass

$$AC-B^2 > 0, \qquad (16)$$

so sind die beiden Wurzeln der Gleichung (9) imaginär und das Zeichen des ersten Theiles dieser Gleichung stimmt immer mit dem Zeichen des Werthes von A überein, wie wir auch x annehmen mögen. Je nachdem

$$\frac{F'}{A} > 0 \text{ oder } \frac{F'}{A} < 0$$

sind die Werthe für s und t immer imaginär oder immer reell. In dem ersten dieser beiden Fälle erhalten wir, wenn wir auf die Bedingung (t6) Rücksicht nehmen:

$$(AE-BD)^2-(AC-B^2)(AF-D^2) > 0, \qquad (17)$$

in dem zweiten Falle:

$$(AE-BD)^2-(AC-B^2)(AF-D^2) < 0. \qquad (18)$$

Wenn also die beiden Bedingungen (t6) und (t7) befriedigt werden, so lassen sich von keinem Puncte der geraden Linie (w', v') reelle Tangenten an die durch die allgemeine Gleichung (t) dargestellte Curve legen. Diese Curve hat überhaupt keine Tangenten und ist imaginär.

Wenn hingegen den beiden Bedingungen (t6) und (18) Genüge geschieht, so lassen sich von jedem Puncte der geraden Linie (w', v') zwei reelle Tangenten an die gegebene Curve legen. Die Werthe von s und t können durch keine Annahme für x unendlich werden, er gibt also keine der zweiten Axe parallele Tangenten. Es findet aber ein

Digitized by Google

maximum für den Werth von s Statt, dem ein *minimum* des Ausdruckes

$$\left(x^2+2\frac{B}{A}x+\frac{C}{A}\right)$$

entspricht. Wir erhalten dieses *minimum* bekanntlich, indem wir

$$x = -\frac{B}{A},$$

also gleich der halben Summe der (imaginären) Wurzeln der Gleichung (9) setzen. Wenn wir uns von dem durch diesen Werth von x bestimmten Puncte, auf der geraden Linie (w', v'), nach beiden Seiten hin entfernen, so erhalten wir solche Paare von Tangenten, deren Richtung sich der Richtung dieser geraden Linie immer mehr nähert, bis wir endlich diejenigen beiden Tangenten erhalten, die mit ihr parallel sind und für welche sich, indem wir $x = \infty$ setzen:

$$s = \pm 0, \qquad t = \pm\sqrt{\left(-\frac{F}{A}\right)},$$

ergibt. Indem man auf diese Weise die Richtung der Tangenten, welche in den verschiedenen Puncten der geraden Linie (w', v') einschneiden, verfolgt, überzeugt man sich leicht, dass die durch die allgemeine Gleichung dargestellte Curve zwei Asymptoten hat, wodurch eine Gränze für die Richtung ihrer Tangenten bezeichnet wird. Die Curve ist eine Hyperbel und liegt in denjenigen von den beiden Asymptoten gebildeten Scheitelwinkeln, in welchen auch der, der zweiten Axe parallele, Durchmesser derselben fällt.

520. Wir haben bis jetzt denjenigen Fall unberücksichtigt gelassen, dass F' verschwindet und also:

$$(AE-BD)^2-(AC-B^2)(AF-D^2) = 0.$$

Alsdann bestehen die drei Gleichungen:

$$Aw+Bv+D = 0,$$
$$Bw+Cv+E = 0,$$
$$Dw+Ev+F = 0,$$

zugleich und mithin liegt auch der durch die dritte dieser Gleichungen dargestellte Punct auf der geraden Linie (w', v'), welche die durch die beiden ersten Gleichungen dargestellten Puncte enthält. In diesem Falle nimmt die umgeformte Gleichung (5) folgende Form an:

$$At^2+2Bst+Cs^2 = 0, \qquad (19)$$

und stellt mithin ein System von zwei Puncten dar, die auf der geraden Linie (w', v') liegen. Diese beiden Puncte sind reell oder imaginär, je nachdem

$$AC-B^2 < 0,$$

oder:

$$AC-B^2 > 0,$$

Wenn insbesondere $A = 0$, so verwandelt sich die Gleichung (19) in

$$s(2Bt+Cs) = 0,$$

und diese Gleichung stellt, wie man leicht sieht, zwei solche Puncte dar, von welchen der eine unendlich weit entfernt liegt.

Wir erhalten die Gleichung der beiden durch (19) dargestellten Puncte in w und v, wenn wir von den neuen Coordinaten t und s zu den ursprünglichen vermittelst der Gleichungen:

$$t = w-w', \qquad s = v-v',$$

zurückgehen und für w' und v' ihre Werthe (4) substituiren.

Digitized by Google

521. In dem Falle, dass die allgemeine Gleichung des zweiten Grades zwischen w und v ein System von zwei reellen Puncten darstellt, können wir uns auch des Ausdruckes bedienen, es stelle diese Gleichung eine solche Ellipse dar, die aus irgend einer gegebenen Ellipse entstanden ist, indem eine Axe derselben unverändert geblieben, die andere aber bis zum Verschwinden abgenommen hat, so dass die beiden Hälften, in welche die Ellipse durch die erstgenannte Axe getheilt wird, in dieser Axe zusammenfallen und als eine, nach beiden Seiten hin, begränzte gerade Linie erscheinen. Jede beliebige durch einen der beiden Endpuncte derselben gehende gerade Linie ist als Tangente zu betrachten.

Man kann aber auch mit gleichem Rechte sagen, dass in dem vorliegenden Falle die allgemeine Gleichung eine Hyperbel darstelle, deren imaginäre Axe bis zum Verschwinden abgenommen hat, so dass dieselbe als eine, nach beiden Seiten hin, unbegränzte, in der Mitte aber unterbrochene gerade Linie erscheint. Als Tangente ist jede beliebige gerade Linie zu betrachten, welche durch einen derjenigen beiden Puncte geht, in welchen jene gerade Linie, nach der Mitte hin, begränzt wird.

Es erscheinen also hier, indem wir Linien-Coordinaten zu Grunde legen, eine Ellipse und eine Hyperbel, die eine Axe gemeinschaftlich haben, und deren andere Axe bis zum Verschwinden abgenommen hat, oder, mit andern Worten, eine begränzte gerade Linie, und die Verlängerungen derselben, nach beiden Seiten, ins Unendliche hin, in analytischer Hinsicht als identisch unter sich und mit einem Systeme von zwei Puncten. Ein solches System von zwei Puncten bildet den Uebergang von Ellipsen zu Hyperbeln; die zweite reelle Axe der Ellipse geht, indem sie, oder vielmehr ihr Quadrat, durch Null geht, in die imaginäre zweite Axe der Hyperbel über.

Wenn wir die reelle Axe einer gegebenen Hyperbel immer mehr abnehmen lassen, während die imaginäre Axe unverändert bleibt, so nähert sich die Hyperbel immer mehr einer geraden Linie, und geht in diese Linie selbst über, wenn die reelle Axe gleich Null wird. Diese gerade Linie ist, in analytischer Hinsicht, als identisch zu betrachten mit einem Systeme zweier imaginärer Puncte (453) und bildet den Uebergang von einer Hyperbel zu einer imaginären Curve, wobei die reelle Axe der erstern, indem ihr Quadrat durch Null geht, imaginär wird.

Wenn der Brennpunct einer gegebenen Parabel dem Scheitel derselben sich immer mehr nähert, so nähert sich die Curve immer mehr ihrer Axe. Diese Axe, mithin eine, nach einer Seite hin, begränzte, nach der andern Seite hin, aber unbegränzte gerade Linie, die mit dem Systeme zweier Puncte, von welchen der eine nach der Richtung der Axe unendlich weit liegt und der andere der Scheitel derselben ist, in analytischer Hinsicht als identisch zu betrachten ist, bildet die Gränze und den Uebergang zu solchen Parabeln, die sich nach entgegengesetzter Seite hin öffnen.

522. Es bleiben uns jetzt noch diejenigen Fälle zu betrachten übrig, in welchen

$$AC-B^2 = 0, \qquad (20)$$

und also, da die gerade Linie (w', v') im Allgemeinen der zweiten Axe parallel wird, die bisherige Coordinaten-Umformung nicht mehr Statt finden kann. Setzen wir in diesen Fällen:

$$Aw'+Bv'+D = 0, \qquad (21)$$

$$Bw'+Cv'+E = E', \qquad (22)$$

so fallen, wenn wir die erste dieser beiden Gleichungen, nachdem wir sie zuvor mit

$\frac{B}{A}$ multiplicirt haben, von der zweiten abziehen, w' und v', beide zugleich aus der resultirenden Gleichung aus und wir erhalten:

$$E' = \frac{AE-BD}{A}.$$

Setzen wir überdiess:

$$Aw'^2+2Bv'w'+Cv'^2+2Dw'+2Ev'+F = 0, \qquad (23)$$

so geht die umgeformte Gleichung (2) in folgende über:

$$At^2+2Bst+Cs^2+2E's = 0, \qquad (24)$$

und dieser Gleichung können wir, mit Berücksichtigung der Bedingungs-Gleichung (20), folgende Form geben:

$$(At+Bs)^2+2AE's = 0.$$

Diese Gleichung zeigt uns, dass wir, um reelle Tangenten der durch die gegebene Gleichung (1) dargestellten Curve zu erhalten, s negativ nehmen müssen, wenn

$$AE' = AE-BD > 0, \qquad (25)$$

und positiv, wenn

$$AE-BD < 0. \qquad (26)$$

In beiden Fällen sind:

$$s = \infty, \qquad s = 0,$$

Gränzwerthe für die Richtung der reellen Tangenten. Der erste dieser beiden Werthe zeigt, dass die zweite Axe einer Asymptote der Curve parallel ist. Der zweite dieser Werthe bezieht sich auf die Richtung der geraden Linie (w', v'). Diese Linie ist die andere Asymptote selbst; denn sie ist eine Tangente der Curve, was daraus hervorgeht, dass, wenn s und t zugleich verschwinden, die Gleichung (24) befriedigt wird. Zugleich sehen wir, dass diese gerade Linie durch den Mittelpunct der Curve geht, denn, wenn wir in der eben angezogenen Gleichung s = 0 setzen, kommt

$$\frac{t}{s} = -\frac{B}{A}.$$

Um die Lage dieser Asymptote in Beziehung auf die Coordinaten-Axe zu bestimmen, müssen wir w' und v' zwischen den beiden Gleichungen (21) und (23) eliminiren. Der zweiten dieser beiden Gleichungen können wir, mit Berücksichtigung von (21) und (22), folgende Form geben:

$$E'v'+Dw'+Ev'+F = 0,$$

oder, indem wir für E' seinen Werth substituiren:

$$ADw'+(2AE-BD)v'+AF = 0,$$

und wenn wir zwischen dieser Gleichung und der Gleichung (21) die Werthe für w' und v' eliminiren, erhalten wir sogleich:

$$v' = \tfrac{1}{2}\frac{D^2-AF}{AE-BD},$$

$$w' = \tfrac{1}{2}\frac{ABF-2AED+BD^2}{A(AE-BD)}.$$

Wenn die Gleichung (20) befriedigt wird, so ist aus dem Vorstehenden klar, dass die durch die allgemeine Gleichung (1) dargestellte Curve eine Hyperbel ist, deren eine Asymptote der zweiten Axe parallel ist. Je nachdem überdiess die Bedingung (25) oder (26) erfüllt wird, erstreckt sich ein Zweig der Hyperbel nach der positiven Seite der y und der negativen Seite der x und der andere Zweig nach der negativen Seite der y und der positiven Seite der x, oder ein Zweig erstreckt sich nach der positiven Seite der y und der x und der andere Zweig nach der negativen Seite der y und der x.

Digitized by Google

Diese letzte Bemerkung folgt unmittelbar daraus, dass für alle Tangenten der gegebenen Curve in dem ersten Falle s negativ und im zweiten Falle positiv ist (514).

523. Wenn endlich die beiden Gleichungen

$$Aw'+Bv'+D = 0, \qquad Bw'+Cv'+E = 0, \tag{27}$$

identisch sind, so erhalten wir neben der Bedingungs-Gleichung:

$$AC-B^2 = 0,$$

auch noch folgende beide Gleichungen:

$$AE-BD = 0, \qquad BE-CD = 0.$$

(Von diesen drei Gleichungen bedingen je zwei die dritte). In diesem Falle erscheinen die Werthe für w' und v' (4) unter der unbestimmten Form $\frac{0}{0}$. Indem wir die gerade Linie (w', v') beliebig durch denjenigen Punct legen, der durch die Gleichungen (27) dargestellt wird, wenn wir in diesen Gleichungen w' und v' als veränderlich betrachten, können wir der allgemeinen Gleichung auf unendlichfache Weise die Form:

$$A't^2+2Bst+Cs^2+F' = 0,$$

oder:

$$(At+Bs)^2+F' = 0, \tag{28}$$

geben. Es ist:

$$F' = Dw'+Ev'+F = \frac{AF-D^2}{A}.$$

Die Gleichung (28) stellt ein System von zwei solchen Puncten dar, die, wie man leicht einsieht, zu beiden Seiten der geraden Linie (w', v') und gleich weit von derselben entfernt, auf einer der zweiten Axe parallelen geraden Linie liegen. Diese Puncte sind reell, imaginär oder fallen zusammen, je nachdem:

$$AF-D^2 < 0, \qquad AF-D^2 > 0, \qquad AF-D^2 = 0.$$

Im letzten Falle ist noch folgende Gleichung:

$$Dw'+Ev'+F = 0,$$

mit den beiden Gleichungen (27) identisch. —

§ 4.

Geometrische Bedeutung der Constanten in der allgemeinen Gleichung der Oerter zweiter Classe.

524. Wir wollen wieder, wie früher, folgende Gleichung:

$$Aw^2+2Bvw+Cv^2+2Duw+2Euv+Fu^2 = 0,$$

als die allgemeine Gleichung der Oerter zweiter Classe betrachten, und dieser Gleichung folgende Form geben:

$$Aw^2+2(Bv+Du)w+Cv^2+2Euv+Fu^2 = 0.$$

Alsdann ist sogleich ersichtlich, dass, wenn wir u = 1 setzen, für v irgend einen bestimmten Werth v' substituiren, und die entsprechenden Werthe von w durch w' und w_1 bezeichnen, für irgend zwei parallele Tangenten folgende Gleichung sich ergibt:

$$\frac{w'+w_1}{2} = -\frac{Bv'+D}{A}.$$

$\frac{w'+w_1}{2}$ und v' sind die Coordinaten einer geraden Linie, welche den beiden Tangenten

Digitized by Google

parallel ist und von beiden gleich weit absteht. Betrachten wir diese Coordinaten als veränderliche Grössen, so stellt die letzte Gleichung denjenigen geometrischen Ort dar, der von allen solchen geraden Linien, die wir für beliebige Paare paralleler Tangenten erhalten, umhüllt wird. Die letzte Gleichung geht, wenn wir w und v an die Stelle von $\frac{w'+w}{2}$ und v' schreiben, in folgende über:

$$Aw+Bv+D = 0.$$

Da diese Gleichung vom ersten Grade ist, gehen alle jene geraden Linien durch ein und denselben Punct: den Mittelpunct der Curve. Die Coordinaten dieses Mittelpunctes, den wir durch (y', x') bezeichnen wollen, sind folgende:

$$x' = \frac{B}{A}, \qquad y' = \frac{D}{A}.$$

525. Wenn wir der allgemeinen Gleichung folgende Form geben:

$$Cv^2+2(Bw+Eu)v+Aw^2+2Duw+Fu^2 = 0,$$

u gleich Eins setzen, für w irgend einen Werth w' substituiren und die entsprechenden Werthe von v durch v' und $v_,$ bezeichnen, so kommt ähnlich wie eben:

$$\frac{v'+v_,}{2} = -\frac{Bw'+E}{C}.$$

v' und $v_,$ beziehen sich auf zwei durch denselben Punct der zweiten Axe gehende Tangenten der durch die allgemeine Gleichung dargestellten Curve, und $\frac{v'+v_,}{2}$, wie man leicht einsieht, auf eine gerade Linie, die zu jenen beiden Tangenten und der zweiten Axe als vierte Harmonicale gehört. Die letzte Gleichung zeigt, dass alle solche gerade Linien durch denselben Punct gehen, wie wir auch w' annehmen mögen. Dieser Punct heisst der Pol der zweiten Axe und für die Gleichung desselben erhalten wir

$$Bw+Cv+E = 0.$$

Die Coordinaten dieses Punctes, den wir durch (y'', x'') bezeichnen wollen, sind also:

$$x'' = \frac{C}{B}, \qquad y'' = \frac{E}{B}.$$

Wenn wir der allgemeinen Gleichung folgende Form geben:

$$Fu^2+2(Dw+Ev)u+Aw^2+2Bvw+Cv^2 = 0,$$

und v gleich Eins setzen, so gibt eine ganz analoge Schlussweise:

$$Dw+E+Fu = 0$$

für die Gleichung des Poles der ersten Axe. Bezeichnen wir daher diesen Punct durch (y''', x'''), so kommt:

$$x''' = \frac{E}{D}, \qquad y''' = \frac{F}{D}.$$

Aus der Definition des Poles der zweiten Axe oder, überhaupt, jeder beliebigen geraden Linie, folgt unmittelbar, dass, wenn dieselbe die Curve zweiter Classe in zwei Puncten schneidet, der Pol auf der Tangente in jedem dieser beiden Puncte und also im Durchschnitte dieser beiden Tangenten liegt. *)

*) 1. Die Entwicklungen der beiden letzten Nummern des Textes lassen sich auf beliebige Curven jeder beliebigen Classe, das heisst, auf alle beliebigen algebraischen Curven, ausdehnen. Der allgemeinen Gleichung der Curven irgend einer n. Classe können wir folgende Form geben:

$$Aw^n+nw^{n-1}(Bv+C)+n(n-1)w^{n-2}(Dv^2+Ev+F)+\ldots = 0. \qquad (a)$$

526. Wenn die allgemeine Gleichung, statt eine Curve, ein System von zwei Puncten darstellt, so können wir immer noch von dem Pole einer beliebigen geraden Linie sprechen. Durch diesen Pol gehen alsdann alle solchen geraden Linien, welche zu der gegebenen geraden Linie und denjenigen beiden, die einen beliebigen Punct derselben mit den bei-

---

Wenn wir für v irgend einen Werth v' beliebig annehmen, so erhalten wir, im Allgemeinen, n verschiedene und endliche Werthe für w, die wir durch w_1, w_2, w_3, . . w_n bezeichnen wollen, und die sich auf solche n verschiedene, unter einander parallele, Tangenten der gegebenen Curve beziehen, deren Richtung durch die obige Annahme des Werthes von v bestimmt ist. Aus der allgemeinen Theorie der quadratischen Gleichung folgt alsdann:

$$\frac{w_1+w_2+w_3+\ldots+w_n}{n} = -\frac{Bv+C}{A}. \qquad (b)$$

$\left(\frac{w_1+w_2+w_3+\ldots+w_n}{n}\right)$ und v' sind Coordinaten derjenigen geraden Linie, die mit den in Rede stehenden n parallelen Tangenten parallel ist und für welche die Ordinate des Durchschnittspunctes mit der zweiten Coordinaten-Axe das arithmetische Mittel aus den Ordinaten der entsprechenden Durchschnittspuncte jener n parallelen Tangenten ist. Es bezeichnet diese gerade Linie, um uns kurz auszudrücken, die Richtung der Mittelkraft aus n gleichen Kräften, welche nach jenen n parallelen Tangenten wirken.

Für jeden Ordinaten-Werth v' erhalten wir einen entsprechenden Werth für $\left(\frac{w_1+w_2+w_3+\ldots+w_n}{n}\right)$; betrachten wir beide Grössen als veränderlich und schreiben w an die Stelle der letztern, so verwandelt sich die Gleichung (b) in folgende:

$$Aw+Bv+C = 0, \qquad (c)$$

und stellt also einen Punct dar. Auf diese Weise ergibt sich folgender Satz:

Wenn nach allen einer beliebigen geraden Linie parallelen Tangenten irgend einer gegebenen algebraischen Curve beliebige, unter einander gleiche, Kräfte wirken, so geht die Mittelkraft aus allen diesen Kräften beständig durch einen festen Punct, wie sich die Richtung der parallelen Tangenten auch ändern mag.

Wenn die allgemeine Gleichung (a) insbesondere ein System von n Puncten darstellt, so erhalten wir einen bekannten Satz der Statik.

Man könnte, und zwar, wie mir scheint, sehr passend, den Punct (c) den Mittelpunct der gegebenen Curve n. Classe nennen. Diese Definition des Mittelpunctes ist allgemeiner als die gewöhnliche, und nach derselben hat, im Allgemeinen, jede algebraische Curve einen Mittelpunct. Wenn dieser Punct zum Anfangspuncte genommen wird, und (a) die besügliche Curve darstellen soll, so erhält man:

$$B = 0, \qquad C = 0.$$

Der Mittelpunct liegt unendlich weit, und also auch eine derjenigen Tangenten, die einer beliebigen geraden Linie parallel sind, wenn

$$A = 0.$$

Die Curve hat in diesem Falle einen parabolischen Zweig. Der Mittelpunct wird unbestimmt, wenn die drei letzten Gleichungen zugleich befriedigt werden. Ich gehe in kein Detail hier ein; man sieht indess leicht, wie sich hier auf sehr natürliche Weise, die Discussion der allgemeinen Gleichung der Oerter irgend einer Classe ergibt.

Wenn wir die Gleichung irgend einer Curve n. Classe zwischen den drei Coordinaten w, v und u, der Kürze halber, durch

$$U = 0 \qquad (d)$$

darstellen, so ergibt sich für die Gleichung ihres Mittelpunctes:

$$\frac{d^nU}{dw^n}w+\frac{d^nU}{dw^{n-1}dv}v+\frac{d^nU}{dw^{n-1}du}u = 0.$$

II. Wenn wir der allgemeinen Gleichung der Curven n. Classe folgende Form geben:

$$Av^n+nv^{n-1}(Bw+C)+n(n-1)v^{n-2}(Dw^2+Ew+F)+\ldots = 0,$$

und diejenigen Werthe von v, die einem besondern Werthe von w, den wir durch w' unterscheiden wollen, entsprechen, durch v_1, v_2, v_3, . . . v_n bezeichnen, so ergibt sich

den Puncten des Systems verbinden, als vierte Harmonicalen gehören. Wir erkennen hieraus leicht, dass der Pol der gegebenen geraden Linie der vierte harmonische Theilungspunct zu den beiden Puncten des Systems und dem Durchschnittspuncte der geraden Linie, welche diese beiden Puncte verbindet, mit der gegebenen geraden Linie, ist.

---

sogleich:

$$\frac{v_1+v_2+v_3+\ldots v_n}{n} = -\frac{Bw'+C}{A}.$$

Die Ordinaten v_1, v_2, v_3, $\ldots v_n$ beziehen sich auf n verschiedene Tangenten der gegebenen Curve, welche durch denselben Punct der zweiten Axe gehen. $\left(\frac{v_1+v_2+v_3+\ldots v_n}{n}\right)$ und w' sind Coordinaten einer leicht zu construirenden geraden Linie, welche ebenfalls durch diesen Punct geht. Wenn man nemlich der zweiten Axe irgend eine beliebige gerade Linie parallel zieht, und den Schwerpunct gleicher Gewichte sucht, die man in dem Durchschnitte dieser Linie mit jenen n. Tangenten der gegebenen Curve sich angebracht denkt, so geht die in Rede stehende gerade Linie zugleich auch durch diesen Schwerpunct. Man kann auch, was man ohne Mühe einsieht, dieselbe gerade Linie als die Richtung der Mittelkraft aus solchen n Kräften betrachten, die nach den Richtungen der in dem durch w' bestimmten Puncte der zweiten Axe sich schneidenden n Tangenten wirken und die sich verhalten wie diejenigen Segmente dieser n Tangenten, welche zwischen ihrem gemeinschaftlichen Durchschnitte auf der zweiten Axe und einer beliebigen dieser Axe parallelen geraden Linie liegen. Dieselben Kräfte verhalten sich also, bei der Voraussetzung rechtwinkliger Coordinaten-Axen, umgekehrt wie die Sinus derjenigen Winkel, welche ihre Richtungen mit der zweiten Axe bilden.

Wenn wir w' als veränderlich betrachten und mithin nach einander von verschiedenen Puncten der zweiten Axe n Tangenten an die gegebene Curve legen, so ist auch $\left(\frac{v_1+v_2+v_3+\ldots v_n}{n}\right)$ veränderlich. Schreiben wir demnach an die Stelle von w' und an die Stelle des letzten Ausdruckes w und v, so verwandelt sich die letzte Gleichung in folgende:

$$Av+Bw+C = n, \qquad (e)$$

und stellt mithin einen Punct dar. Diesen Punct könnte man den Pol der zweiten Axe nennen. Da für diese Axe jede beliebige gerade Linie genommen werden kann, so ergibt sich der nachstehende Satz:

Wenn eine gerade Linie und irgend eine algebraische Curve gegeben sind und man zieht von irgend einem Puncte der geraden Linie alle möglichen Tangenten an die Curve und denkt sich nach den Richtungen dieser Tangenten Kräfte wirken, die sich umgekehrt verhalten wie die Sinus derjenigen Winkel, welche die Richtungen derselben mit der gegebenen geraden Linie bilden, so dreht sich, während der beliebige Punct auf der gegebenen geraden Linie fortrückt, die Richtung der Mittelkraft um einen festen Punct.

Wir können auch hier ein System von beliebig vielen Puncten an die Stelle der Curve setzen.

Wenn wir wiederum von der Gleichung (d) ausgehen, so erhalten wir für die Gleichung des Poles der zweiten Axe:

$$\frac{d^nU}{dv^n}v+\frac{d^nU}{dv^{n-1}dw}w+\frac{d^nU}{dv^{n-1}du}u = 0,$$

und hiernach für die Gleichung des Poles der ersten Axe:

$$\frac{d^nU}{du^n}u+\frac{d^nU}{du^{n-1}dw}w+\frac{d^nU}{du^{n-1}dv}v = 0.$$

III. In dem Systeme der Punct-Coordinaten erhalten wir Entwicklungen, die den vorstehenden ganz analog sind. Wenn wir erstens der allgemeinen Gleichung der Curven n. Ordnung folgende Form geben:

$$Ay^n+ny^{n-1}(Bx+Cs)+n(n-1)y^{n-2}(Dx^2+Exs+Fs^2)+\ldots = 0,$$

so ist sogleich ersichtlich, dass, wenn wir $s = 1$ setzen, jedem besondern Werthe von x, und wenn wir $x = 1$ setzen, jedem besondern Werthe von s im Allgemeinen n verschie-

Digitized by Google

527. Wenn wir $A = 1$ nehmen, so erhalten wir aus dem Vorstehenden folgende vollständige Constanten-Bestimmung vermittelst der Coordinaten des Mittelpunctes der gegebenen Curve und der Coordinaten der Pole der beiden Axen:

---

dene Werthe von y entsprechen, welche sich auf die Durchschnitte der Curve mit einer der zweiten Axe parallelen geraden Linie beziehen. Nach derselben Schlussweise als oben gelangen wir hier zu folgendem Satze:

Wenn irgend eine algebraische Curve gegeben ist, und man bewegt in der Ebene derselben eine gerade Linie parallel mit sich selbst, so beschreibt der Schwerpunct gleicher Gewichte, die man sich in allen Durchschnittspuncten der Curve mit der geraden Linie, in deren verschiedenen Lagen, angebracht denkt, eine gerade Linie.

Wir können ein System von geraden Linien an die Stelle der gegebenen Curve setzen. Wenn wir $n = 3$ setzen und insbesondere noch annehmen, dass die mit der zweiten Axe parallelen geraden Linien die Curve berühren und also überdiess dieselbe nur noch in einem einzigen Puncte schneiden, so liegen diejenigen Puncte dieser Linien, welche zwischen den Berührungs- und Durchschnittspuncten, von diesen noch einmal so weit entfernt, als von jenen, sich befinden, auf der in Rede stehenden geraden Linie, dem geometrischen Orte der im Satze bezeichneten Schwerpuncte. Wenn wir endlich, statt der Curve dritter Ordnung, ein System von drei geraden Linien betrachten, und die der zweiten Axe parallelen geraden Linien durch die Durchschnittspuncte dieser drei geraden Linien legen, so ergibt sich folgender specieller Satz:

Wenn man von jedem der drei Winkelpuncte eines gegebenen Dreiecks aus nach gegebener Richtung eine gerade Linie bis zur gegenüberliegenden Seite zieht, so liegen auf den drei resultirenden geraden Linien die Endpuncte der ersten Drittel in gerader Linie.

IV. Wenn wir zweitens der allgemeinen Gleichung der Curven n. Ordnung folgende Form geben:

$$Az^n+nz^{n-1}(Ay+Cx)+n(n-1)z^{n-2}(Dy^2+Exy+Fx^2)+\ldots = u,$$

so entsprechen, indem wir $x = 1$ setzen, jedem beliebig angenommenen Werthe von y n verschiedene Werthe von z, und diese n Werthe von z sind die, mit entgegengesetzten Zeichen genommenen reciproken Werthe der Abstände der n Durchschnittspuncte der Curve mit einer durch den Anfangspunct der Coordinaten gehenden geraden Linie, deren Richtung durch den für y beliebig angenommenen Werth bestimmt ist. Die Bestimmung des arithmetischen Mittels aus den reciproken Werthen dieser n Abstände knüpft sich an die harmonische Theilung und an Betrachtungsweisen der Statik. Wenn wir nemlich zuvörderst zwei Durchschnittspuncte betrachten, deren Abstände vom Anfangspuncte wir r und r′ nennen wollen, so ist $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r'}\right)$ der reciproke Werth des Abstandes: $\left(\frac{2rr'}{r+r'}\right)$ und der dadurch angezeigte Punct gehört als vierter harmonischer Theilungspunct zu den beiden erstgenannten Puncten und dem Anfangspuncte; denn man hat:

$$r : \frac{2rr'}{r+r'}-r = r' : r'-\frac{2rr'}{r+r'}.$$

Wenn man ferner in den beiden Puncten (r) und (r′) sich irgend zwei solche Gewichte g und g′ angebracht denkt, deren Momente in Beziehung auf den Anfangspunct einander gleich sind, und sich also umgekehrt verhalten, wie ihre Entfernungen vom Anfangspuncte, so kann man sich die beiden Gewichte vereint in jenem vierten harmonischen Theilungspuncte $\left(\frac{2rr'}{r+r'}\right)$ angebracht denken und erhält alsdann ein Moment, das der Summe der beiden eben bezeichneten Momente gleich ist. Wenn wir diese Betrachtungen auf beliebig viele Durchschnittspuncte ausdehnen, so führt uns die, nun öfter schon angewendete, Schlussweise zu folgendem Satze:

Wenn man durch irgend einen festen Punct eine beliebige gerade Linie legt und in allen Durchschnittspuncten dieser geraden Linie mit irgend einer gegebenen algebraischen Curve Gewichte sich angebracht denkt, deren Momente in Beziehung auf den festen Punct einander gleich sind, so gibt es einen Punct, in welchem man alle diese Gewichte sich vereinigt denken kann, so dass das Moment dieser vereinigten Gewichte der Summe der Momente aller einzelnen Gewichte gleich ist: dieser Punct beschreibt eine gerade Linie, wenn die beliebige schneidende gerade Linie sich um den festen Punct dreht.

Digitized by Google

$$\begin{aligned} B &= x', \\ C &= x'x'', \\ D &= y', \\ E &= x'y'' = y'x''', \\ F &= y'y'''. \end{aligned} \qquad (1)$$

V. Wenn wir n = 2 oehmeo, so ist bekanntlich die noter III bestimmte gerade Linie ein Durchmesser der Curve zweiter Ordnung, und zwar derjenige, dessen zugeordneter der zweiten Axe parallel ist. Alle solche gerade Linien, die der verschiedeneo Annahme der Richtnog der zweiten Axe entsprechen, gehen durch denselben Punct: den Mittelpnnct der Curve. Für den Fall, dass n > 2, könneo wir die auf aoaloge Weise hestimmten geradeo Linien immer noch als Durchmesser der Curve betrachten, wenn wir dieses Wort in einem weitern Sinne nehmen. Es bietet sich uns hier aber die natürliche Frage dar, oh alle solche Durchmesser, die deo verschiedenen Richtungeo der beliebigeo geraden Linie, die wir zur zweiten Axe geoommen haheo, entsprechen, auch io dem allgemeioen Falle durch denselbeu Punct gehen, oder, wenn diess nicht geschieht, was für eine Curve von denselhen umhüllt wird. Um einen hestimmten Fall vor Aogen zu hahen, wollen wir von der allgemeioen Gleichnng der Curven dritter Ordnung ausgehen. Auf dieselhe Weise ergibt sich leicht das allgemeine Gesetz.

Wenn wir aus der Gleichung:

$$Ay^3+Bxy^2+Cx^2y+Dx^3+Ey^2+Fxy+Gx^2+Hy+Ix+K = o, \qquad (a)$$

vermittelst der lioeareo Gleichung:

$$y = ax+b, \qquad (b)$$

y eliminiren, so erhalten wir eine Gleichoog des dritteo Grades io x von folgender Form:

$$px^3+(qb+r)x^2+mx+n = o,$$

wobei wir, der Kürze halher:

$$\begin{aligned} p &= Aa^3+Ba^2+Ca+D, \\ q &= 3Aa^2+2Ba+C, \\ r &= Ea^2+Fa+G, \end{aligned}$$

setzen. Für das arithmetische Mittel x' ans deo drei Wurzeln der vorsteheoden Gleichung in x, ergiht sich:

$$x' = -\frac{qb+r}{3p}. \qquad (c)$$

Dieser Abscisseo-Werth hezieht sich also anf den Schwerpnnct gleicher Gewichte, die man sich in den drei Durchschnitten der geraden Linie (h) ond der Curve (a) angebracht deukt; für die Ordinate y' dieses Punctes erhält man:

$$y' = b-a.\frac{qb+r}{3p} = \frac{(3p-aq)b-ar}{3p} = \frac{sb-ar}{3p}, \qquad (d)$$

indem man, der Kürze halher:

$$s = 3p-aq = Ba^2+2Ca+3D$$

setzt. Wenn man zwischeo den beiden Gleichongeo (c) und (d) b ilimioirt, so kommt:

$$qy'+sx'+r = o. \qquad (e)$$

Diese Gleichung stellt, wenn wir y' uod x' als veränderlich hetrachten, eine gerade Linie dar und zwar diejenige, welche der geometrische Ort aller Schwerpuncte der Durchschnitte ist, wenn wir die gerade Linie (h), parallel mit sich selbst, verrücken. Bezeichoen wir diese gerade Linie durch ihre Coordinaten, so kommt:

$$\begin{aligned} u &= \frac{q}{r} = \frac{3Aa^2+2Ba+C}{Ea^2+Fa+G}, \\ v &= \frac{s}{r} = \frac{Ba^2+2Ca+3D}{Ea^2+Fa+G}. \end{aligned}$$

In diesen beiden Gleichungen kommt a vor; die io Rede stehende gerade Linie ändert ihre Lage, weno die gerade Linie (b) ihre Richtung ändert. Weno wir a zwischen diesen heiden Gleichungen eliminiren, so erhalteo wir eine Gleichung zwischen u und v, welche denjeoigen geometrischen Ort darstellt, der von der geraden Linie (e) umhüllt wird, wenn wir für a nach eioander alle möglichen Werthe nehmen. Die resultirende Gleichung steigt, in Beziehung anf u und v, bis zum dritten Grade.

Digitized by Google

Für den Fall der Parabel, wo A = o, erhalten wir, wenn wir B = 1 setzen, folgende Constanten-Bestimmung:

$$C = x'', \qquad E = y'',$$
$$D = \frac{y''}{x'''}, \qquad F = \frac{y''y'''}{x'''}.$$

523. In der vorigen Nummer haben wir für E eine doppelte Bestimmung erhalten. Es ist hiernach:

$$\frac{y'}{x'} = \frac{y''}{x'''}.$$

Wenn wir diese Gleichung geometrisch deuten und berücksichtigen, dass wir irgend zwei beliebige gerade Linien zu Coordinaten-Axen nehmen können, so erhalten wir folgenden Satz:

Wenn eine Curve zweiter Classe und irgend zwei gerade Linien gegeben sind, und man legt durch den Pol jeder der letztern eine gerade Linie mit der andern parallel, so schneiden sich die beiden Parallelen in einem solchen Puncte, der mit dem Mittelpuncte der gegebenen Curve und dem Durchschnitte der beiden gegebenen geraden Linien in gerader Linie liegt. *)

---

*) Wenn wir die allgemeine Gleichung des zweiten Grades zwischen y und x:

$$y^2+2\alpha xy+\beta x^2+2\gamma y+2\delta x+\varepsilon = o,$$

zu Grunde legen, so erhalten wir bekanntlich folgende drei Gleichungen:

$$y+\alpha x+\gamma = o,$$
$$\alpha y+\beta x+\delta = o,$$
$$\gamma y+\delta x+\varepsilon = o,$$

für diejenigen beiden Durchmesser der Curve, deren zugeordnete der zweiten und ersten Coordinaten-Axe parallel sind, und für die Polare des Anfangspunctes. Nennen wir die Coordinaten dieser drei geraden Linien w' und v', w'' und v'', w''' und v''', so erhalten wir folgende Constanten-Bestimmung:

$$\alpha = v', \qquad \beta = v'v'', \qquad \gamma = w',$$
$$\delta = v'w'' = v'''w', \qquad \varepsilon = w'w'''.$$

Die Gleichung

$$\alpha^2-\beta = o,$$

welche die Bedingung enthält, dass die, durch die allgemeine Gleichung dargestellte, Curve eine Parabel ist, reducirt sich hiernach auf folgende:

$$v'' = v',$$

welche ausdrückt, dass diejenigen beiden Durchmesser, welche die, der ersten und zweiten Axe parallelen Chorden halbiren, und, da diese Axen beliebig sind, dass alle Durchmesser parallel sind.

Aus der doppelten Bestimmung, die wir für den Coefficienten δ erhalten haben, folgt:

$$\frac{w'}{v'} = \frac{w''}{v'''}.$$

$\left(\frac{w'}{v'}\right)$ ist das von dem Durchmesser (w', v') auf der ersten Axe bestimmte Segment;

$\left(\frac{w''}{v'''}\right)$ ist dasjenige Segment, das auf derselben Axe von einer solchen geraden Linie bestimmt wird, die der Polaren des Anfangspunctes parallel ist, und durch den Durchschnitt des Durchmessers (w'', v'') mit der zweiten Axe geht. Hiernach ergibt sich folgender Satz:

Wenn eine Curve zweiter Ordnung und irgend zwei gerade Linien gegeben sind, so wird jede dieser beiden geraden Linien von demjenigen Durchmesser, dessen zugeordneter der andern parallel ist, so geschnitten, dass die beiden Durchschnittspuncte auf einer solchen geraden Linie liegen, die der Polaren des Durchschnittspunctes der beiden gegebenen geraden Linien parallel ist.

Digitized by Google

Wenn insbesondere die beiden gegebenen geraden Linien die gegebene Curve berühren, so folgt unmittelbar aus dem vorstehenden Satze, dass die Berührungs-Chorde von demjenigen Durchmesser halbirt wird, der durch den Durchschnitt der beiden Tangenten geht.

Es besteht der letzte Satz auch dann noch, wenn wir statt der gegebenen Curve zweiter Classe ein System von zwei Puncten nehmen.

529. Wenn der für die Discussion der verschiedenen Fälle, welche die allgemeine Gleichung des zweiten Grades darbietet, characteristische Ausdruck $(AC-B^2)$ Null ist, so kommt:

$$x' = x''.$$

Der Pol der zweiten Axe liegt also auf einem solchen Durchmesser, der der zweiten Axe parallel ist, was offenbar nur dann Statt finden kann, wenn diese Axe einer Asymptote der Curve, oder in dem Falle, dass ein System von zwei Puncten an die Stelle der Curve tritt, derjenigen geraden Linie, welche diese beiden Puncte verbindet, parallel ist.

Der Ausdruck $(AF-D^2)$ tritt an die Stelle des eben betrachteten, wenn wir die beiden Coordinaten-Axen mit einander vertauschen.

530. Ferner ist in der Discussion der allgemeinen Gleichung folgender Ausdruck:

$$\frac{[(AE-BD)^2-(AC-B^2)(AF-D^2)]\sin^2\vartheta}{A^4},$$

von Bedeutung gewesen. Wenn wir nemlich (511) irgend zwei beliebige gerade Linien zu Coordinaten-Axen nehmen, und den jedesmaligen Coordinaten-Winkel ϑ nennen, so ist für dieselbe Curve der vorstehende Ausdruck constant und zwar gleich dem negativ genommenen Quadrate des Productes aus den beiden halben Axen der Curve. Wenn wir substituiren und das Product aus den beiden halben Axen Ω nennen, so kommt:

$$-\Omega^2 = (x'y''-x''y')^2\sin^2\vartheta-(x'x''-x'^2)(y'y''-y'^2)\sin^2\vartheta.$$

Den zweiten Theil dieser Gleichung können wir leicht construiren. Beziehen wir uns zu diesem Ende auf die 10. Figur, in welcher der Mittelpunct durch C, die Pole der zweiten und ersten Axe durch P und Q bezeichnet sind, so ist z. B. Fig. 10.

$$x'(y''-y')\sin\vartheta = -CY'',$$
$$x'(y'''-y')\sin\vartheta = -CY''',$$
$$y'(x''-x')\sin\vartheta = -CX'';$$

und es ergibt sich:

$$\Omega^2 = (CY''')(CX'')-(CY'')^2.$$

Diese Gleichung gibt uns das Product der beiden halben Axen einer Curve zweiter Classe und hiernach den Flächen-Inhalt derselben, wenn die Pole irgend zweier gegebener gerader Linien und der Mittelpunct bekannt sind. Der Mittelpunct selbst ergibt sich, wenn wir nur eine gerade Linie kennen, auf welcher er sich befindet (528).

531. Für besondere Annahmen des Coordinaten-Systems vereinfacht sich die obige Construction des Inhaltes des unter den beiden halben Axen der Curve enthaltenen Rechtecks. Nehmen wir z. B. an, dass die Curve (Fig. 11) von den beiden Coordinaten-Axen berührt wird, so ist C = o und F = o, mithin: Fig. 11.

$$\Omega^2 = -\frac{A^2E^2-2ABDE}{A^4}\sin^2\vartheta,$$
$$= (2x'^2y'y''-x'^2y''^2)\sin^2\vartheta,$$

also:

$$\Omega = x'\sqrt{[y''(2y'-y'')]}.\ sin\vartheta.$$

Diese Gleichung ist leicht zu construiren. Wenn wir, wie in der 11. Figur, rechtwinklige Coordinaten-Axen nehmen, so brauchen wir nur einen Kreis NX' zu beschreiben, dessen Mittelpunct C der Mittelpunct der gegebenen Curve ist und der die erste Axe berührt. Ziehen wir alsdann CX' nach dem Puncte, in welchem dieser Kreis die erste Axe berührt, und NY'', dieser Axe parallel, durch den Punct, in welchem die zweite Axe von der gegebenen Curve berührt wird, so ist

$$MN = \sqrt{[y''(2y'-y'')]},$$

und also:

$$\Omega = Y''M\ .\ MN. \qquad (1)$$

Hiernach ergibt sich eine leichte Construction einer Curve zweiter Classe, welche eine gegebene gerade Linie OY, in einem gegebenen Puncte Y'', berührt, einen gegebenen Punct C zum Mittelpuncte, und mit einer gegebenen Curve zweiter Classe, mit einem gegebenen Kreise zum Beispiel, gleichen Flächen-Inhalt hat. Die letzte Bestimmung kommt darauf hinaus, dass das Product der beiden halben Axen der zu construirenden Curve gegeben, gleich Ω, sei.

Wenn wir nemlich auf OY im Puncte Y'' ein Perpendikel errichten, so können wir auf diesem Perpendikel zunächst den Punct M, und dann, nach (1), den Punct N bestimmen; und endlich aus C als Mittelpunct einen Kreis beschreiben, der durch N geht. Diejenige Tangente dieses Kreises, welche auf OY senkrecht steht, ist zugleich eine Tangente der zu beschreibenden Curve.

532. Wenn die zweite Axe einer der beiden Asymptoten der gegebenen Curve zweiter Classe, die mithin eine Hyperbel ist, parallel ist, so erhält man, weil alsdann $AC-B^2 = 0$:

$$-\Omega^2 = \frac{(AE-BD)^2}{A^4} sin^2\vartheta$$

und folglich:

$$\Omega\sqrt{-1} = \frac{AE-BD}{A^2} sin\vartheta,$$

und hieraus, indem man substituirt:

$$\Omega\sqrt{-1} = y'(x'''-x')sin\vartheta.$$

Fig. 12. Wenn wir uns auf die 12. Figur beziehen, in welcher C der Mittelpunct der gegebenen Hyperbel, CA und CB die Asymptoten derselben sind, und für die zweite Axe eine beliebige, der einen Asymptote CB parallele, gerade Linie, OY, und für die erste Axe eine durchaus beliebige gerade Linie, OX, nehmen, deren Pol der Punct Q ist, durch den QD parallel mit CB gezogen ist, so ergibt sich, abgesehen vom Zeichen:

$$y' = CB, \qquad y'''-x' = BD,$$

und mithin $\Omega\sqrt{-1}$ gleich dem doppelten Inhalte des Dreiecks CBD; und da die Höhe DF dieses Dreiecks gleich ist der Entfernung QR des Poles Q von der Asymptote CB, ist auch:

$$-\Omega\sqrt{-1} = CB.QR.$$

Wir kommen auf diese Weise zu folgendem Satze:

Das Product desjenigen Segmentes, das auf einer Asymptote einer gegebenen Hyperbel zwischen dem Mittelpuncte und dem Durchschnitte derselben mit einer beliebigen geraden Linie liegt, in den Abstand des Poles dieser geraden Linie von derselben

Digitized by Google

Asymptote ist constant und gleich dem Producte der beiden halben Axen der gegebenen Hyperbel (243).

Wenn wir statt OY irgend eine, der andern Asymptote CA parallele, gerade Linie zur zweiten Axe genommen hätten, so würden wir gerade auf dieselbe Weise, wie oben, gefunden haben, dass $\Omega V\sqrt{-1}$ auch gleich ist dem doppelten Inhalte des Dreiecks CAE. Die beiden Dreiecke CBD und CAE sind also einander gleich (es ist also auch BD = AE) und ihre Summe ist gleich dem unter den beiden halben Axen der gegebenen Hyperbel enthaltenem Rechtecke. Dieses Resultat besteht, gleich viel, ob die beliebige zur ersten Axe genommene gerade Linie der Curve begegnet oder nicht. Wenn dieselbe die Curve berührt, erhalten wir folgenden bekannten Satz:

Jede beliebige Tangente einer gegebenen Hyperbel schneidet von dem Asymptoten-Winkel ein Dreieck von constantem Inhalte ab und wird im Berührungspuncte halbirt.

(Aus diesem Satze ergibt sich unmittelbar der frühere und allgemeinere, wenn wir berücksichtigen, was aus der Theorie der Pole sogleich folgt, dass, wenn man von demjenigen Puncte aus, in welchem eine gegebene gerade Linie einer Asymptote begegnet, eine Tangente an die Curve, und durch den Berührungspunct auf dieser Tangente eine gerade Linie mit jener Asymptote parallel zieht, diese gerade Linie durch den Pol der gegebenen geht.)

Die letzten Nummern machen an einigen Beispielen anschaulich, wie die obige geometrische Deutung der Constanten in der allgemeinen Gleichung zu Sätzen und Constructionen führt. Zur Bestimmung jener Constanten können wir auch noch auf andern Wegen gelangen und aus der Zusammenstellung verschiedenartiger Bestimmungen ergeben sich neue geometrische Beziehungen. Doch hierüber wollen wir in keine weitern Entwicklungen hier eingehen. —

533. Wenn wir in der allgemeinen Gleichung der Oerter zweiter Classe:

$$Aw^2+2Bvw+Cv^2+2Duw+2Euv+Fu^2 = u,$$

$w = o$ setzen, so erhalten wir zur Bestimmung der Richtung der beiden durch den Anfangspunct gehenden Tangenten folgende Gleichung:

$$Cv^2+2Euv+Fu^2 = o.$$

Dieselbe Gleichung hätten wir erhalten, wenn wir

$$Aw+2Bv+2Du = o \qquad (1)$$

gesetzt hätten. Es bilden also die beiden durch den Anfangspunct und die beiden durch den Punct (1) gehenden Tangenten ein Parallelogramm. Diejenige gerade Linie, welche den letztgenannten Punct mit dem Anfangspuncte verbindet, geht, was die letzte Gleichung zeigt, durch den Mittelpunct der Curve und wird in diesem Puncte halbirt. Liegt also der Anfangspunct auf dem Umfange der gegebenen Curve, so thut es auch der Punct (1).

Wir erhalten ferner, gleichviel, ob wir $v = o$ setzen oder

$$2Bw+Cv+2Eu = o, \qquad (2)$$

aus der allgemeinen Gleichung folgende:

$$Aw^2+2Duw+Fu^2 = o.$$

Es schneiden also die der ersten Axe parallelen Tangenten in dieselben Puncte der zweiten Axe ein, als die durch den Punct (2) gehenden Tangenten. Hiernach ist die Construction dieses Punctes gegeben. Wenn wir ferner die Gleichung (2) mit der Gleichung:

$$Bw+Cv+Eu = 0,$$

welche den Pol der zweiten Axe darstellt, vergleichen, so ist ersichtlich, dass der in Rede stehende Punct von der ersten Axe eben so weit und von der zweiten Axe halb so weit abstebt, als dieser Pol. Hieraus folgt, dass, wenn wir die Richtung der ersten Axe beliebig ändern, der Punct (2) auf einer der zweiten Axe parallelen geraden Linie fortrückt. Also:

Wenn man von den beiden Durchschnittspuncten einer gegebenen geraden Linie mit irgend zweien parallelen Tangenten einer gegebenen Curve zweiter Classe noch zwei Tangenten an die Curve legt, so schneiden diese beiden neuen Tangenten sich in einem Puncte, der auf einer geraden Linie, die der gegebenen parallel ist, fortrückt, wenn wir die Richtung der beiden parallelen Tangenten beliebig ändern. Legen wir ferner durch diesen Punct eine gerade Linie parallel mit den bezüglichen parallelen Tangenten, so geht dieselbe durch einen festen Punct, den Pol der gegebenen geraden Linie.

Es stellt die Gleichung:

$$2Dw+2Ev+Fu = 0,$$

einen solchen Punct dar, der eben so weit von der zweiten Axe und halb so weit von der ersten Axe abstebt, als der Pol der letztgenannten Axe. —

534. Wenn in der allgemeinen Gleichung:

$$Aw^2+2Bvw+Cv^2+2Duw+2Euv+Fu^2 = 0,$$

die Coefficienten A, B, C, D, E und F theilweise ein für alle Mal gegeben sind, oder wenn zwischen denselben Bedingungs-Gleichungen Statt finden, so stellt diese Gleichung Curven dar, die gewissen Bedingungen unterworfen sind. Mit der Discussion einiger solcher Fälle, bei deren Auswahl wir auf die folgenden Paragraphen Rücksicht nehmen, wollen wir uns jetzt zunächst beschäftigen.

1. Wenn alle Coefficienten der allgemeinen Gleichung, mit Ausnahme des Coefficienten von n^2, gegeben sind, so berühren alle Curven, welche durch diese Gleichung noch dargestellt werden können, dieselben beiden, der zweiten Axe parallelen, geraden Linien in denselben beiden Puncten.

2. Wenn nur der Coefficient von v^2 beliebig zu bestimmen übrig bleibt, so berühren alle Curven dieselben beiden der ersten Axe parallelen geraden Linien in denselben beiden Puncten.

3. Wenn nur der Coefficient von w^2 beliebig zu bestimmen übrig bleibt, so berühren alle Curven dieselben beiden, durch den Anfangspunct der Coordinaten gehenden, geraden Linien in denselben beiden Puncten.

4. Wenn alle Coefficienten der allgemeinen Gleichung, mit Ausnahme des Coefficienten von nv, gegeben sind, so berühren alle Curven, welche alsdann durch diese Gleichung noch dargestellt werden können, dieselben vier geraden Linien, von welchen zwei der zweiten und zwei der ersten Axe parallel sind.

5. Wenn nur der Coefficient von nw beliebig zu bestimmen übrig bleibt, so berühren alle Curven dieselben vier geraden Linien, von welchen zwei der zweiten Axe parallel sind und zwei durch den Anfangspunct der Coordinaten gehen.

6. Wenn nur der Coefficient von vw beliebig zu bestimmen übrig bleibt, so berühren alle Curven dieselben vier geraden Linien, von welchen zwei der ersten Axe parallel sind und zwei durch den Anfangspunct der Coordinaten gehen.

Digitized by Google

535. Die vorstehenden Sätze ergeben sich alle auf dieselbe Weise. Nehmen wir zum Beispiel den letzten Fall und stellen irgend zwei der bezüglichen Curven durch folgende beide Gleichungen dar:

$$Aw^2+2B'vw+Cv^2+2Duw+2Euv+Fu^2 = 0,$$
$$Aw^2+2B''vw+Cv^2+2Duw+2Euv+Fu^2 = 0,$$

so erhalten wir, wenn wir abziehen, und durch $2(B'-B'')$ dividiren:

$$vw = 0;$$

das heisst: die gemeinschaftlichen Tangenten der beiden in Rede stehenden Curven gehen, paarweise genommen, durch die beiden durch die letzte Gleichung dargestellten Puncte, von denen der eine unendlich weit, nach der Richtung der ersten Axe hin, liegt und der andere in den Anfangspunct der Coordinaten fällt. Die Richtung der beiden in dem letztbezeichneten Puncte sich schneidenden Tangenten bestimmt sich durch die Gleichung:

$$Cv^2+2Euv+Fu^2 = 0,$$

in der C, E und F, der Voraussetzung nach, gegebene Grössen sind; und diejenigen Puncte, in welchen die durch den, nach der Richtung der ersten Axe hin, unendlich weit liegenden Punct gehende, oder, mit andern Worten, die dieser Axe parallele Tangenten in die zweite Axe einschneiden, bestimmen sich auf ähnliche Weise durch die Gleichung:

$$Aw^2+2Duw+Fu^2 = 0.$$

Was die drei ersten Fälle betrifft, so ist klar, dass, wenn die Gleichungen zweier Curven zweiter Classe sich zu der Gleichung zweier zusammenfallender Puncte verbinden lassen, gleichviel, ob diese beiden Puncte unendlich weit liegen oder nicht, die beiden Curven sich doppelt berühren und jene Puncte in den Durchschnitt ihrer gemeinschaftlichen Tangenten fallen.

536. Die Resultate der 534. Nummer bestehen auch dann noch, nur mit leichten Modificationen, wenn wir A gleich Null nehmen und die allgemeine Gleichung also nur Parabeln darstellt.

1. Wenn alsdann der Coefficient von u^2 einzig unbestimmt bleibt, so berühren alle diese Parabeln dieselbe, der zweiten Axe parallele, gerade Linie in demselben Puncte, und die Durchmesser aller Parabeln sind parallel (464).
2. Wenn nur der Coefficient von v^2 unbestimmt bleibt, so berühren alle Parabeln dieselbe der ersten Axe parallele gerade Linie in demselben Puncte und alle Durchmesser sind parallel (464).
3. Wenn nur der Coefficient von uv unbestimmt bleibt, so berühren alle Parabeln zwei der Coordinaten-Axen parallele gerade Linien und alle Durchmesser sind parallel (464).
4. Wenn nur der Coefficient von uw unbestimmt bleibt, so berühren alle Parabeln zwei durch den Anfangspunct gehende und eine der zweiten Axe parallele gerade Linien.
5. Wenn nur der Coefficient von vw unbestimmt bleibt, so berühren alle Parabeln zwei durch den Anfangspunct gehende und eine der ersten Axe parallele gerade Linie.

Nach den beiden letzten Fällen erhalten wir also unmittelbar die allgemeine Gleichung aller Parabeln, welche die Seiten eines gegebenen Dreiecks berühren, wenn wir

einen Winkelpunct dieses Dreiecks zum Anfangspuncte der Coordinaten nehmen und eine der Axen der, diesem Winkelpuncte gegenüberliegenden, Seite parallel legen.

537. Wenn die Coefficienten B und D der allgemeinen Gleichung beide beliebig angenommen werden, jedoch so, dass zwischen denselben irgend eine gegebene Gleichung des ersten Grades besteht und die übrigen Coefficienten ein für alle Mal gegeben sind, so berühren alle diejenigen Curven, welche unter diesen Beschränkungen durch die allgemeine Gleichung noch dargestellt werden können, dieselben vier geraden Linien, von denen zwei in dem Anfangspuncte der Coordinaten sich schneiden und zwei irgend einer geraden Linie parallel sind.

Wir wollen, was erlaubt ist, $A = 1$ setzen. Unter dieser Voraussetzung ist die gegebene Gleichung zwischen B und D, für welche wir folgende nehmen wollen:

$$D = aB + b, \qquad (1)$$

wenn wir B und D als veränderlich, als x und y, betrachten, die Gleichung einer geraden Linie, des geometrischen Ortes für die Mittelpuncte aller durch die allgemeine Gleichung darstellbaren Curven. Stellen wir irgend zwei dieser Curven durch folgende Gleichungen dar:

$$w^2 + 2B'vw + Cv^2 + 2D'uw + 2Euv + Fu^2 = 0,$$
$$w^2 + 2B''vw + Cv^2 + 2D''uw + 2Euv + Fu^2 = 0,$$

und ziehen ab, so kommt:

$$[(B' - B'')v + (D' - D'')u]w = 0,$$

und da nach der gegebenen Bedingungs-Gleichung:

$$D' = aB' + b, \qquad D'' = aB'' + b,$$

und folglich:

$$(D' - D'') = a(B' - B''),$$

so ergibt sich:

$$[v + au]w = 0.$$

Wir kommen immer zu derselben Gleichung, welche zwei der in Rede stehenden Curven wir auch zusammenstellen mögen, und da diese Gleichung den Anfangspunct der Coordinaten und einen unendlich weit liegenden Punct darstellt, so ist die obige Behauptung gerechtfertigt. Diejenige Richtung, nach welcher der unendlich weit entfernte Punct liegt, bestimmt sich durch den Coefficienten a der gegebenen Bedingungs-Gleichung.

Die Richtung der beiden durch den Anfangspunct gehenden geraden Linien bestimmt sich unmittelbar durch die Gleichung:

$$Cv^2 + 2Euv + Fu^2 = 0,$$

die aus der allgemeinen Gleichung sich ergibt, indem man $w = 0$ setzt. Um die Durchschnitte der beiden parallelen Tangenten mit der zweiten Axe zu erhalten, können wir, der Bedingungs-Gleichung (1) Genüge leistend, in der allgemeinen Gleichung $B = 0$ und $D = h$ nehmen und dann für v in dieselbe $(-au)$ substituiren. Auf diese Weise kommt:

$$Aw^2 + 2buw + (Ca^2 - 2Ea + F)u^2 = 0.$$

538. Wenn die Coefficienten A und B beide beliebig angenommen werden, jedoch so, dass zwischen denselben irgend eine gegebene Gleichung des ersten Grades besteht und die übrigen Coefficienten ein für alle Mal gegeben sind, so berühren alle Curven, welche unter diesen Beschränkungen durch die allgemeine Gleichung noch dargestellt werden können, dieselben vier gerade Linien, von welchen zwei durch den Anfangspunct

der Coordinaten gehen und die beiden übrigen in einem zweiten Puncte der ersten Axe sich schneiden.

Es sei:

$$B = aA+b, \qquad (1)$$

die gegebene Bedingungs-Gleichung. Wenn wir alsdann irgend zwei der in Rede stehenden Curven durch die beiden Gleichungen:

$$\begin{aligned} A'w^2+2B'vw+Cv^2+2Duw+2Euv+Fu^2 &= 0, \\ A''w^2+2B''vw+Cv^2+2Duw+2Euv+Fu^2 &= 0, \end{aligned} \qquad (2)$$

darstellen, so ergibt sich, wenn wir abziehen:

$$[(A'-A'')w+2(B'-B'')v]w = 0;$$

und diese Gleichung verwandelt sich, da nach der gegebenen Bedingungs-Gleichung:

$$(B'-B') = a(A'-A''),$$

in folgende:

$$(w+2av)w = 0. \qquad (3)$$

Da diese Gleichung, welche zwei solche Puncte darstellt, die auf der ersten Axe liegen und von denen der eine überdiess mit dem Anfangspuncte zusammenfällt, unabhängig ist von der besondern Auswahl der beiden Curven (2), so ist die obige Behauptung bewiesen.

Die Axe der x ist also eine Diagonale derjenigen vierseitigen Figur, der alle in Rede stehenden Curven zweiter Classe eingeschrieben sind. Von den beiden Durchschnittspuncten, welche diese Diagonale verbindet, fällt der eine mit dem Anfangspuncte zusammen, die Abscisse des andern ist 2a. Die Mittelpuncte aller jener Curven liegen in gerader Linie und diese gerade Linie schneidet in die zweite Axe in einem solchen Puncte ein, dessen Ordinate $\left(-\frac{Da}{b}\right)$ ist. Wenn b gleich Null ist, so ist die zweite Axe dieser geraden Linie parallel. Die Richtung der Seiten des allen Curven umschriebenen Vierecks bestimmt sich durch die gegebenen Coefficienten C, D, E und F und durch a und b. Wir erhalten nemlich zur Bestimmung der Richtung der beiden durch den Anfangspunct der Coordinaten gehenden Seiten jenes Vierecks die Gleichung:

$$Cv^2+2Euv+Fu^2 = 0, \qquad (4)$$

eine Gleichung, die von a und b unabhängig ist, und zur Bestimmung der beiden übrigen Seiten etwa, indem wir $B = 0$ und also $A = -\frac{b}{a}$ setzen, die beiden Gleichungen:

$$\begin{aligned} -\frac{b}{a}w^2+Cv^2+2Duw+2Euv+Fu^2 &= 0, \\ w+2av &= 0, \end{aligned}$$

aus denen folgende sich ergibt:

$$(C-4ab)v^2+2(E-2Da)uv+Fu^2 = 0. \qquad (5)$$

Nach dem Vorstehenden können wir auch, wenn irgend ein Viereck gegeben ist, indem wir einen Winkelpunct desselben zum Anfangspuncte der Coordinaten nehmen und die erste Axe zugleich durch den gegenüberliegenden Winkelpunct legen, die allgemeine Gleichung aller derjenigen Curven zweiter Classe bestimmen, welche diesem Viereck eingeschrieben sind und sonach auf eine leichte Weise alle Eigenschaften solcher Curven im Allgemeinen und jeder derselben insbesondere entwickeln. Auf Beispiele hiervon werden wir in dem Folgenden zurückkommen, und zum Beispiel auf diesem Wege die grösste unter allen denjenigen Ellipsen bestimmen, die einem gegebenen Vierecke eingeschrieben werden können.

Digitized by Google

539. Die Sätze der beiden vorigen Nummern sind zwei Fälle folgenden allgemeinern Satzes:

Alle Curven, welche durch die allgemeine Gleichung dargestellt werden können, wenn irgend vier Coefficienten dieser Gleichung ein für alle Mal gegeben sind und zwischen den beiden übrigen eine gegebene Gleichung des ersten Grades Statt findet, berühren dieselben vier geraden Linie.

Dieser Satz schliesst so viele einzelne Fälle in sich ein, als die sechs Coefficienten der allgemeinen Gleichung sich zu zwei combiniren lassen, also $\frac{6.5}{1.2} = 15$. Wir wollen diese verschiedenen Fälle in folgendem Schema zusammenstellen, indem wir dieselbe durch die Bedingungs-Gleichung zwischen den jedesmaligen beiden Coefficienten unterscheiden.

1. $B = aA+b$ — Zwei Seiten des, allen durch die allgemeine Gleichung dargestellten Curven, umschriebenen Vierecks schneiden sich im Anfangspuncte der Coordinaten; die beiden übrigen in einem Puncte der ersten Axe, dessen Abscisse gleich 2a ist (538).

2. $D = aA+b$ — Zwei Seiten des Vierecks schneiden sich im Anfangspuncte, die beiden übrigen in einem Puncte der zweiten Axe, dessen Ordinate gleich 2a ist.

3. $C+a^2A-b^2 = 0$ — Die gegenüberliegenden Seiten des umschriebenen Vierecks schneiden sich in solchen zwei Puncten der ersten Axe, die zu beiden Seiten des Anfangspunctes gleich weit, nemlich um $\pm a$ von demselben entfernt liegen. Man erhält für diese Seitenpaare auf einem ähnlichen Wege, wie in den vorigen beiden Nummern:

$$\left\{\begin{array}{c} w = av, \\ (b^2+2Ba)v^2+2(E+Da)uv+Fu^2 = 0. \end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{c} w = -av, \\ (b^2-2Ba)v^2+2(E-Da)uv+Fu^2 = 0. \end{array}\right\}$$

4. $F+a^2A-b^2 = 0$ — Die gegenüberliegenden Seiten des umschriebenen Vierecks schneiden sich in solchen zwei Puncten der zweiten Axe, deren Ordinaten $\pm a$ sind.

5. $C = 2aB+b^2$ — Zwei Seiten des umschriebenen Vierecks sind der ersten Axe parallel. Diejenigen beiden Puncte, in welchen dieselben in die zweite Axe einschneiden, sind durch folgende Gleichung gegeben:

$$Aw^2+2Duw+Fu^2 = 0.$$

Die beiden übrigen Seiten schneiden sich in einem Puncte der ersten Axe, dessen Abscisse gleich a ist; ihre Richtung ist durch folgende Gleichung gegeben:

$$(Aa^2+b^2)v^2+2(E-Da)uv+Fu^2 = 0.$$

6. $F = 2aD+b^2$ — Zwei Seiten des Vierecks sind der zweiten Axe parallel; die beiden übrigen schneiden sich in einem Puncte derselben Axe, dessen Ordinate gleich a ist.

Digitized by Google

7. $D = aB+b$ — Zwei Seiten des umschriebenen Vierecks schneiden sich im Anfangspuncte der Coordinaten; die beiden übrigen sind parallel und ihre Richtung ist durch die Gleichung $\left(-\frac{v}{u}\right) = a$ gegeben (537).

8. $E = aB+b^2$ — Zwei Seiten des umschriebenen Vierecks sind der ersten Axe parallel, ihre Durchschnittspuncte mit der zweiten Axe sind durch folgende Gleichung bestimmt:

$$Aw^2+2Duw+Fu^2 = 0.$$

Die beiden übrigen Seiten schneiden sich auf der zweiten Axe in einem Puncte, dessen Ordinate gleich a ist; die Richtung derselben wird durch folgende Gleichung gegeben:

$$Cv^2+2Euv+(Aa^2-2Da+F)u^2 = 0.$$

9. $E = aD+b^2$ — Zwei Seiten des Vierecks sind der zweiten Axe parallel; die beiden übrigen schneiden sich in einem Puncte der ersten Axe, dessen Abscisse gleich a ist.

10. $C = aE+b^2$ — Das umschriebene Viereck ist ein Parallelogramm, worin zwei Seiten der ersten Axe parallel sind und dessen beide übrigen Seiten, der Richtung nach, durch die Gleichung $\left(-\frac{v}{u}\right) = a$ bestimmt werden. Die Durchschnittspuncte jener beiden ersten Seiten mit der zweiten Axe sind durch folgende Gleichung gegeben:

$$Aw^2+2Duw+Fu^2 = 0,$$

und die Durchschnittspuncte der beiden andern Seiten mit derselben Axe durch die Gleichung:

$$Aw^2+2(D-Ba)uw+(F+b^2)u^2 = 0.$$

11. $E = aF+b^2$ — Das Viereck ist ein Parallelogramm, in welchem zwei Seiten der zweiten Axe parallel sind und die Richtung der beiden übrigen durch die Gleichung $\left(-\frac{v}{u}\right) = a$ sich bestimmt.

12. $C+a^2F-b^2 = 0$ — Das umschriebene Viereck ist ein Parallelogramm. Die gegenüberliegenden Seiten desselben und die beiden Axen haben die Richtung von vier Harmonicalen. Man erhält für die Seiten des Parallelogramms folgende Coordinaten-Bestimmung:

$$v = \pm an$$

$$Aw^2+2(D\pm Ba)uw\pm(2E\pm b^2a)an^2 = 0,$$

wobei wir die obern und untern Zeichen zusammennehmen müssen.

13. $E = aA+b.$
14. $C = aD+b.$
15. $F = aB+b.$

Die Bestimmung der vier, alle durch die allgemeine Gleichung dargestellten Curven berührenden, geraden Linien ist weniger einfach. *)

*) Ein analoges Schema ergibt sich, wenn wir von der allgemeinen Gleichung der Curven zweiter Ordnung:

$$ay^2+2bxy+cx^2+2dyz+2exz+fz^2 = 0,$$

ausgehen. Wenn nemlich irgend vier Coefficienten dieser Gleichung ein für alle Mal ge-

540. Wenn wir über die in jedem der verschiedenen Fälle der vorigen Nummer ein für alle Mal gegebenen vier Coefficienten besondere Annahmen machen, so erhalten wir die allgemeinen Gleichungen von Curven, die mannigfaltigen Bestimmungen unterworfen sind und eine bestimmte Lage in Beziehung auf das Coordinaten-System haben. Wir werden ein Beispiel hiervon, in einem der folgenden Paragraphen, in dem wir uns mit der Osculation der Curven zweiter Classe beschäftigen werden, ausführlich behandeln. Hier wollen wir uns auf einige Andeutungen über denjenigen Fall beschränken, wo $A = 0$, und also alle Curven Parabeln sind.

In 5. — 9. Falle der vorigen Nummer berühren alle durch die allgemeine Gleichung dargestellten Parabeln die Seiten desselben Dreiecks. In dem 5. und 6. Falle liegt ein Winkelpunct dieses Dreiecks auf einer der beiden Coordinaten-Axen und die diesem Winkelpuncte gegenüberliegende Seite des Dreiecks ist derselben Axe parallel. In dem 7. Falle fällt ein Winkelpunct des Dreiecks in den Anfangspunct. In dem 8. und 9. Falle liegt ein Winkelpunct des Dreiecks auf einer der beiden Coordinaten-Axen und die gegenüberliegende Seite ist der andern Axe parallel.

In dem 10. — 12. Falle der vorigen Nummer ist die Richtung der Durchmesser aller Parabeln gegeben (464) und alle Parabeln berühren dieselben beiden geraden Linien. In den beiden ersten dieser drei Fälle ist von diesen beiden geraden Linien eine einer der beiden Coordinaten-Axen parallel; in dem letzten Falle haben diese beiden geraden Linien und die beiden Coordinaten-Axen die Richtung von vier Harmonicalen.

541. Auch der allgemeinere Satz der 539. Nummer ist nur ein besonderer Fall von folgendem Satze:

---

geben sind und zwischen den beiden übrigen eine gegebene lineare Bedingungs-Gleichung Statt findet, so gehen alle Curven, welche, unter dieser Beschränkung, durch die allgemeine Gleichung noch dargestellt werden können, durch dieselben vier Puncte. Hiernach erhalten wir folgende 15 verschiedene Fälle, die wir durch diejenigen beiden Coefficienten, welche unbestimmt bleiben, bezeichnen wollen.

a, b. / b, c. Alle Curven gehen durch zwei feste Puncte einer durch den Anfangspunct gehenden geraden Linie, und überdiess einmal durch zwei feste Puncte der ersten, das andere Mal durch zwei feste Puncte der zweiten Axe.

a, c. Alle Curven gehen durch die vier Winkelpuncte eines Parallogrammes, dessen beide Diagonalen durch den Anfangspunct gehen und mit den beiden Coordinaten-Axen vier Harmonicalen bilden.

a, d. / c, e. Alle Curven gehen durch die vier Winkelpuncte eines Parallel-Trapezes, von dessen parallelen Seiten eine in eine der beiden Coordinaten-Axen fällt, und die andere derselben Axe parallel ist.

a, f. / e, f. Alle Curven gehen durch die vier Winkelpuncte eines Parallel-Trapezes, dessen parallele Seiten einer der beiden Coordinaten-Axen parallel sind und gleich weit von derselben entfernt liegen.

b, d. / b, e. Alle Curven gehen durch zwei feste Puncte einer Coordinaten-Axe und durch zwei feste Puncte einer der andern Coordinaten-Axe parallelen geraden Linie.

d, e. Alle Curven sind ähnliche und ähnlich liegende und gehen überdiess durch zwei feste Puncte einer durch den Anfangspunct gehenden geraden Linie.

d, f. / e, f. Alle Curven sind ähnliche und ähnlich liegende und gehen durch zwei feste Puncte einer solchen geraden Linie, die einer der beiden Coordinaten-Axen parallel ist.

a, e. / c, d. / b, f. Die Bestimmung der vier gemeinschaftlichen Durchschnittspuncte ist weniger einfach.

Wenn zwischen den Coefficienten der allgemeinen Gleichung fünf Bedingungs-Gleichungen des ersten Grades Statt finden, so berühren alle Curven, welche unter diesen Beschränkungen durch die allgemeine Gleichung noch dargestellt werden können, dieselben vier geraden Linien.

Wir führen diesen Satz hier bloss an. In der zweiten Abtheilung dieses Bandes wird derselbe, so wie die analogen Sätze für Curven irgend einer beliebigen Classe, durch allgemeine Betrachtungen unmittelbar sich ergeben.

§ 4.

Neue Tangenten-Theorie.

542. Die allgemeine Theorie des Contactes, die ich in den folgenden Nummern entwickeln werde, ergibt sich unmittelbar aus der geometrischen Deutung des sogenannten Theorems über die homogenen Functionen. Nach diesem Theorem, das ich hier als bekannt voraussetze *), hat man, wenn

$$U = 0 \qquad (1)$$

irgend eine homogene algebraische Gleichung von einem beliebigen, etwa dem m., Grade zwischen den drei veränderlichen Grössen u, v und w ist:

$$\frac{dU}{dw}w+\frac{dU}{dv}v+\frac{dU}{du}u = m.U,$$

$$\frac{d^2U}{dw^2}w^2+2\frac{d^2U}{dvdw}vw+\frac{d^2U}{dv^2}v^2+2\frac{d^2U}{dudw}uw+2\frac{d^2U}{dudv}uv+\frac{d^2U}{du^2}u^2 = m(m-1).U,$$

$$\frac{d^3U}{dw^3}w^3+3\frac{d^3U}{dvdw^2}vw^2+3\frac{d^3U}{dv^2dw}v^2w+\frac{d^3U}{dv^3}v^3+3\frac{d^3U}{dudw^2}uw^2+6\frac{d^3U}{dudvdw}uvw+3\frac{d^3U}{du^2dw}u^2w$$
$$+3\frac{d^3U}{dudv^2}uv^2+3\frac{d^3U}{du^2dv}u^2v+\frac{d^3U}{du^3}u^3 = m(m-1)(m-2).U,$$

. . . . . .

. . . . . .

543. Wenn wir in der nachstehenden Gleichung die partiellen Differential-Coefficienten auf die bestimmten Werthe irgend einer gegebenen Tangente (w', v', u') der gegebenen Curve (t) beziehen, und dieselben zur Unterscheidung einklammern, so stellt die Gleichung:

$$\left(\frac{dU}{dw}\right)w+\left(\frac{dU}{dv}\right)v+\left(\frac{dU}{du}\right)u = 0, \qquad (2)$$

einen solchen Punct dar, der auf der gegebenen Tangente liegt, weil diese Gleichung, wenn wir $w = w'$, $v = v'$ und $u = u'$ setzen, nach dem eben angeführten Theorem keine andere ist, als die Gleichung der gegebenen Curve, wenn wir in diese Gleichung die Coordinaten-Werthe jener Tangente substituiren und mit m multipliciren.

Wenn wir ferner die Gleichung der gegebenen Curve vollständig in Beziehung auf die drei veränderlichen Grössen w, v und u differentiiren, so kommt:

$$\frac{dU}{dw}dw+\frac{dU}{dv}dv+\frac{dU}{du}du = 0.$$

*) Vergl. *Lacroix, Traité élementaire de Calcul différentiel et intégral. Quatrième Edition Nro. 292.*

Differentiiren wir ebenfalls die Gleichung (2), in welcher die Coefficienten constant sind, so ergibt sich:

$$\left(\frac{dU}{dw}\right)dw+\left(\frac{dU}{dv}\right)dv+\left(\frac{dU}{du}\right)du = 0.$$

Diese beiden Differential-Gleichungen sind identisch, wenn wir in die erstere derselben nach der Differentiation $w = w'$, $v = v'$ und $u = u'$ setzen. Es ist also gleichviel, ob wir von der geraden Linie (w', v', u'), welche eine Tangente der gegebenen Curve (t) ist, auf dieser Curve zu einer benachbarten Tangente, oder von derselben geraden Linie, welche auch durch den Punct (2) geht, zu einer benachbarten, durch denselben Punct gehenden, geraden Linie übergehen. Zwei auf einander folgende Tangenten jener Curve gehen beide durch diesen Punct; dieser Punct liegt auf dem Umfange der Curve: er ist der Berührungspunct auf der gegebenen Tangente.

544. Indem wir die partiellen Differential-Coefficienten der höhern Ordnung, welche sich auf eine gegebene Tangente (w', v', u') beziehen, zur Unterscheidung, ebenfalls in Klammern einschliessen, stellt die Gleichung:

$$\left(\frac{d^2U}{dw^2}\right)w^2+2\left(\frac{d^2U}{dvdw}\right)vw+\left(\frac{d^2U}{dv^2}\right)v^2+2\left(\frac{d^2U}{dudw}\right)uw+2\left(\frac{d^2U}{dudv}\right)uv+\left(\frac{d^2U}{du^2}\right)u^2 = 0, \quad (3)$$

eine Curve zweiter Classe dar, deren Beziehung zu der gegebenen Curve wir jetzt nachweisen wollen.

Nach dem Theorem über die homogenen Functionen ist die letzte Gleichung mit der Gleichung (t) identisch, wenn wir die letztgenannte Gleichung mit $m(m-t)$ multipliciren und dann in beiden Gleichungen $w = w'$, $v = v'$ und $u = u'$ setzen. Die gegebene Tangente der Curve (t) ist also auch eine Tangente der durch die Gleichung (3) dargestellten Curve zweiter Classe.

Der Kürze halber wollen wir die Gleichung (3) auf folgende Weise schreiben:

$$W = 0.$$

Alsdann erhalten wir:

$$\left(\frac{dW}{dw}\right)w+\left(\frac{dW}{dv}\right)v+\left(\frac{dW}{du}\right)u = 0,$$

für die Gleichung desjenigen Punctes, in welchem die Curve zweiter Classe von der gegebenen gemeinschaftlichen Tangente (w', v', u') berührt wird, wenn wir die partiellen Differential-Coefficienten auf diese Tangente beziehen. Wir können leicht zeigen, dass diese Gleichung auf die Gleichung (2) zurückgeführt werden kann. Da nemlich $\frac{dU}{dw}$ eine ebenfalls homogene Function und zwar vom $(m-1)$. Grade ist, so ergibt sich:

$$\frac{d^2U}{dw^2}w+\frac{d^2U}{dvdw}v+\frac{d^2U}{dudw}u = (m-t)\frac{dU}{dw}.$$

Der erste Theil dieser Gleichung ist aber nichts anders als $\frac{1}{2}\frac{dW}{dw}$ und somit kommt:

$$\frac{dW}{dw} = 2(m-1)\frac{dU}{dw}.$$

Auf ähnliche Weise erhält man:

$$\frac{dW}{dv} = 2(m-1)\frac{dU}{dv},$$

$$\frac{dW}{du} = 2(m-t)\frac{dU}{du};$$

und hiernach:

Digitized by Google

$$\left(\frac{dW}{dw}\right)w+\left(\frac{dW}{dv}\right)v+\left(\frac{dW}{du}\right)n = 2(m-1)\left\{\left(\frac{dU}{dw}\right)w+\left(\frac{dU}{dv}\right)v+\left(\frac{dU}{du}\right)n\right\}.$$

Es berührt also die gerade Linie (w', v', u') die beiden Curven (1) und (3) in demselben Puncte.

Wenn wir die gegebene Gleichung (1) zweimal nach einander vollständig differentiiren, so kommt:

$$\frac{d^2U}{dw^2}dw^2+2\frac{d^2U}{dvdw}dvdw+\frac{d^2U}{dv^2}dv^2+2\frac{d^2U}{dudw}dudw+2\frac{d^2U}{dudv}dudv+\frac{d^2U}{du^2}du^2 = 0.$$

Differentiiren wir ebenso die Gleichung (3), in welcher die partiellen Differential-Coefficienten constant sind, so kommt, wenn wir zugleich durch 2 dividiren:

$$\left(\frac{d^2U}{dw^2}\right)dw^2+2\left(\frac{d^2U}{dvdw}\right)dvdw+\left(\frac{d^2U}{dv^2}\right)dv^2+2\left(\frac{d^2U}{dudw}\right)dudw+2\left(\frac{d^2U}{dudv}\right)dudv$$
$$+\left(\frac{d^2U}{du^2}\right)du^2 = 0.$$

Diese beiden Differential-Gleichungen sind identisch, wenn wir in der erstern für die veränderlichen Grössen die Coordinaten-Werthe der gegebenen Tangente substituiren. Die beiden durch (1) und (3) dargestellten Curven haben also nicht bloss eine gemeinschaftliche Tangente und auf dieser gemeinschaftlichen Tangente denselben Berührungspunct, sondern sie haben auch in diesem Puncte einen innigern Contact, einen Contact der zweiten Ordnung.

545. Wir können diese Entwicklungen beliebig ausdehnen. Damit dass Gesetz derselben sich deutlicher ergebe, wollen wir auch noch einen Contact der dritten Ordnung betrachten. Folgende Gleichung nemlich:

$$\left(\frac{d^3U}{dw^3}\right)w^3+3\left(\frac{d^3U}{dvdw^2}\right)vw^2+3\left(\frac{d^3U}{dv^2dw}\right)v^2w+\left(\frac{d^3U}{dv^3}\right)v^3+3\left(\frac{d^3U}{dudw^2}\right)uw^2$$
$$+6\left(\frac{d^3U}{dudvdw}\right)uvw+3\left(\frac{d^3U}{du^2dw}\right)u^2w+3\left(\frac{d^3U}{dudv^2}\right)uv^2+3\left(\frac{d^3U}{du^2dv}\right)u^2v+\left(\frac{d^3U}{du^3}\right)u^3 = 0, \quad (4)$$

stellt eine Curve dritter Classe dar, die mit der gegebenen Curve auf der gegebenen Tangente (auf welche sich auch die eingeklammerten Differential-Coefficienten beziehen) einen Contact dritter Ordnung hat. Denn erstlich ist wiederum ersichtlich, dass auch diese Curve die gegebene Tangente (w', v', n') berührt, weil man die identische Gleichung

$$V = n(m-1)(n-2)U$$

erhält, indem man der Kürze halber die Gleichung der Curve dritter Classe durch

$$V = 0$$

darstellt und in diese Gleichung und in die Gleichung der gegebenen Curve die Coordinaten-Werthe w', v' und n' substituirt. Ferner ergibt sich, ebenfalls nach dem nun oft schon erwähnten Theorem, indem wir, neben den bisher gebrauchten Abkürzungen, auch noch, statt der Gleichung (2),

$$T = 0$$

schreiben:

$$\left(\frac{dV}{dw}\right)w+\left(\frac{dV}{dv}\right)v+\left(\frac{dV}{du}\right)u = 3.(m-1)(m-2)T,$$

$$\left(\frac{d^2V}{dw^2}\right)w^2+2\left(\frac{d^2V}{dvdw}\right)vw+\left(\frac{d^2V}{dv^2}\right)v^2+2\left(\frac{d^2V}{dudw}\right)uw+2\left(\frac{d^2V}{dudv}\right)uv+\left(\frac{d^2V}{du^2}\right)u^2$$
$$= 3.2.(m-1)W.$$

Die beiden Curven (1) und (4) werden also von der gegebenen geraden Linie in demselben Puncte (2) berührt, und haben beide mit der Curve zweiter Classe (3) in diesem Puncte einen Contact zweiter Ordnung. Ueberdiess erhält man, wenn man die beiden Gleichungen (1) und (4) dreimal nach einander vollständig differentiirt, und Alles auf die gegebene Tangente (w', v', u') bezieht, folgende identische Gleichung:

$$d^3V = 3.2.1.d^3U.$$

Die beiden Curven haben also auf der gegebenen Tangente einen Contact der dritten Ordnung.*)

546. Wir können also, wenn irgend eine Curve und eine Tangente derselben gegeben ist, die Gleichung des Berührungspunctes auf dieser Tangente, und solche Curven zweiter, dritter, . . Classe bestimmen, die mit der gegebenen Curve einen Contact der zweiten, dritten, . . Ordnung haben, so dass wir, wenn wir bloss eine geringere oder grössere Genauigkeit beabsichtigen, statt eines Stückes der gegebenen Curve, das sich nicht weit von dem Berührungspuncte auf der gegebenen Tangente erstreckt, nur ein Stück einer Curve zweiter, dritter, . . Classe zu betrachten brauchen. Wenn m eine ganze positive Zahl ist, so erhalten wir nach der eben entwickelten Methode osculirende Curven der zweiten bis (m—1). Classe. Wollten wir nach demselben Verfahren die Gleichung einer Curve des m. Grades, die also mit der gegebenen einen Contact der m. Ordnung haben würde, entwickeln, so würden wir auf die Gleichung der gegebenen Curve selbst zurückkommen. Und weiter können wir alsdann nicht gehen. Wenn aber m eine ganze Zahl und negativ, oder wenn m eine gebrochene Zahl ist, so können wir Curven jeder beliebigen Classe bestimmen, die mit der gegebenen Curve einen Contact der entsprechenden Ordnung haben.

Wenn wir zum Beispiel folgende Gleichung nehmen:

$$\frac{B}{u} + \frac{D}{v} + \frac{E}{w} = 0,$$

welche nach der 468. Nummer eine, die beiden Coordinaten-Axen berührende, Parabel darstellt, so erhalten wir für den Berührungspunct auf einer gegebenen Tangente (w', v', u') folgende Gleichung:

---

*) Wenn wir, wie gewöhnlich, irgend eine Curve durch eine Gleichung zwischen y und x darstellen, so können wir diese Gleichung nach der Bemerkung zur 416. Nummer durch Hinzufügung einer dritten veränderlichen Grösse z zugleich homogen machen und dann auf solche Gleichungen eine Theorie des Contactes gründen, die der, im Texte entwickelten, ganz analog ist.

Wir wollen uns hier mit einer blossen Andeutung begnügen. Es sei:

$$Z = 0,$$

irgend eine homogene Gleichung irgend eines m. Grades zwischen z, y und x, durch welche also eine Curve der m. Ordnung dargestellt wird. Wenn (z', y', x') irgend ein gegebener Punct dieser Curve ist, so ist:

$$\left(\frac{dZ}{dz}\right)z + \left(\frac{dZ}{dy}\right)y + \left(\frac{dZ}{dx}\right)x = 0,$$

die Gleichung der Tangente in diesem Puncte und:

$$\left(\frac{d^2Z}{dz^2}\right)z^2 + 2\left(\frac{d^2Z}{dydz}\right)yz + \left(\frac{d^2Z}{dy^2}\right)y^2 + 2\left(\frac{d^2Z}{dxdz}\right)xz + 2\left(\frac{d^2Z}{dxdy}\right)xy + \left(\frac{d^2Z}{dx^2}\right)x^2 = 0,$$

die Gleichung einer osculirenden Curve zweiter Ordnung in demselben Puncte, u. s. w., wenn wir die partiellen Differential-Coefficienten auf den Punct (z', y', x') beziehen.

$$B\frac{u}{u'^2}+D\frac{v}{v'^2}+E\frac{w}{w'^2}=0.$$

Wir erhalten ferner:

$$B\frac{u^2}{u'^3}+D\frac{v^2}{v'^3}+E\frac{w^2}{w'^3}=0,$$

für die Gleichung einer die gegebene Parabel auf der gegebenen Tangente (w', v', u') osculirenden Curve zweiter Classe. Diese Curve zweiter Classe hat, was die Form ihrer Gleichung zeigt, zwei zugeordnete Durchmesser, welche mit den beiden Coordinaten-Axen zusammenfallen.

547. Wir können auch, ohne dabei irgend einer Schwierigkeit zu begegnen, auf die in dem Vorstehenden entwickelte Theorie des Contactes Gränz-Betrachtungen anwenden, und ihr dadurch, in jeder Beziehung, dieselbe Evidenz geben als der gewöhnlichen Theorie. Da diese Betrachtungen indess nichts Neues darbieten würden, so gehe ich hier in dieselben nicht ein, und da wir überdiess später die verschiedenen Arten des Contactes zweier Curven noch aus einem andern Gesichtspuncte betrachten werden, so beschränken wir uns in dem Folgenden bloss auf die Berührung zwischen einer gegebenen Curve zweiter Classe und einer gegebenen geraden Linie.

Es sei wiederum:

$$Aw^2+2Bvw+Cv^2+2Duw+2Euv+Fu^2=0,$$

die allgemeine Gleichung der Curven dieser Classe, und (w'', v'', u'') eine gegebene, diese Curve berührende, gerade Linie. Bezeichnen wir den ersten Theil der vorstehenden Gleichung, der Kürze halber, durch U, so kommt:

$$\frac{dU}{dw}=2(Aw+Bv+Du),$$

$$\frac{dU}{dv}=2(Bw+Cv+Eu),$$

$$\frac{dU}{du}=2(Dw+Ev+Fu);$$

und mithin erhält man für die Gleichung des Berührungspunctes auf der gegebenen geraden Linie:

$$(Aw''+Bv''+Du'')w+(Bw''+Cv''+Eu'')v+(Dw''+Ev''+Fu'')u=0.$$

548. Die End-Gleichung der vorigen Nummer ist in Beziehung auf die drei veränderlichen Grössen w, v und u und die drei Coordinaten der gegebenen Tangente w'', v'' und u'' symmetrisch, so dass wir sie auch auf folgende Weise schreiben können:

$$(Aw+Bv+Du)w''+(Bw+Cv+Eu)v''+(Dw+Ev+Fu)u''=0. \quad (1)$$

Wenn noch irgend eine zweite Tangente (w''', v''', u''') der Curve zweiter Classe gegeben ist, so erhalten wir für den Berührungspunct auf dieser zweiten Tangente:

$$(Aw+Bv+Du)w'''+(Bw+Cv+Eu)v'''+(Dw+Ev+Fu)u'''=0. \quad (2)$$

Die beiden Gleichungen (1) und (2) werden beide befriedigt, wenn wir in dieselben die Coordinaten-Werthe derjenigen geraden Linie, welche die beiden Berührungspuncte auf den beiden Tangenten verbindet, statt der veränderlichen Grössen substituiren. Substituiren wir wirklich, indem wir jene Coordinaten-Werthe w', v' und u' nennen und betrachten alsdann w'', v'' und u'' in (1) und w''', v''' und u''' in (2) als veränderlich und lassen demzufolge die Accente fort, so gehen beide Gleichungen in folgende über:

$$(Aw'+Bv'+Du')w+(Bw'+Cv'+Eu')v+(Dw'+Ev'+Fu')u=0. \quad (3)$$

Diese Gleichung stellt einen Punct dar, und dieser Punct ist kein anderer als der

Digitized by Google

Durchschnitt der beiden gegebenen Tangenten (w''', v''', u''') und (w'', v'', u''), weil die Coordinaten beider Tangenten die letzte Gleichung befriedigen. Die Gleichung (3) stellt den Pol der geraden Linie (w', v', u'), die wir als irgend eine gegebene betrachten können, dar. Wenn die gegebene gerade Linie die gegebene Curve berührt, so ist der Berührungspunct ihr Pol. Auch wenn die gegebene gerade Linie der Curve nicht begegnet, nennen wir den durch (3) dargestellten Punct ihren Pol. Die Gleichung (3) stellt immer einen reellen Punct dar, also auch dann, wenn die gegebene Curve zweiter Classe in ein System von zwei Puncten übergeht oder imaginär wird. In dem erstern Falle haben wir bereits in der 526. Nummer die geometrische Construction des Poles nachgewiesen.

549. Wenn wir für die gegebene gerade Linie (w', v', n'), deren Pol wir nach dem Vorstehenden durch die Gleichung:

$$\frac{dU}{dw}w' + \frac{dU}{dv}v' + \frac{dU}{dn}n' = 0,$$

darstellen können, insbesondere die erste Axe nehmen, so müssen wir $w' = 0$ und $v' = 0$ setzen, und erhalten hiernach für ihren Pol die Gleichung

$$\frac{dU}{dw} = 2(Dw + Ev + Fu) = 0.$$

Auf ähnliche Weise erhalten wir für die Gleichung des Poles der zweiten Axe, indem wir $w' = 0$ und $n' = 0$ setzen:

$$\frac{dU}{dv} = 2(Bw + Cv + Eu) = 0.$$

Indem wir endlich $v' = 0$ und $u' = 0$ setzen, ergibt sich

$$\frac{dU}{dw} = 2(Aw + Bv + Du) = 0$$

für die Gleichung des Poles einer unendlich weit entfernten geraden Linie; eines Punctes also, durch den alle geraden Linien gehen, welche die Berührungspuncte auf irgend zweien parallelen Tangenten verbinden, des Mittelpunctes der Curve.

550. Zu den Resultaten der vorigen Nummer können wir auch gelangen, indem wir den Gegenstand aus einem andern Gesichtspuncte betrachten. Wenn wir nemlich n etwa gleich Eins setzen, so kommt:

$$\frac{dw}{dv} = -\frac{\frac{dU}{dv}}{\frac{dU}{dw}}.$$

Für ein *minimum* oder *maximum* von w verschwindet bekanntlich $\frac{dw}{dv}$ und es ergibt sich:

$$\frac{dU}{dv} = 0.$$

Da w das von der jedesmaligen geraden Linie auf der zweiten Axe bestimmte, negativ genommene, Segment bedeutet, so bezieht sich jenes *maximum* und *minimum* auf die Tangenten in den beiden Durchschnittspuncten der zweiten Axe mit der Curve zweiter Classe. Diese Puncte, welche als die Durchschnittspuncte zweier unmittelbar auf einander folgender Tangenten der Curve anzusehen sind, bilden den Uebergang von solchen Puncten der zweiten Axe, von welchen aus zwei reelle Tangenten sich an die Curve lagen lassen, zu solchen Puncten, für welche diese Tangenten imaginär werden. Da die letzte

Gleichung vom ersten Grade ist, so stellt sie also denjenigen Punct dar, in welchen die beiden Tangenten in jenen beiden Durchschnittspuncten der Curve mit der zweiten Axe sich schneiden.

Bei derselben Voraussetzung als eben; verschwindet $\frac{dv}{dw}$ und v wird also *maximum* oder *minimum*, wenn:

$$\frac{dU}{dw} = 0.$$

v bezieht sich auf die Richtung der jedesmaligen geraden Linie und wird folglich *maximum* oder *minimum* für die beiden Asymptoten der Curve zweiter Classe. Die letzte Gleichung wird also befriedigt, wenn wir die Coordinaten-Werthe dieser beiden Asymptoten in dieselbe substituiren, und stellt, da sie überdiess vom ersten Grade ist, den Durchschnitt der beiden Asymptoten, den Mittelpunct der Curve, dar. *)

---

*) Wir kommen zu allgemeinen Resultaten, wenn wir die obige Schlussweise auf Curven irgend einer beliebigen Classe anwenden. Es sei:

$$U = 0, \qquad (1)$$

die Gleichung irgend einer Curve irgend einer m. Classe. Alsdann ist

$$\frac{dU}{dv} = 0 \qquad (2)$$

eine Gleichung des (m—1). Grades, die eine Curve derselben Classe darstellt, welche von denjenigen Tangenten der gegebenen Curve, für welche w *maximum* oder *minimum* ist, also von den Tangenten in den Durchschnittspuncten der letztgenannten Curve mit der zweiten Axe, ebenfalls berührt wird. Die Coordinaten dieser Tangenten erhalten wir durch Verbindung der vorstehenden beiden Gleichungen. Die Zahl dieser Tangenten beträgt also, im Allgemeinen, m(m—1) und in eben so vielen Puncten wird die gegebene Curve m. Classe von der zweiten Axe geschnitten; oder, mit andern Worten, eine Curve m. Classe ist, im Allgemeinen, von der m(m—1). Ordnung. Da wir für die zweite Axe jede beliebige nehmen können, so erhalten wir zugleich folgenden bekannten Satz:

Die m(m—1) Tangenten in den Durchschnittspuncten einer beliebigen geraden Linie, mit einer Curve m. Classe, berühren ein und dieselbe Curve (m—1). Classe.

Die Gleichung:

$$\frac{dU}{dw} = 0, \qquad (3)$$

stellt ebenfalls eine Curve (m—1). Classe dar. Diese Curve wird von denjenigen Tangenten der gegebenen Curve, für welche v *maximum* oder *minimum* ist, also von den Asymptoten der letztgenannten Curve, berührt. Zur Bestimmung dieser Asymptoten, deren es im Allgemeinen m(m—1) gibt, brauchen wir also nur zwischen (1) und (3) zu eliminiren. Zugleich ergibt sich folgender Satz:

Die m(m—1) Asymptoten einer Curve m. Classe umhüllen ein und dieselbe Curve (m—1). Classe.

Es folgt dieser Satz aus dem vorhergehenden, wenn wir, was erlaubt ist, annehmen, dass die Berührungspuncte auf den Asymptoten, als unendlich weit entfernt liegende Puncte derselben Ebene, in gerader Linie liegen. —

Wenn wir von irgend einer homogenen Gleichung des m. Grades zwischen x, y und z ausgehen und diese Gleichung, der Kürze halber, durch

$$Z = 0, \qquad (4)$$

bezeichnen, so stellen die Gleichungen:

$$\frac{dZ}{dx} = 0, \qquad \frac{dZ}{dy} = 0, \qquad (5)$$

Curven der (m—1). Ordnung dar, welche durch diejenigen m(m—1) Puncte der gegebenen Curve gehen, denen ein *maximum* oder *minimum* der Ordinaten und Abscissen entspricht und die also die Berührungspuncte auf denjenigen Tangenten der gegebenen Curve sind, welche der ersten und zweiten Coordinaten-Axe parallel sind. Ebenso stellt die Gleichung:

Digitized by Google

551. Wir wollen in dieser Nummer diejenige Bedingungs-Gleichung entwickeln, welche Statt finden muss, wenn der durch die Gleichung:

$$x'w+x'v+y'u = 0, \qquad (1)$$

dargestellte Punct, auf einer gegebenen Curve zweiter Classe:

$$Aw^2+2Bvw+Cv^2+2Duw+2Euv+Fu^2 = 0, \qquad (2)$$

liegen soll. Wenn die Gleichung des gegebenen Punctes mit der allgemeinen Gleichung des Berührungspunctes auf einer durch diesen Punct gehenden Tangente (w", v", u"), identisch sein soll, so erhält man:

$$\frac{Bw''+Cv''+Eu''}{Aw''+Bv''+Du''} = \frac{x'}{z'}, \qquad \frac{Dw''+Ev''+Fu''}{Aw''+Bv''+Du''} = \frac{y'}{z'}. \qquad (3)$$

Neben diesen beiden Gleichungen besteht auch folgende:

$$x'w''+x'v''+y'u'' = 0, \qquad (4)$$

und um die gesuchte Bedingungs-Gleichung zu erhalten, brauchen wir nur zwischen den vorstehenden drei Gleichungen die Coordinaten der geraden Linie (w", v", u") zu eliminiren. Auf diese Weise kommt:

$$(B^2-AC)y'^2+2(AE-BD)x'y'+(D^2-AF)x'^2+2(CD-BE)y'z'+2(BF-DE)x'z'+(E^2-CF)z'^2 = 0, \qquad (5)$$

eine Gleichung, die derjenigen analog ist, zu der wir auf einem andern Wege schon in der 484. Nummer gekommen sind.

Wir hätten auch statt der Gleichung (4) folgende Gleichung:

$$Aw''^2+2Bv''w''+Cv''^2+2Du''w''+2Eu''v''+Fu''^2 = 0,$$

nehmen und zwischen dieser Gleichung und den beiden Gleichungen (3) w", v" und u" eliminiren können. Diess ergibt sich *a priori*, weil der gegebene Punct auf der Curve liegen soll, kann aber auch ohne Mühe direct nachgewiesen werden. Denn, addiren wir die beiden Gleichungen (3), nachdem wir die erste derselben mit v" und die zweite mit u" multiplicirt haben, so reducirt sich der erste Theil der resultirenden Gleichung, wenn wir zugleich auf die letzte Gleichung Rücksicht nehmen, auf (—w") und somit erhalten wir die Gleichung (4).

552. Wenn wir y', x' und z' als veränderlich betrachten, so ist (5) die Gleichung zwischen Punct-Coordinaten der durch (2) dargestellten Curve zweiter Classe. Der Kürze halber, wollen wir diese Gleichung auf folgende Weise schreiben:

$$ay^2+2hxy+cx^2+2dyz+2exz+fz^2 = 0, \qquad (6)$$

indem wir die Accente fortlassen und

$$\frac{b}{a} = \frac{AE-BD}{B^2-AC}, \qquad \frac{c}{a} = \frac{D^2-AF}{B^2-AC},$$

$$\frac{dZ}{dz} = 0, \qquad (6)$$

eine Curve der (m—1). Ordnung dar, welche durch diejenigen m(m—1) Puncte geht, in welchen die durch den Anfangspunct der Coordinaten gehenden Tangenten der gegebenen Curve dieselbe berühren; denn diesen Puncten entspricht ein *maximum* oder *minimum* des Quotienten der Abscissen der Puncte der Curve in die Ordinaten derselben (416). Wenn daher die gegebene Curve (4) von der zweiten Ordnung ist, so stellen die Gleichungen (5) diejenigen beiden Durchmesser derselben dar, deren angeordnete der ersten und zweiten Axe parallel sind, und die Gleichung (6) stellt die Polare des Anfangspunctes dar. Wir sehen zugleich, dass eine Curve m. Ordnung im Allgemeinen von der m(m—1). Classe ist, weil an eine solche Curve sich im Allgemeinen, von einem gegebenen Puncte aus, m(m—1) reelle oder imaginäre Tangenten legen lassen.

Digitized by Google

$$\frac{d}{a} = \frac{CD-BE}{B^2-AC}, \qquad \frac{e}{a} = \frac{BF-DE}{B^2-AC}, \qquad (7)$$
$$\frac{f}{a} = \frac{E^2-CF}{B^2-AC},$$

setzen. Wenn wir, umgekehrt, von der Gleichung (6) ausgehen, und die Bedingungs-Gleichung suchen, dass die durch folgende Gleichung:

$$w'z+v'x+u'y = 0,$$

dargestellte gerade Linie die gegebene Curve berühre, so erhalten wir, wenn wir zugleich die Accente von w', v' und u' fortlassen (171):

$$(b^2-ac)w^2+2(ae-bd)vw+(d^2-af)v^2+2(cd-be)uw+2(bf-d2)uv+(e^2-cf)u^2 = 0.$$

Diese Gleichung stellt die durch (6) gegebene Curve zweiter Ordnung (und zweiter Classe) durch Linien-Coordinaten dar und ist also nothwendig mit der ursprünglich gegebenen Gleichung identisch, so dass:

$$\frac{B}{A} = \frac{ae-bd}{b^2-ac}, \qquad \frac{C}{A} = \frac{d^2-af}{b^2-ac},$$
$$\frac{D}{A} = \frac{cd-be}{b^2-ac}, \qquad \frac{E}{A} = \frac{bf-de}{b^2-ac}, \qquad (8)$$
$$\frac{F}{A} = \frac{e^2-ef}{b^2-ac},$$

Die Coefficienten der beiden Gleichungen (2) und (6) werden also gegenseitig gerade auf dieselbe Weise durch einander ausgedrückt. Wir können uns hiervon auch direct überzeugen, ohne die letzten Entwicklungen zu machen; denn aus den Gleichungen (7) erhalten wir nach einigen leichten Umformungen unmittelbar die Gleichungen (8). Umgekehrt erhalten wir auch aus diesen Gleichungen jene. —

553. Wenn wir der Gleichung des Punctes (1), der auf dem Umfange der Curve (2) liegt, folgende Form geben:

$$\pm\frac{u}{u'}+\frac{v}{v'}\mp\frac{w}{w'} = 0, \qquad (9)$$

so sind, wenn wir in dieser Gleichung die obern Zeichen nehmen, w', v' und u' Coordinaten einer Diagonale desjenigen Parallelogrammes, dessen Seiten den Coordinaten-Axen parallel sind und dessen andere Diagonale den Punct (9) mit dem Anfangspuncte verbindet. Es sind ferner w', $\frac{1}{2}v'$ und $\frac{1}{2}u'$, wie man sogleich einsieht, Coordinaten derjenigen geraden Linie, die durch den Punct (9) geht, und die, bis zu den Coordinaten-Axen verlängert, in diesem Puncte halbirt wird.

Wenn wir ferner in der Gleichung (9) die untern Zeichen nehmen, so sind w', v' und u' Coordinaten einer solchen geraden Linie, die derjenigen parallel ist, welche den Punct (9) mit dem Anfangspuncte verbindet, und durch denjenigen Punct der zweiten Axe geht, dessen Ordinate der Ordinate jenes Punctes gleich ist. Es sind $\frac{1}{2}w'$, $\frac{1}{2}v'$ und u' Coordinaten derjenigen geraden Linie, die durch den Punct (9) und denjenigen Punct der zweiten Axe geht, dessen Ordinate der halben Ordinate des Punctes (9) gleich ist, und die also in einen solchen Punct der ersten Axe einschneidet, dessen Abscisse der negativ genommenen Abscisse des Punctes (9) gleich ist.

554. Die Gleichung (5) steigt, wenn wir die Gleichung (9), statt der Gleichung (1), zu Grunde legen, in Beziehung auf die Constanten dieser neuen Gleichung, im Allgemeinen, bis zum vierten Grade und stellt also, wenn wir diese Constanten w', v' und u'

als Linien-Coordinaten und veränderlich betrachten, im Allgemeinen eine Curve vierter Classe dar. Wir wollen einige Fälle betrachten, wo der Grad dieser Gleichung sich reducirt.

Wenn wir von folgender Gleichung:

$$Aw^2+2Euv = 0,$$

die eine auf ihre Asymptoten als Coordinaten-Axen bezogene Hyperbel darstellt (461), ausgehen, so verwandelt sich die Gleichung (5) für diesen Fall in folgende:

$$2Ax'y'+Ez'^2 = 0.$$

Wenn wir in diese Gleichung statt x', y' und z' die Constanten der mit den obern Zeichen genommenen Gleichung (9) einführen, indem wir $z' = -\frac{1}{w'}$, $x' = \frac{1}{v'}$ und $y' = \frac{1}{u'}$ setzen, so ergibt sich:

$$2Aw'^2+Eu'v' = 0,$$

und endlich, wenn wir $\frac{1}{2}v' = v$ und $\frac{1}{2}u' = u$ setzen, so kommen wir zu der Gleichung:

$$Aw^2+2Euv = 0,$$

zurück, von welcher wir ursprünglich ausgegangen sind. Wenn wir dieses Resultat nach der vorigen Nummer deuten, so erhalten wir den allbekannten Satz, dass jede von den Asymptoten einer Hyperbel begränzte Tangente derselben im Berührungspuncte halbirt wird.

555. Wenn wir von der Gleichung:

$$2Bvw+Fu^2 = 0.$$

welche eine Parabel darstellt, die auf einen ihrer Durchmesser, als erste, und die Tangente im Scheitel desselben, als zweite Axe, bezogen ist, ausgehen, so verwandelt sich die Gleichung (5) in folgende:

$$By'^2+2Fx'z' = 0.$$

Wenn wir in diese Gleichung die Constanten der mit den untern Zeichen genommenen Gleichung (9) einführen, und also $z' = \frac{1}{w'}$, $x' = \frac{1}{v'}$ und $y' = -\frac{1}{u'}$ setzen, so kommt:

$$Bv'w'+2Fu'^2 = 0,$$

und endlich, indem wir w und v statt $\frac{1}{2}w'$ und $\frac{1}{2}v'$ schreiben:

$$2Bvw+Fu^2 = 0:$$

die Gleichung, von der wir ursprünglich ausgegangen sind. Deuten wir dieses Resultat nach der 553. Nummer, so erhalten wir den allbekannten Satz, dass für jeden Punct der Parabel (auf die in dem Obigen bezeichneten Coordinaten-Axen bezogen) die Subtangente der doppelten Abscisse gleich ist.

556. Wenn die gegebene Curve eine Hyperbel ist, und auf Coordinaten-Axen, die auf dem Umfange derselben sich schneiden und den Asymptoten parallel sind, bezogen wird, und demnach folgende Bedingungs-Gleichungen Statt finden:

$$B^2-AC = 0, \qquad D^2-AF = 0, \qquad E^2-CF = 0,$$

so reducirt sich die Gleichung (5) auf folgende:

$$(AE-BD)x'y'+(CD-BE)y'z'+(BF-DE)x'z' = 0.$$

Diese Gleichung verwandelt sich, da nach den vorstehenden Bedingungs-Gleichungen:

$$\frac{CD-BE}{AE-BD} = -\frac{B}{A} = +\frac{E}{D}, \qquad \frac{BF-DE}{AE-BD} = -\frac{D}{A} = -\frac{F}{D},$$

in jede von folgenden beiden:

$$Ax'y' - By'z' - Dx'z' = u, \qquad (10)$$
$$Dx'y' + Ey'z' - Fx'z' = o. \qquad (11)$$

Wenn wir nun erstens in die Gleichung (10) die Constanten der mit den obern Zeichen genommenen Gleichung (9) einführen, indem wir $z' = -\frac{1}{w}$, $x' = \frac{1}{v}$, und $y = \frac{1}{u}$, setzen, so verwandelt sich dieselbe, wenn wir redneiren und die Accente fortlassen, in folgende Gleichung:

$$Aw + Bv + Du = o,$$

welche, wenn wir w, v und u als veränderlich betrachten, den Mittelpunct der gegebenen Hyperbel darstellt. Deuten wir also nach der 553. Nummer, so erhalten wir folgenden bekannten Satz:

Eine Diagonale aller derjenigen Parallelogramme, deren zwei Winkelpuncte auf einer gegebenen Hyperbel liegen und deren Seiten den Asymptoten derselben parallel sind, geht immer durch den Mittelpunct der Hyperbel. (283)

Wenn wir in der letzten Gleichung v und u mit 2v und 2u vertauschen, so ergibt sich:

$$Aw + 2Bv + 2Du = o.$$

Diese Gleichung stellt einen solchen Punct dar, der auf der gegebenen Hyperbel liegt und zwar auf demjenigen Durchmesser derselben, der zugleich durch den Anfangspunct geht. (533) Wir erhalten also folgenden bekannten Satz:

Wenn man durch einen Endpunct eines beliebigen Durchmessers einer gegebenen Hyperbel zwei den Asymptoten derselben parallele gerade Linien zieht, so wird jede durch den andern Endpunct gehende und von jenen Parallelen begränzte gerade Linie in ihrem Durchschnitte mit der Curve halbirt.

557. Wenn wir zweitens in die Gleichung (11) die Constanten der mit den untern Zeichen genommenen Gleichung (9) einführen und dann die Accente fortlassen, so verwandelt sich dieselbe in folgende:

$$Dw + Ev + Fu = o.$$

Diese Gleichung stellt den Pol der ersten Axe, also denjenigen Punct dar, in welchem die Tangente im Anfangspuncte der jener Axe parallelen Asymptote begegnet. Wenn wir berücksichtigen, dass wir nach einander jeder der beiden Asymptoten der Hyperbel die erste Axe parallel und jeden von zwei gegebenen auf dem Umfange derselben liegenden Puncten zum Anfangspuncte nehmen können, so erhalten wir folgenden Satz:

Wenn zwei Winkelpuncte A und B irgend eines Parallelogramms auf dem Umfange einer gegebenen Hyperbel liegen und die Seiten desselben den Asymptoten der Curve parallel sind, so bilden diejenigen beiden geraden Linien, welche durch die beiden übrigen Winkelpuncte des Parallelogramms gehen und der die Winkelpuncte A und B verbindenden geraden Linie parallel sind, die beiden Asymptoten und die beiden Tangenten der gegebenen Hyperbel in den beiden Puncten A und B ein Viereck mit seinen beiden Diagonalen.

Wir können hiernach leicht, wenn eine Asymptote einer Hyperbel, die andere Asymptote der Richtung nach, und zwei Puncte gegeben sind, in diesen Puncten die Tangenten construiren und die zweite Asymptote vollständig bestimmen. Wir können auch, wenn die Richtung der beiden Asymptoten und drei Puncte einer Hyperbel gegeben sind, die beiden Asymptoten bestimmen und zugleich die Tangenten in den gegebe-

Digitized by Google

nen Puncten construiren. Da wir die drei gegebenen Puncte auf dreifache Weise zu zwei combiniren können, so erhalten wir drei Puncte jeder der beiden Asymptoten, und somit auch einen Satz über den Durchschnitt gerader Linien.

Wenn wir in der letzten Gleichung 2w und 2v für w und v schreiben, so verwandelt sich dieselbe in folgende:

$$2Dw+2Ev+Fu = 0;$$

eine Gleichung, deren geometrische Bedeutung die 533. Nummer enthält. Auch an diesen Fall knüpfen sich Sätze und Constructionen, deren Herleitung keine Schwierigkeit hat.

558. Wenn der durch die Gleichung (1) dargestellte Punct auf einer gegebenen geraden Linie (v', u') liegt, so können wir dieser Gleichung, indem wir $w = z' = 1$ und $\frac{y'}{x'} = a$ setzen, folgende Form geben:

$$(v-v')+a(u-u') = 0,$$

oder, wenn wir zugleich, um homogen zu machen, wiederum w hinzufügen:

$$(v'+au')w-v-au = 0. \qquad (12)$$

Die Gleichung (5) verwandelt sich hiernach, indem wir $z' = v'+au'$, $x' = -1$ und $y' = -a$ setzen, in folgende:

$$(B^2-AC)a^2+2(AE-BD)a+(D^2-AF)-2(CD-BE)(av'+a^2u')-2(BF-DE)(v'+au')+(E^2-CF)(v'+au')^2 = 0. \qquad (13)$$

Wenn wir a als gegeben betrachten; so liegt der Punct (y', x'), der durch die Gleichung (1) und (12) dargestellt wird, auf der geraden Linie

$$y = ax, \qquad (14)$$

die durch den Anfangspunct der Coordinaten geht und mit der ersten Coordinaten-Axe einen Winkel bildet, dessen trigonometrische Tangente a ist. Betrachten wir daher in (12) v' und u' als beliebig zu bestimmende Grössen, so stellt, bei gehöriger Bestimmung derselben, diese Gleichung jeden beliebigen Punct der geraden Linie (14) dar. Wenn wir in der Gleichung (13) v' und u' als veränderlich betrachten, so stellt dieselbe, wie ihre Form zeigt, ein System von zwei Puncten dar: diese beiden Puncte sind also keine andern als die beiden Durchschnittspuncte der gegebenen Curve (2) und der geraden Linie (14).

559. Wenn eine zweite gerade Linie (v'', u'') gegeben ist, auf welcher der Punct (12) liegt, so erhalten wir:

$$a = \frac{v''-v'}{u''-u'}, \qquad v'+au' = \frac{u''v'-v''u'}{u''-u'};$$

und wenn wir hiernach aus (13) a eliminiren, so kommt:

$$(B^2-AC)(v''-v')^2-2(AE-BD)(v''-v')(u''-u')+(D^2-AF)(u''-u')^2+2(CD-BE)(v''-v')(u''v'-v''u')-2(BF-DE)(u''-u')(u''v'-v''u')+(E^2-CF)(u''v'-v''u')^2 = 0: \qquad (15)$$

eine in Beziehung auf v'', u'' und v', u' symmetrische Gleichung. Diese Gleichung drückt aus, dass derjenige Punct, welcher im Durchschnitte der beiden geraden Linien (v'', u'') und (v', u') liegt, und dessen Gleichung folgende ist:

$$v-v' = \frac{v''-v'}{u''-u'}(u-u'),$$

ein Punct des Umfanges der gegebenen Curve (2) ist. Wenn wir v'' und u'' als beliebige Constanten betrachten, so können wir durch die letzte Gleichung jeden beliebigen Punct

der geraden Linie (v', u') darstellen. Betrachten wir daher in der Gleichung (15) dieselben Grössen v'' und u'' als veränderliche Grössen, so sind die beiden Puncte, welche diese Gleichung darstellt, offenbar die Durchschnittspuncte der gegebenen Curve (2) mit der gegebenen geraden Linie (v', u').

Ich verweile hier nicht bei der Discussion der Gleichungen (13) und (15).

§. 6.

Zusammenstellung von Oertern zweiter Classe mit gemeinschaftlichem Brennpuncte.

560. Wir haben im ersten Paragraphen dieses Abschnittes gesehen, dass wir durch schickliche Verlegung des Anfangspunctes der Coordinaten, der allgemeinen Gleichung der Curven zweiter Classe folgende Form geben können:

$$(v-v')^2+(u-u')^2 = k^2. \qquad (1)$$

Bei der Annahme rechtwinkliger Coordinaten-Axen, auf die wir uns hierbei beschränken wollen, ist alsdann ein Brennpunct der dargestellten Curve Anfangspunct der Coordinaten.

Das Erste, was uns hier entgegentritt, ist die Frage nach der geometrischen Bedeutung der drei Constanten in der vorstehenden Gleichung. Zwei dieser drei Constanten v' und u' können wir als die Coordinaten einer gegebenen geraden Linie ansehen und dieselbe Directrix nennen. Wir wollen zunächst diese gerade Linie bestimmen.

Für die Gleichung des Poles der zweiten Axe erhalten wir (549), indem wir, in Beziehung auf v, die Gleichung der Curve differentiiren:

$$v-v' = 0: \qquad (2)$$

also denjenigen Punct der ersten Axe, dessen Abscisse gleich $\left(-\frac{1}{v'}\right)$ ist. Auf gleiche Weise erhalten wir, indem wir in Beziehung auf u differentiiren, für den Pol der ersten Axe folgende Gleichung:

$$u-u' = 0, \qquad (3)$$

die denjenigen Punct der zweiten Axe darstellt, dessen Ordinate gleich $\left(-\frac{1}{u'}\right)$ ist. Der Pol der ersten Axe liegt also auf der zweiten Axe, und der Pol dieser Axe auf jener.

Die gerade Linie (v', u') oder die Directrix geht durch die beiden Puncte (2) und (3), also durch die Pole der beiden Axen, und ist demnach keine andere als die Polare des Anfangspunctes, die Polare eines Brennpunctes der Curve zweiter Classe. Sie ist unabhängig von der Richtung der rechtwinkligen Coordinaten-Axen.

Wenn v' = 0, so ist die Directrix der ersten Axe parallel, wenn u' = 0, so ist dieselbe der zweiten Axe parallel; in dem ersten Falle fällt also die Hauptaxe der Curve in die zweite Coordinaten-Axe, in dem zweiten Falle fällt dieselbe in die erste Coordinaten-Axe. Wenn wir zugleich v' = 0 und u' = 0 setzen, so liegt die Directrix unendlich weit; die Gleichung:

$$v^2+u^2 = k^2,$$

auf welche sich die Gleichung (1) reducirt, zeigt aber, dass alsdann die bezügliche Curve ein Kreis ist, dessen Mittelpunct in den Anfangspunct der Coordinaten fällt.

Digitized by Google

561. Wenn wir in der Gleichung (1) $v = v'$ setzen, so ergibt sich:

$$u = n' \pm k,$$

und wenn wir diese beiden Werthe von u durch u' und u'' unterscheiden, so kommt

$$u' - u'' = 2k.$$

Diese beiden Werthe beziehen sich auf diejenigen beiden Tangenten der Curve, die durch den Durchschnitt der Directrix mit der ersten Axe gehen. Da dieser Punct der Pol der zweiten Axe ist, so fallen die Berührungspuncte auf jenen beiden Tangenten in diese zweite Axe. u' und u'' bedeuten also die reciproken Werthe derjenigen Segmente dieser Axe, welche zwischen dem Brennpuncte und den Durchschnitten derselben mit der Curve liegen. Nennen wir diese Segmente r und r', so erhalten wir, mit Berücksichtigung ihrer Lage, aus der letzten Gleichung:

$$\frac{1}{r} \pm \frac{1}{r'} = 2k;$$

wobei wir für den Fall der Ellipse und Parabel immer das obere Zeichen, für den Fall der Hyperbel das obere oder untere Zeichen nehmen müssen, je nachdem die zweite Axe nur einem oder beiden Zweigen der Hyperbel begegnet.

Auf gleiche Weise erhalten wir, wenn wir diejenigen Segmente, welche auf der ersten Axe zwischen den Durchschnitten derselben mit der Curve und dem Brennpuncte liegen, s und s' nennen:

$$\frac{1}{s} \pm \frac{1}{s'} = 2k.$$

Die halbe Summe der reciproken Werthe derjenigen beiden Segmente einer beliebigen, durch einen Brennpunct einer Ellipse oder einer Parabel gehenden, geraden Linie, die zwischen diesem Puncte und den Durchschnitten der geraden Linie mit der Curve liegen, ist constant und gleich 2k (503). Für den Fall der Hyperbel ist die Summe oder die Differenz jener reciproken Werthe constant und gleich 2k, je nachdem die durch einen Brennpunct gehende gerade Linie nur einen Zweig derselben oder beide Zweige schneidet. Es ist also auch k gleich dem reciproken Werthe derjenigen halben Chorde der gegebenen Curve, die im Brennpuncte halbirt wird, und mithin auf der Axe der Curve senkrecht steht.

562. Eh wir weiter gehen, wollen wir die Constanten folgender Gleichung:

$$(v-v')^2 + 2(v-v')(u-u')\cos\vartheta + (u-u')^2 = k^2,$$

betrachten. Wir können durch diese Gleichung jede beliebige Curve zweiter Classe darstellen, indem wir, wie oben, den Brennpunct zum Anfangspuncte nehmen, aber Coordinaten-Axen wählen, die mit einander irgend einen beliebigen Winkel ϑ bilden (503). Für die Pole der zweiten und ersten Axe erhalten wir, indem wir differentiiren, folgende Gleichungen:

$$(v-v') + (u-u')\cos\vartheta = 0,$$
$$(u-u') + (v-v')\cos\vartheta = 0.$$

Diese Gleichungen werden beide befriedigt, wenn wir zugleich

$$v = v', \qquad u = u',$$

setzen, die gerade Linie (v', u') geht also durch die Pole der beiden Axen, ist die Polare des Anfangspunctes, **Directrix** der Curve.

Die Constante k können wir auf demselben Wege bestimmen, als in der vorigen Nummer, und begegnen alsdann einem neuen geometrischen Satze.

Digitized by Google

563. Wir wenden uns nun zur Gleichung

$$(v-v')^2+(u-u')^2 = k^2 \qquad (1)$$

zurück, und wollen die verschiedenen Arten von Curven, welche diese Gleichung, bei verschiedener Constanten-Bestimmung, darstellen kann, discutiren. Der für diese Discussion, in Beziehung auf die allgemeine Gleichung:

$$Aw^2+2Bvw+Cv^2+2Duw+2Euv+Fu^2 = o,$$

characteristische Ausdruck:

$$(AE-BD)^2-(AC-B^2)(AF-D^2),$$

verwandelt sich, für den Fall der Gleichung (1), indem wir

$$A = v'^2+u'^2-k^2, \quad B = -v', \quad D = -u', \quad C = F = 1, \quad E = o,$$

setzen, in folgenden:

$$Ak^2. \qquad (2)$$

Es gehen ferner die beiden Ausdrücke:

$$AC-B^2, \qquad AF-D^2,$$

in folgende über:

$$u'^2-k^2, \qquad v'^2-k^2. \qquad (3)$$

Wenn die gegebene Gleichung (1) eine Hyperbel darstellen soll, so muss der Ausdruck (2) positiv sein (457), und also auch A, so lange k reell bleibt. Hiernach kommt:

$$v'^2+u'^2 > k^2.$$

Wenn wir annehmen, k^2 sei negativ, so müsste A negativ sein, damit der Ausdruck (2) positiv würde, so dass:

$$v'^2+u'^2 < k^2;$$

eine Bedingung, die für den in Rede stehenden Fall nicht erfüllt werden kann, so lange v' und u', und also auch die Directrix reell bleiben sollen.

Die zweite oder erste Coordinaten-Axe ist einer der beiden Asymptoten der Hyperbel parallel (459), wenn

$$k^2 = u'^2, \text{ oder } k^2 = v'^2.$$

Die geometrische Deutung dieser Resultate gibt uns folgenden Satz:

Wenn man durch einen Brennpunct einer gegebenen Hyperbel den Asymptoten derselben zwei gerade Linien parallel zieht, so liegen die Durchschnitte dieser beiden geraden Linien mit der Directrix auf dem Umfange eines Kreises, dessen ein Durchmesser die durch den Brennpunct gehende, der Directrix parallelle, Chorde der gegebenen Hyperbel ist.

Wenn die Gleichung (1) eine Ellipse darstellen soll, so muss der Ausdruck (2) negativ sein und also auch A, so lange k reell bleibt, und also:

$$k^2 > v'^2+u'^2.$$

Die dargestellte Ellipse ist alsdann immer reell, weil die letzte Bedingung mit sich bringt, dass auch die beiden Ausdrücke (3) negativ werden (456).

Wenn k^2 negativ ist, so ergibt sich, damit der Ausdruck (2) negativ werde:

$$k^2 < v'^2+u'^2.$$

In diesem Falle ist die Curve imaginär, weil alsdann nach der letzten Bedingung die Ausdrücke (3) nothwendig positiv sind.

Die allgemeine Gleichung stellt eine gleichseitige Hyperbel dar, wenn die Bedingungs-Gleichung (490):

$$A(C+F)-(B^2+D^2) = o,$$

Digitized by Google

besteht, welche in vorliegendem Falle in folgende sich verwandelt:

$$2k^2 = v'^2+u'^2.$$

Wenn wir überdiess die Coordinaten-Axen den Asymptoten der gleichseitigen Hyperbel parallel nehmen, so erhält die Gleichung (1) folgende Form:

$$(v-k)^2+(u-k)^2 = k^2.$$

Wenn $k = o$, so verschwindet der Ausdruck (2) und die Gleichung (1) stellt mithin ein System von zwei Puncten dar. Da alsdann aber die beiden Ausdrücke bei (3) negativ werden, so sind diese beiden Puncte nothwendig imaginär, oder, was dasselbe heisst, die Gleichung (1) stellt eine gerade Linie dar. Wir sehen diess auch unmittelbar aus dieser Gleichung. Die dargestellte gerade Linie ist die gemeinschaftliche Directrix aller derjenigen Curven, welche durch die Gleichung (1) dargestellt werden, wenn wir in derselben v' und u' als ein für alle Mal gegeben betrachten und für k nach einander beliebige Werthe nehmen (560).

Wenn endlich $A = o$, also:

$$k^2 = v'^2+u'^2,$$

so stellt die Gleichung (1) eine Parabel dar.

Hiernach stellt, indem wir zusammenfassen, die Gleichung (1), wenn wir derselben folgende Form geben:

$$v^2-2v'v+u^2-2u'u = M,$$

eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel dar, je nachdem M positiv, gleich Null oder negativ ist. Die gerade Linie, welche, im Falle, dass $k = o$ ist, durch diese Gleichung dargestellt wird, bildet den Uebergang von Hyperbeln zu imaginären Curven (521).

564. Es sei wiederum:

$$(v-v')^2+(u-u')^2 = k^2, \qquad (1)$$

die Gleichung irgend einer Curve zweiter Classe und (v'', u'') irgend eine Tangente dieser Curve. Alsdann erhalten wir nach einer leichten Reducion (547):

$$(v''-v')(v-v')+(u''-u')(u-u') = k^2, \qquad (2)$$

für die Gleichung des Berührungspunctes auf der gegebenen Tangente.

Wir können dieselbe Gleichung auch auf folgende Weise schreiben:

$$(v''-v')v+(u''-u')u+N = o,$$

indem wir, der Kürze halber,

$$(v''-v')v'+(u''-u')u'+k^2 = -N,$$

setzen. Zur Bestimmung der Entfernung (D) des Berührungspunctes vom Anfangspuncte der Coordinaten ergibt sich folgender Ausdruck (413):

$$D = \frac{V[(u''-u')^2+(v''-v')^2]}{N},$$

und da (v'', u'') eine Tangente der gegebenen Curve ist, so kommt:

$$D = \frac{k}{N}.$$

Der Abstand (P) desselben Punctes von der Directrix, oder der geraden Linie (v', u') ist nach der 414. Nummer auf folgende Weise bestimmt:

$$P = \frac{k^2}{NV(v'^2+u'^2)}.$$

Man erhält also:

$$\frac{P}{D} = \frac{k}{V(v'^2+u'^2)}. \qquad (3)$$

Da dieser Ausdruck von der besondern Annahme der Tangente (v'', u'') unabhängig ist, so ist klar, dass für alle Puncte der gegebenen Curve das Verhältniss von P zu D dasselbe bleibt. Wenn die gegebene Curve eine Parabel ist, so ist $k = \sqrt{(v'^2+u'^2)}$ und mithin P = D. Für den Fall der Ellipse ist P > D; für den Fall der Hyperbel P < D. Für den Fall der gleichseitigen Hyperbel insbesondere ist $D = P\sqrt{2}$.

Die letzte Gleichung ist, wenn wir P und D als veränderliche Grössen betrachten, als eine Gleichung der Curve anzusehen. Die Coordinaten sind alsdann die Abstände der Puncte der Curve von einer gegebenen geraden Linie (der Directrix), und von einem gegebenen Puncte (dem Brennpuncte).

565. Wenn eine Ellipse oder Hyperbel gegeben ist, so können wir, nach einander, jeden ihrer beiden Brennpuncte zum Anfangspuncte nehmen, und jedem Brennpuncte entspricht eine Directrix. Der constante Quotient von D in P, den wir λ nennen wollen, ist derselbe, gleichviel von welchem der beiden Brennpuncte (die in Beziehung auf die Curve eine symmetrische Lage haben) wir ausgehen mögen. Man erhält daher auch, wenn man die Abstände eines beliebigen Punctes der Curve von den beiden Brennpuncten r und r', und die Entfernung der beiden Directricen von einander d nennt:

$$\frac{d}{r \pm r'} = \lambda,$$

wobei wir das obere Zeichen für den Fall der Ellipse, deren jeder Punct zwischen den beiden Directricen liegt, und das untere Zeichen für den Fall der Hyperbel, deren jeder Punct auf derselben Seite ihrer beiden Directricen sich befindet, nehmen müssen. Betrachten wir ferner nach einander die Abstände der beiden Scheitel der Hauptaxe der Curve von einem beliebigen Brennpuncte derselben und der entsprechenden Directrix, so erhält man:

$$\frac{d}{a} = \lambda,$$

wenn man bemerkt, dass, je nachdem die Curve eine Ellipse oder Hyperbel ist, die Summe oder die Differenz der beiden Abstände von dem Brennpuncte der Hauptaxe gleich ist, und man diese Axe a nennt. Aus den beiden vorstehenden Gleichungen folgt:

$$r \pm r' = a,$$

Die Summe der beiden Abstände jedes Punctes des Umfanges einer gegebenen Ellipse von den beiden Brennpuncten derselben ist constant und gleich ihrer grössern Axe. Die Differenz der beiden Abstände aller Puncte des Umfanges einer gegebenen Hyperbel von den beiden Brennpuncten derselben ist constant und gleich ihrer reellen Axe.

566. Wenn wir die erste Coordinaten-Axe durch den Durchschnittspunct der Directricen irgend zweier gegebenen Curven mit demselben Brennpuncte legen, so entspricht diesen Directricen dasselbe v, und hiernach können wir für die Gleichungen der beiden Curven folgende nehmen:

$$\begin{aligned} (v-v')^2+(u-u')^2 &= k^2, \\ (v-v')^2+(u-u'')^2 &= k'^2. \end{aligned} \qquad (1)$$

Die Werthe der beiden veränderlichen Grössen, welche die beiden vorstehenden Gleichungen zugleich befriedigen, sind die Coordinaten der gemeinschaftlichen Tangenten der beiden durch diese Gleichungen dargestellten Curven. Es ist ersichtlich, dass es solcher gemeinschaftlichen Tangenten nur zwei gibt. Wir erhalten ferner die allgemeine Glei-

chung aller derjenigen Curven zweiter Classe, welche mit den beiden gegebenen denselben Brennpunct und dieselben beiden gemeinschaftlichen Tangenten haben, wenn wir eine der vorstehenden beiden Gleichungen mit einem unbestimmten Coefficienten multipliciren und dann zu der andern Gleichung addiren. Auf diese Weise kommt, nach einigen Reductionen:

$$(v-v')^2+\left(u-\frac{u'+\mu u''}{1+\mu}\right)^2=\frac{(1+\mu)(k^2+\mu k'^2)-\mu(u'-u'')^2}{(1+\mu)^2}. \qquad (2)$$

Die Directrix der, bei irgend einer Annahme für μ, durch diese Gleichung dargestellten Curve ist $\left(v', \frac{u'+\mu u''}{1+\mu}\right)$ und geht also durch den Durchschnitt der beiden Directricen (v', u') und (v', u'') der beiden gegebenen Curven.

Wenn wir insbesondere $\mu = -1$ nehmen, so reducirt sich der Grad der resultirenden Gleichung; diese Gleichung stellt alsdann einen Punct dar, und zwar den Durchschnittspunct der beiden gemeinschaftlichen Tangenten aller in Rede stehenden Curven. Wir erhalten für diese Gleichung folgende:

$$2(u''-u')u = k^2-u'^2-k'^2+u''^2, \qquad (3)$$

der Durchschnittspunct der gemeinschaftlichen Tangenten liegt also auf der zweiten Coordinaten-Axe.

Die Directricen aller derjenigen Curven mit demselben Brennpuncte, welche dieselben beiden geraden Linien berühren, gehen durch einen festen Punct. Diejenigen beiden geraden Linien, welche diesen festen Punct und den Durchschnittspunct der beiden gemeinschaftlichen Tangenten aller Curven mit dem Brennpuncte verbinden, bilden am Brennpuncte einen rechten Winkel.

Wenn die beiden Gleichungen (1) insbesondere zwei Parabeln darstellen, so stellt auch die allgemeine Gleichung (2) nur Parabeln dar. Die Gleichung (3) reducirt sich alsdann auf folgende:

$$u = 0,$$

und stellt also einen Punct dar, der, nach der Richtung der zweiten Axe hin, unendlich weit liegt. Alle durch (2) dargestellten Parabeln berühren dieselbe, dieser Axe parallele, gerade Linie.

567. Wir können auch, um zur Gleichung (2) zu gelangen, von einer beliebigen der beiden Gleichungen (1) und von der Gleichung (3) ausgehen, und auf diesem Wege die allgemeine Gleichung aller derjenigen Curven bestimmen, die mit einer gegebenen denselben Brennpunct und zwei gemeinschaftliche Tangenten haben, die in einem gegebenen Puncte sich schneiden. Wenn wir für die Gleichung der gegebenen Curve folgende nehmen:

$$(v-v')^2+(u-u')^2 = k^2,$$

und der Gleichung des gegebenen Punctes, den wir wiederum auf der zweiten Axe annehmen, folgende Form geben:

$$u = c, \qquad (4)$$

so erhalten wir die gesuchte allgemeine Gleichung, wenn wir die letzte Gleichung mit einem unbestimmten Coefficienten, mit (2μ), multipliciren und dann zur vorhergehenden Gleichung addiren. Auf diese Weise kommt nach einer einfachen Reduction:

$$(v-v')^2+(u-(u'-\mu))^2 = k^2+2(c-u')\mu+\mu^2. \qquad (5)$$

Diese Gleichung stellt insbesondere eine gerade Linie dar, wenn wir μ so bestimmen, dass der zweite Theil derselben verschwindet. Setzen wir demnach:

$$\mu^2+2(c-u')\mu+k^2 = o, \qquad (6)$$

so erhalten wir für μ folgende beiden Werthe:

$$\mu = -(c-u')\pm\sqrt{[(c-u')^2-k^2]}.$$

Die Gleichung (5) stellt also, im Allgemeinen, bei gehöriger Bestimmung von μ, jede von zwei geraden Linien dar. Diese beiden geraden Linien fallen zusammen, wenn

$$(c-u')^2 = k^2,$$

und also:

$$c = u'\pm k.$$

Man sieht sogleich, dass in diesem Falle der Punct (4) in einem der beiden Durchschnittspuncte der zweiten Axe mit der gegebenen Curve liegt. Denn, wenn man in der Gleichung der gegebenen Curve $v = v'$ setzt, so erhält man, da der Punct (v', o) der Pol der zweiten Axe ist, das u jener Durchschnittspuncte und für dieses u die obigen beiden Werthe von c. In dem vorliegenden Falle reducirt sich die Gleichung (5) auf folgende:

$$(v-v')^2+(u-c)^2 = o,$$

und stellt also die gerade Linie (v', c) d. h. die Tangente in dem gegebenen, auf der gegebenen Curve liegenden Punct dar.

Die beiden in Rede stehenden geraden Linien sind reell oder imaginär, je nachdem

$$(c-u')^2 > k^2 \quad \text{oder} \quad (c-u')^2 < k^2.$$

Die erste der beiden vorstehenden Bedingungen können wir auch auf folgende Weise schreiben:

$$(c-u'-k)(c-u'+k) > o.$$

In dem Falle, dass die Werthe der beiden Ausdrücke $(u'+k)$ und $(u'-k)$ dasselbe Zeichen haben (was nur für den Fall der Hyperbel Statt finden kann), muss c entweder kleiner oder grösser als die b e i d e n Ausdrücke sein, und der bezügliche Punct liegt also innerhalb der Curve. Wenn die beiden Ausdrücke $(u'+k)$ und $(u'-k)$ Werthe von entgegengesetztem Zeichen haben, und demnach der erste derselben positiv, der zweite negativ ist, so wird die letzte Bedingung erfüllt, wenn wir c positiv und grösser als $(u'+k)$, und wenn wir c negativ und, abgesehen vom Zeichen, grösser als $(u'-k)$ nehmen; der bezügliche Punct liegt also zwischen den beiden Durchschnittspuncten der zweiten Axe mit der Curve, das heisst, innerhalb der Curve. Wir sehen hieraus, dass, wenn der gegebene Punct innerhalb der gegebenen Curve liegt, die Gleichung (5) bei einer zwiefachen Bestimmung von μ eine gerade Linie darstellen kann; dass diese Bestimmung aber imaginär wird für den Fall, dass der gegebene Punct ausserhalb der gegebenen Curve liegt.

Die Gleichung (6) reducirt sich nur dann auf den ersten Grad, wenn k gleich Null ist und wir also, statt von einer Curve, schon von einer geraden Linie ausgehen. Dieser geraden Linie entspricht $\mu = o$. Der andere Werth von μ ist:

$$\mu = 2(u'-c),$$

und durch denselben verwandelt sich die Gleichung (5) in folgende:

$$(v-v')^2+(u-(2c-u'))^2 = o, \qquad (7)$$

und stellt mithin die gerade Linie $(v', 2c-u')$ dar.

Die Ordinate des Durchschnittspunctes derjenigen geraden Linie, von der wir eben ausgegangen sind, mit der zweiten Axe ist $\left(-\frac{1}{u}\right)$, die Ordinate des Durchschnittspunctes der resultirenden geraden Linie (7) mit derselben Axe ist $\left(-\frac{1}{2c-u'}\right)$ und end-

lich die Ordinate des gegebenen Punctes $\left(-\frac{1}{c}\right)$. Da nun folgende Proportion besteht:

$$\frac{1}{u'} : \frac{1}{c} - \frac{1}{u'} = \frac{1}{2c-n'} : \frac{1}{2c-n'} - \frac{1}{c},$$

so folgt, dass die eben bezeichneten drei Puncte und der gemeinschaftliche Brennpunct, welcher Anfangspunct der Coordinaten ist, ein System von vier harmonischen Theilungspuncten bilden.

568. Wenn der gegebene Punct (4) unendlich weit liegt, so ist $c = n$. Die Gleichung (5) geht alsdann in folgende über:

$$(v-v')^2+(n-(n'-\mu))^2 = k^2-2\mu u'+\mu^2, \qquad (8)$$

und stellt solche Curven dar, die zwei der zweiten Axe parallele Tangenten berühren. Die Directricen aller dieser Curven gehen immer noch durch denselben Punct der ersten Axe. Es stellt die letzte Gleichung eine gerade Linie dar, wenn

$$\mu = n' \pm \sqrt{(n'^2-k^2)}.$$

Diese beiden Werthe von μ sind für den Fall, dass die gegebene Curve eine Ellipse ist, immer imaginär (563); für den Fall der Hyperbel nur dann, wenn die zweite Axe eine solche Richtung hat, dass es keine ihr parallele Tangenten gibt. Die beiden Werthe von μ können nur dann zusammenfallen, wenn die gegebene Curve eine Hyperbel und die zweite Axe einer ihrer Asymptoten parallel ist. Es ist diess in Uebereinstimmung mit der vorigen Nummer.

Wenn wir $k = o$ setzen, so stellt die Gleichung (8), ausser der gegebenen geraden Linie, die alsdann an die Stelle der gegebenen Curve tritt, nur noch eine einzige gerade Linie, nemlich folgende:

$$(v', -n'),$$

dar. Es ist klar, dass der von diesen beiden geraden Linien gebildete Winkel von der ersten Axe halbirt wird.

569. Wir wollen uns noch einmal zum allgemeinen Falle zurückwenden. Wenn die Wurzeln der Gleichung (6) imaginär sind, so bleibt der zweite Theil der Gleichung (3), für jeden beliebigen Werth von μ, positiv, und es stellt also auch, für jeden Werth von μ, diese Gleichung eine reelle Curve dar. Die Directricen dieser Curven haben alle möglichen Richtungen. Wenn aber die Wurzeln der Gleichung (6) reell sind, so sind diese Werthe Gränzwerthe von μ, für welche der zweite Theil der Gleichung (5) sein Zeichen ändert, und die bezügliche Curve also, indem sie in eine gerade Linie übergeht, aufhört reell zu sein. Die, diesen Gränzwerthen entsprechenden, beiden geraden Linien bezeichnen zugleich die Gränzen für die Lage der Directricen aller durch die Gleichung (5) dargestellten Curven. Es geht keine Directrix irgend einer dieser Curven durch einen solchen Punct der zweiten Axe, für welchen der Werth von n zwischen:

$$c+\sqrt{((c-n')^2-k^2)} \text{ und } c-\sqrt{((c-n')^2-k^2)},$$

fällt. Diese beiden geraden Linien sind, um mich so auszudrücken, ihre eigenen Directricen; der Anfangspunct der Coordinaten spielt nach der vorstehenden Analyse die Rolle eines Brennpunctes jeder derselben. Wir können diese Bemerkung in Verbindung bringen mit der 477. Nummer, in der wir nachgewiesen haben, dass, analytisch genommen, ein System zweier imaginärer Puncte (oder, was dasselbe heisst, eine gerade Linie) zwei reelle Brennpuncte hat, welche auf einer solchen geraden Linie liegen, die durch den Mittelpunct des Systems geht und senkrecht auf der die beiden imaginären Puncte dessel-

Digitized by Google

ben verbindenden geraden Linie steht. Nach dieser Bemerkung können wir die Mittelpuncte der beiden in Rede stehenden geraden Linien (als Oerter zweiter Classe betrachtet) und ihre zweiten Brennpuncte bestimmen.

570. Wenn irgend zwei Curven zweiter Classe denselben Brennpunct haben, so haben sie, wenn wir von den beiden in diesem Puncte sich schneidenden imaginären Tangenten abstrahiren, nur noch zwei gemeinschaftliche Tangenten. Wenn wir überhaupt die Gleichungen irgend zweier gegebener Curven zu einer neuen Gleichung verbinden, so erhalten wir die Gleichung eines geometrischen Ortes, der von allen gemeinschaftlichen Tangenten der beiden gegebenen Oerter ebenfalls berührt wird. Die Gleichungen zweier Curven zweiter Classe, die denselben Brennpunct haben, lassen sich, indem wir diesen Brennpunct zum Anfangspuncte nehmen, immer zu einer Gleichung des ersten Grades verbinden, die den Durchschnitt ihrer beiden gemeinschaftlichen Tangenten darstellt. Die gemeinschaftlichen Tangenten können imaginär werden: ihr Durchschnitt aber bleibt immer reell.

Als geometrischer Ort (zweiter Classe), der mit den beiden gegebenen Curven dieselben gemeinschaftlichen Tangenten hat, ist indess nicht sowol jener Durchschnittspunct der beiden gemeinschaftlichen Tangenten, allein für sich, zu betrachten, sondern vielmehr das System dieses Punctes und des Brennpunctes. Der Brennpunct des Systems dieser beiden Puncte ist der eine dieser Puncte selbst (477), der gemeinschaftliche Brennpunct aller Curven. Die Directrix geht durch diesen Punct und steht auf derjenigen geraden Linie senkrecht, welche die beiden Puncte des Systems verbindet.

Als Folge der besondern Coordinaten-Bestimmung, indem wir nemlich den gemeinschaftlichen Brennpunct zum Anfangspuncte nehmen, wodurch die Coordinaten v und n desselben unendlich werden, lässt sich die resultirende Gleichung auf den ersten Grad reduciren und dadurch verschwindet aus ihr jede Spur des Brennpunctes. Diese Behauptung können wir durch eine einfache analytische Betrachtung unterstützen. Es stellt nemlich folgende Gleichung:

$$(v-v')^2+(1+\epsilon)(n-n')^2 = k^2,$$

je nachdem ϵ eine sehr kleine Grösse bezeichnet oder gleich Null ist, eine Curve zweiter Classe dar, die auf einen solchen Punct, der, beinah oder ganz, mit einem Brennpuncte der Curve zusammenfällt, als Anfangspunct bezogen ist. Wenn wir von dieser Gleichung folgende abziehen:

$$(v-v')^2+(n-n'')^2 = k'^2,$$

so kommt, indem wir durch C eine constante Grösse bezeichnen:

$$\epsilon n^2+2(n''-(1+\epsilon)n')n = C.$$

Diese Gleichung stellt zwei Puncte der zweiten Axe dar. Je kleiner wir den Werth von ϵ nehmen, desto grösser wird ein Werth von n; setzen wir ϵ gleich Null, so reducirt sich die letzte Gleichung auf den ersten Grad, indem eine Wurzel derselben dadurch ausfällt, dass sie unendlich wird. Diese Gleichung stellt alsdann nur noch einen einzigen Punct dar.

Zu demselben Resultate kommen wir unmittelbar auf folgende Weise. Wenn wir die Gleichungen zweier Curven zweiter Classe, die einen gemeinschaftlichen Brennpunct haben, und auf diesen gemeinschaftlichen Brennpunct, als Anfangspunct der Coordinaten, bezogen sind, durch Einführung von w homogen machen und demnach Gleichungen von folgender Form erhalten:

Digitized by Google

$$(v-v'w)^2+(u-n'w)^2 = k^2w^2,$$
$$(v-v''w)^2+(u-n''w)^2 = k'^2w^2;$$

so ergibt sich durch Verbindung derselben niemals eine Gleichung vom ersten Grade. Denn, wenn wir abziehen, so kommt:

$$w[2(v''-v')v+2(n''-n')u+(v'^2+n'^2-k^2-v''^2-u''^2+k'^2)w] = n:$$

eine Gleichung, die ein System von zwei Puncten darstellt. Wenn wir den Factor w fortlassen, so abstrahiren wir von dem einen dieser beiden Puncte, dem Anfangspuncte der Coordinaten. *)

Hiernach gewinnen wir einen allgemeinern Gesichtspunct und die Entwicklungen der letzten Nummern ordnen sich den allgemeinern des 8. Paragraphen unter.

571. Zur Bestimmung des Mittelpunctes der durch die allgemeine Gleichung (5) dargestellten Curve erhält man sogleich folgende Coordinaten-Werthe:

$$x = \frac{-v'}{v'^2+n'^2-k^2-2\mu c}, \qquad y = \frac{-(n'-\mu)}{v'^2+n'^2-k^2-2\mu c}.$$

Wenn wir μ zwischen diesen beiden Gleichungen eliminiren, so erhalten wir eine solche Beziehung zwischen y und x, die von der besondern Bestimmung dieses Coefficienten unabhängig ist, also die Gleichung des geometrischen Ortes für die Mittelpuncte aller durch die allgemeine Gleichung darstellbaren Curven. Auf diese Weise kommt:

$$2c(v'y-n'x)+(v'^2+n'^2-k^2)x+v' = 0, \qquad (9)$$

Die Mittelpuncte aller Curven zweiter Classe, die denselben Brennpunct und zwei gemeinschaftliche (reelle oder imaginäre) Tangenten haben, liegen also in gerader Linie. Diese gerade Linie halbirt diejenige, welche den Durchschnittspunct der beiden (reellen oder imaginären) gemeinschaftlichen Tangenten mit dem Brennpuncte verbindet; denn, wenn wir in der letzten Gleichung x = o setzen, so kommt:

$$y = -\frac{1}{2c}.$$

Zu den in Rede stehenden Curven, die denselben Brennpunct und zwei gemeinschaftliche Tangenten haben, gehört auch eine Parabel, deren Durchmesser der geraden Linie (9) nothwendig parallel sind. Um die Richtung dieser Durchmesser zu bestimmen, fälle man vom Brennpuncte aus zwei Perpendikel auf die beiden gegebenen Tangenten und verbinde die Fusspuncte derselben durch eine gerade Linie. Diese gerade Linie ist alsdann die Tangente der Parabel im Scheitel ihrer Axe (504) und die Durchmesser derselben stehen auf dieser Tangente senkrecht. Hiernach können wir also die Richtung der geraden Linie (9) bestimmen.

Die letzte Bestimmungsweise fällt ganz fort, wenn die beiden gegebenen Tangenten imaginär sind, sie wird auch dann illusorisch, wenn die beiden gegebenen Tangenten zusammenfallen, das heisst, wenn alle Curven eine gegebene gerade Linie in einem ge-

*) Auf ähnliche Weise lässt sich darthun, dass, wenn wir die Gleichungen zweier ähnlicher und ähnlich liegender Curven, bezogen auf gewöhnliche Punct-Coordinaten, mit einander zu einer Gleichung desselben Grades verbinden, nur deshalb, bei gehöriger Verbindung, die resultirende Gleichung auf den ersten Grad sich reducirt, weil von den beiden gemeinschaftlichen Chorden der beiden Curven die eine unendlich weit liegt, und eine solche gerade Linie lässt sich nur dann in der Gleichung nachweisen, wenn wir, nach der 416. Nummer, die dritte Coordinate z einführen.

Digitized by Google

gebenen Puncte berühren. Im ersten Falle müssen wir zur Gleichung (9) zurückgehen, im zweiten Falle erhalten wir, nach einem bekannten Satze (332), folgende einfache Construction der geraden Linie (9). Man beschreibe über derjenigen geraden Linie, welche den Brennpunct mit dem gegebenen Berührungspuncte auf der gegebenen geraden Linie verbindet, als Durchmesser, einen Kreis. Die zu construirende gerade Linie ist alsdann derjenige Durchmesser dieses Kreises, der durch den zweiten Durchschnittspunct dieses Kreises mit der gegebenen geraden Linie geht.

572. Da die Entfernung der beiden Brennpuncte von einander doppelt so gross ist, als die Entfernung des Mittelpunctes von einem derselben, so erhalten wir unmittelbar die Gleichung des geometrischen Ortes für die zweiten Brennpuncte aller Curven, welche durch die allgemeine Gleichung (5) dargestellt werden, wenn wir in der Gleichung (9) x und y mit $\frac{1}{2}x$ und $\frac{1}{2}y$ vertauschen. Auf diese Weise ergibt sich folgende Gleichung des ersten Grades:

$$2c(v'y-u'x)+(v'^2+u'^2-k^2)x+2v' = 0. \qquad (10)$$

Wenn wir in dieser Gleichung $x = 0$ setzen, so kommt $y = -\frac{1}{c}$; das heisst, die bezügliche gerade Linie geht durch den Durchschnittspunct der beiden gemeinschaftlichen (reellen oder imaginären) Tangenten. Ueberdiess ist sie der geraden Linie (9), dem geometrischen Orte für alle Mittelpuncte, parallel.

Wenn man also vom Brennpuncte aus zwei Perpendikel auf die beiden gemeinschaftlichen Tangenten fällt, die Fusspuncte derselben durch eine gerade Linie verbindet und auf diese gerade Linie, vom Durchschnittspuncte der beiden Tangenten aus ein neues Perpendikel fällt, so ist diese gerade Linie der in Rede stehende geometrische Ort (10).

Man kann diese gerade Linie auch nach dem bekannten Satze bestimmen, dass dieselbe und die zweite Axe, (welche durch den Durchschnitt der gemeinschaftlichen Tangenten und durch den gemeinschaftlichen Brennpunct geht) in denselben von diesen Tangenten gebildeten Scheitelwinkeln liegen und mit diesen Tangenten gleiche Winkel bilden. (330) Es leuchtet dieser Satz auch ohne alle algebraischen Entwicklungen ein. Wenn man nemlich durch den gemeinschaftlichen Brennpunct eine solche gerade Linie zieht, welche von den beiden gemeinschaftlichen Tangenten ein gleichschenkliges Dreieck abschneidet, so können wir diese gerade Linie als die Axe einer durch die allgemeine Gleichung (5) dargestellten Curve ansehn, und erhalten alsdann sogleich den zweiten Brennpunct dieser Curve, indem wir auf dieser Axe einen solchen Punct bestimmen, der mit dem gemeinschaftlichen Brennpuncte, in Beziehung auf die beiden gemeinschaftlichen Tangenten, eine symmetrische Lage hat. Durch diesen Punct ist die in Rede stehende gerade Linie (10) vollkommen bestimmt, und zugleich liegt in der hierdurch angezeigten Construction der Beweis für die oben ausgesprochene Eigenschaft derselben.

573. In den letzten Nummern sind die Elemente zu mehrern Constructionen einer Curve zweiter Classe, welche drei gegebene gerade Linien berührt und einen gegebenen Punct zum Brennpuncte hat, enthalten.

Wir können erstens die Curve construiren, indem wir die Directrix derselben bestimmen. Wenn wir zuerst irgend zwei der drei gegebenen geraden Linien betrachten, so gehen die Directricen aller Curven, welche dieselben berühren und den gegebenen Punct zum Brennpuncte haben, durch einen Punct derjenigen geraden Linie, welche im gegebenen Puncte auf der, diesen Punct mit dem Durchschnittspuncte der gegebenen

Digitized by Google

Tangenten verbindenden, geraden Linie senkrecht steht. Um diesen gemeinschaftlichen Durchschnittspunct aller Directricen, der also auch ein Punct der gesuchten Directrix ist, zu bestimmen, brauchen wir bloss die Directrix irgend einer der in Rede stehenden Curven zu construiren und hierzu kommen wir leicht, wenn wir für diese Curve die hierher gehörige Parabel nehmen. Auf diesem Wege ergibt sich, da wir die drei gegebenen geraden Linien auf dreifache Art zu zwei zusammstellen können, der folgende Satz:

Wenn man von irgend einem gegebenen Punete F aus nach den drei Winkelpuneten eines gegebenen Dreieeks drei gerade Linien FA, FA' und FA'' zieht und auf diesen drei geraden Linien im Punete F drei Perpendikel FG, FG' und FG'' errichtet; ferner von demselben Punete F aus drei Perpendikel auf die drei Dreieeks-Seiten AA, AA' und AA' fällt und dieselben über ihren Durchschnitt mit diesen Seiten hinaus noch um denselben respeetive gleiche Stüeke verlängert und dadureh auf diesen Perpendikel drei Puncte P', P'' und P bestimmt, so liegen die Durchschnitte von FG und P''P, von FG' und P'P und von FG'' und PP', alle drei, in gerader Linie und diese gerade Linie ist die Directrix derjenigen Curve zweiter Classe, welche den gegebenen Punct zum Brennpunete hat und dem gegebenen Dreieck eingeschrieben ist.

574. Wir können zweitens den Mittelpunct der gesuchten Curve bestimmen. Wir erhalten nach der 571. Nummer drei durch diesen Punct gehende gerade Linien, nemlich diejenigen, welche, bei der obigen Bezeichnung, durch die Mitten von FA, FA' und FA'' gehen und senkreckt auf P''P', P''P und P'P sind.

Der gesuchte Mittelpunct ist, nach einem bekannten Satze, zugleich der Mittelpunct desjenigen Kreises, der durch die Fusspuncte der von F auf die drei gegebenen geraden Linien gefällten Perpendikel geht. (338, 2. Note)

575. Wir können endlich drittens auch den zweiten Brennpunct der zu construirenden Curve suchen. Hier kommen wir nach der 572. Nummer zu folgendem Satze:

Wenn irgend ein Punct F und irgend ein Dreieek AA'A'' gegeben sind und man fällt von F auf die drei Dreieeks-Seiten AA, AA' und AA' drei Perpendikel FQ'', FQ' und FQ, so bestimmen die Fusspuncte dieser drei Perpendikel ein neues Dreieck Q''Q'Q. Fällt man alsdann von den Winkelpuncten des gegebenen Dreieeks, A, A' und A'', drei Perpendikel auf die gegenüberliegenden Seiten des zweiten Dreieeks, auf Q''Q', Q'Q und Q''Q, so schneiden sich dieselben in demselben Puncte; und dieser Punct ist der andere Brennpunct derjenigen Curve zweiter Classe, welche den gegebenen Punct zu einem Brennpunete hat und dem Dreieeke eingeschrieben ist.

In diesem dritten Falle können wir auch construiren, wie in der 337. Nummer. —

576. Wir wollen zur Untersuchung der Durchschnittspuncte irgend zweier gegebener Curven zweiter Classe, die denselben Brennpunct haben, übergehen.

Es seien:

$$(v-v')^2+2(u-u')(v-v')\cos\vartheta+(u-u')^2 = k'^2,$$
$$(v-v'')^2+2(u-u'')(v-v'')\cos\vartheta+(u-u'')^2 = k''^2,$$

die Gleichungen der beiden gegebenen Curven, bezogen auf irgend zwei Axen, die in dem gemeinschaftlichen Brennpuncte sich schneiden und irgend einen Winkel ϑ mit einander bilden. Die Directricen dieser beiden Curven sind (562):

$$(v', u'), \qquad (v'', u''),$$

und hiernach erhalten wir für die Gleichungen derjenigen Puncte, in welchen diese Directricen der ersten Axe begegnen:

$$v = v', \qquad v = v'',$$

und die beiden Tangenten-Paare, die von diesen beiden Puncten an die bezüglichen Curven gelegt werden können, sind folgende:

$$\begin{array}{ll} (v',\ u'+k'), & (v',\ u'-k'); \\ (v'',\ u''+k''), & (v'',\ u''-k''). \end{array} \qquad (2)$$

Für die Gleichung des Durchschnittspunctes der ersten und dritten dieser vier Tangenten ergibt sich sogleich folgende:

$$v-v'' = \frac{v''-v'}{u''-u'-(k''-k')}(u-u''-k''),$$

und für die Gleichung des Durchschnittspunctes der beiden Directricen:

$$v-v'' = \frac{v''-v'}{u''-v'}(u-u'').$$

Wenn wir endlich eine gerade Linie durch diese beiden Durchschnittspuncte legen, so erhalten wir für diese gerade Linie aus der Zusammenstellung der letzten beiden Gleichungen folgende Coordinaten-Werthe:

$$v = \frac{k''v'-k'v''}{k''-k'}, \qquad u = \frac{k''u'-k'u''}{k''-k'}. \qquad (3)$$

Diese Ausdrücke bleiben unverändert dieselben, wenn wir die Zeichen von k'' und k' beide zugleich ändern. Die bezügliche gerade Linie geht also auch durch den Durchschnitt der zweiten und vierten der vier Tangenten (2).

Auf ähnliche Weise finden wir, dass die Durchschnittspuncte der ersten und vierten und der zweiten und dritten der vier Tangenten (2) und der beiden Directricen in gerader Linie liegen, und für diese gerade Linie erhalten wir durch Zeichen-Vertauschung aus den Ausdrücken (3) folgende Coordinaten-Werthe:

$$v = \frac{k''v'+k'v''}{k''+k'}, \qquad u = \frac{k''u'+k'u''}{k''+k'}. \qquad (4)$$

Da die Ausdrücke (3) und (4) in Beziehung auf v, v', v'' und u, u', u'' symmetrisch gebildet sind, so erhalten wir nothwendig dieselben Ausdrücke, wenn wir, statt von den Durchschnitten der ersten Axe mit den beiden Directricen, von den Durchschnitten der zweiten Axe mit den beiden Directricen aus, Tangenten an die bezüglichen Curven legen. Da überdiess die zweite Axe jede beliebige, durch den Brennpunct gehende, gerade Linie sein kann, so erhalten wir, indem wir zusammenfassen, den nachstehenden Satz:

Wenn man durch den gemeinschaftlichen Brennpunct irgend zweier gegebener Curven zweiter Classe eine beliebige gerade Linie zieht und von jedem derjenigen beiden Puncte, in welchen dieselbe den Directricen der beiden Curven begegnet, zwei Tangenten an die bezügliche Curve legt, so bilden diese Tangenten eine vollständige vierseitige Figur, deren zwei Diagonalen durch den Durchschnitt der beiden Directricen gehen. Es bleiben diese Diagonalen unverändert dieselben, wie man auch die Richtung der beliebigen, durch den Brennpunct gehenden, geraden Linien ändern mag; während alsdann zwei Winkelpuncte der vierseitigen Figur auf den beiden Directricen fortrücken, verändern die beiden übrigen Paare von Winkelpuncten ihre Lage auf zwei festen, durch den Durchschnittspunct derselben gehenden, geraden Linien.

Wenn die beiden gegebenen Curven zweiter Classe sich in zwei reellen Puncten schneiden und man wählt die beliebige, durch ihren gemeinschaftlichen Brennpunct gehende, gerade Linie so, dass sie auf der, diesen Punct mit einem der Durchschnittspuncte verbindenden geraden Linie senkrecht steht, so geht, nach einem bekannten Satze, die Tangente jeder Curve in jenem Durchschnittspuncte durch denjenigen Punct, in welchem die durch den gemeinschaftlichen Brennpunct gehende gerade Linie der bezüglichen Directrix begegnet (566). Hieraus folgt, dass jener Durchschnittspunct der beiden gegebenen Curven ein Punct einer der beiden festen, im vorstehenden Satze bezeichneten geraden Linien ist. Diese beiden festen geraden Linien sind, indem wir die Sache gleich allgemein nehmen, die beiden gemeinschaftlichen (reellen oder imaginären) Chorden der beiden gegebenen Curven; die beiden Directricen dieser Curven schneiden sich in ihrem Chordal-Puncte.

(Dasselbe Resultat können wir direct aus einem im ersten Bande der „Entwicklungen" bewiesenen Satze (387) herleiten, indem wir den Brennpunct als den Durchschnittspunct zweier (imaginärer) gemeinschaftlicher Tangenten der beiden gegebenen Curven betrachten).

Man überzeugt sich sogleich, dass die beiden Directricen und die beiden eben bezeichneten gemeinschaftlichen Chorden der beiden gegebenen Curven Harmonicalen sind, wenn man etwa die Durchschnitte dieser vier Linien mit der ersten Axe betrachtet.

Wenn die erste der beiden Gleichungen (1) insbesondere einen Kreis darstellt, so reduciren sich die Ausdrücke (3) und (4), indem wir $v' = 0$ und $u' = 0$ setzen, auf folgende:

$$v = \frac{k'v''}{k'+k''}, \qquad u = \frac{k'u''}{k''+k'}.$$

Wenn die erste der beiden Gleichungen (1) insbesondere eine gerade Linie (ein System zweier imaginärer Puncte) darstellt, so ist $k = 0$ und es ergibt sich sowol aus (3) als aus (4):

$$v = v', \qquad u = u'.$$

Es fallen also für diesen Fall die beiden in Rede stehenden geraden Linien in die gegebene zusammen.

577. Wir wollen diesen Paragraphen mit einigen Constructionen beschliessen, die unmittelbar sich uns darbieten und mit den in der vorigen Nummer erhaltenen Resultaten in Verbindung stehen.

Eine Parabel zu beschreiben, welche durch zwei gegebene Puncte geht und einen dritten gegebenen Punct zum Brennpuncte hat.

Die Bestimmung der Directrix der zu construirenden Parabel kommt nach einem allbekannten Satze (5 6 4) darauf hinaus, eine solche gerade Linie zu finden, welche von den beiden ersten gegebenen Puncten eben so weit absteht, als diese Puncte von dem dritten gegebenen Puncte abstehen. Beschreibt man zu diesem Ende aus den beiden erstgenannten Puncten, als Mittelpuncten, zwei durch den gegebenen Brennpunct gehende Kreise, so ist jede gemeinschaftliche Tangente dieser beiden Kreise die Directrix einer Parabel, die den Bedingungen der Aufgabe Genüge leistet. Solcher reellen gemeinschaftlichen Tangenten gibt es immer zwei und nur zwei, und also gibt es auch zwei Parabeln, welche durch zwei gegebene Puncte gehen und einen dritten gegebenen Punct zum Brennpuncte haben.

Digitized by Google

578. *Eine Curve zweiter Classe zu beschreiben, die durch drei gegebene Puncte geht und einen vierten gegebenen Punct zu einem ihrer Brennpuncte hat.*

Es folgt aus der 576. Nummer, dass die Directricen aller derjenigen Curven, welche durch zwei gegebene Puncte gehen und überdiess einen gegebenen Punct zum gemeinschaftlichen Brennpuncte haben, sich in ein und demselben festen Puncte oder in irgend einem von mehreren festen Puncten schneiden. Man sieht leicht ein, dass der letztere Fall Statt findet und dass es zwei solcher festen Puncte gibt. In dem einen derselben schneiden sich die Directricen unendlich vieler Ellipsen, zweier Parabeln, deren Construction wir in der vorigen Nummer angezeigt haben, und unendlich viele solcher Hyperbeln, auf deren ein und demselben Zweige die beiden ersten gegebenen Puncte liegen. In dem andern festen Puncte schneiden sich die Directricen aller solcher Hyperbeln, deren ein Zweig durch den einen und deren anderer Zweig durch den andern der beiden gegebenen Puncte geht. Dieser zweite feste Punct ergibt sich durch eine ganz ähnliche Construction als der erste. Während dieser nemlich der Durchschnittspunct der beiden äussern gemeinschaftlichen Tangenten derjenigen beiden Kreise ist, welche durch den gegebenen Brennpunct gehen, und die beiden ersten gegebenen Puncte zu ihren Mittelpuncten haben, ist jener zweite feste Punct der (reelle) Durchschnitt der beiden (imaginären) innern gemeinschaftlichen Tangenten derselben beiden Kreise. Die beiden gegebenen und diese beiden so bestimmten festen Puncte sind vier harmonische Theilungspuncte und werden von dem gegebenen Brennpuncte aus unter rechtem Winkel gesehen. (192)

Das Vorstehende ist in Uebereinstimmung mit der 367. Nummer, nach welcher in allen Curven zweiter Ordnung oder, was dasselbe heisst, (552) zweiter Classe, welche durch zwei gegebene Puncte gehen und zwei gegebene gerade Linien berühren, die Berührungs-Chorden durch einen von solchen zwei festen Puncten gehen, die mit den beiden gegebenen in gerader Linie liegen. An die Stelle derjenigen Curven, welche zwei gegebene gerade Linien berühren, treten Curven mit demselben Brennpuncte und die Polaren dieser Brennpuncte (die Directricen) an die Stelle der Berührungs-Chorden.

Hiernach ergibt sich folgende Construction der an die Spitze dieser Nummer gestellten Aufgabe:

„Man beschreibe aus den drei ersten gegebenen Puncten, als Mittelpuncten, drei „Kreise, welche durch den vierten gegebenen Punct gehen, und construire die vier Sym„metralen (162) *) dieser drei Kreise. Diese vier Symmetralen sind die Directricen derje„nigen vier Curven zweiter Classe, welche den Bedingungen der Aufgabe Genüge leisten."

Die äussere Symmetrale entspricht einer Ellipse oder Parabel oder einer solchen Hyperbel, deren ein und derselbe Zweig die drei ersten gegebenen Puncte enthält. Die drei innern Symmetralen entsprechen solchen Hyperbeln, deren ein Zweig durch zwei, und deren anderer Zweig durch den dritten jener drei gegebenen Puncte geht.

Wenn wir annehmen, dass zwei der drei gegebenen Puncte, durch welche die zu construirende Curve gehen soll, zusammenfallen, und also eine Tangente, auf derselben der Berührungspunct und ausserdem noch ein Punct gegeben sind, so reducirt sich die Zahl der Auflösungen auf zwei. Indem wir den gegebenen Berührungspunct mit dem andern gegebenen Puncte zusammenstellen, erhalten wir, wie eben, zwei feste Puncte,

*) *axes de similitude.*

durch welche die Directricen der verlangten Curven gehen. Ausserdem gehen die Directricen aller Curven zweiter Classe, welche denselben Brennpunct haben und eine gegebene gerade Linie in demselben Puncte berühren, durch ein und denselben Punct der gegebenen geraden Linie und zwar durch einen solchen Punct, der zugleich auf dem, im gegebenen Brennpuncte auf der diesen Punct mit dem Berührungspuncte verbindenden geraden Linie errichteten, Perpendikel liegt (566). Hiernach erhalten wir die beiden Directricen derjenigen beiden Curven, die den Bedingungen der Aufgabe Genüge leisten.

579. *Eine Hyperbel zu beschreiben, die durch zwei gegebene Puncte geht, einen dritten gegebenen Punct zum Brennpuncte hat und deren eine Asymptote einer gegebenen geraden Linie parallel ist.*

Nach der 169. Nummer modificirt sich für diesen Fall die Construction der vorigen Nummer auf folgende Weisse:

„Man construire aus den beiden ersten gegebenen Puncten, als Mittelpunkten, zwei „Kreise, welche durch den dritten gegebenen Punct gehen, ziehe in diesen beiden Krei„sen diejenigen beiden Durchmesser, welche der gegebenen geraden Linie parallel sind „und verbinde die Endpuncte dieser beiden parallelen Durchmesser durch vier gerade Li„nien. Diese geraden Linien sind alsdann die Directricen derjenigen v i e r Hyperbeln, „welche den Forderungen der Aufgabe Genüge leisten."

Die beiden ersten gegebenen Puncte liegen auf demselben Zweige zweier dieser vier Hyperbeln, und auf den beiden Zweigen jeder der beiden übrigen Hyperbeln.

Eine Hyperbel zu beschreiben, deren Asymptoten zweien gegebenen geraden Linien parallel sind, die durch einen gegebenen Punct geht und einen zweiten gegebenen Punct zum Brennpuncte hat.

Hier erhalten wir, mit Berücksichtigung der eben angezogenen Nummer, sogleich folgende Construction:

„Man beschreibe aus dem ersten gegebenen Puncte, als Mittelpunkte, einen Kreis, „der durch den zweiten gegebenen Punct geht, ziehe in diesem Kreise zwei den gegebe„nen geraden Linien parallele Durchmesser und verbinde die Endpuncte derselben durch „vier gerade Linien. Auf diese Weise erhält man ein dem Kreise eingeschriebenes Pa„rallelogramm, dessen Seiten die Directricen der vier verlangten Hyperbel sind."

Eine Hyperbel zu beschreiben, die durch einen gegebenen Punct geht, einen zweiten gegebenen Punct zu einem ihrer Brennpuncte und eine gegebene gerade Linie zu einer ihrer Asymptoten hat.

„Man beschreibe aus dem ersten gegebenen Puncte, als Mittelpuncte, einen Kreis, „der durch den zweiten gegebenen Punct geht, ziehe in diesem Kreise den der gegebe„nen Asymptote parallelen Durchmesser und verbinde die Endpuncte dieses Durchmes„sers mit dem Fusspuncte des auf diese Asymptote vom gegebenen Brennpuncte aus ge„fällten Perpendikels durch zwei gerade Linien (566). Diese gerade Linien sind die Directri„cen der verlangten Hyperbeln, deren es zwei gibt".

Wenn statt des ersten gegebenen Punctes die zweite Asymptote der Richtung nach gegeben ist, so erhält man leicht diese Asymptote selbst, (nach der Bemerkung, dass der Brennpunct von beiden Asymptoten gleichweit absteht) und zwar zweifach. Die jedesmalig entsprechende Directrix erhält man, indem man die Fusspuncte der auf die beiden Asymptoten gefällten Perpendikel durch eine gerade Linie verbindet (566).

Digitized by Google

Wir brechen hier ab, weil wir den Gegenstand dieses Paragraphen auch noch in der zweiten Abtheilung des vorliegenden zweiten Bandes berühren werden. —

§. 7.

Theorie der Osculation. Osculation hyperbolischer und parabolischer Zweige in unendlicher Entfernung.

580. Wenn die allgemeine Gleichung des zweiten Grades:

$$Aw^2+2Bvw+Cv^2+2Duw+2Euv+Fu^2 = 0,$$

eine solche Curve darstellen soll, welche von der ersten Axe berührt wird, so müssen wir

$$F = 0$$

setzen. Wenn wir ferner den Berührungspunct auf dieser Axe zum Anfangspuncte nehmen, so kommt überdiess:

$$E = 0.$$

Für die Gleichungen irgend zweier gegebener Curven, welche die erste Axe im Anfangspuncte berühren, können wir hiernach folgende nehmen:

$$\begin{aligned} Aw^2+2Bvw+Cv^2+2Duw &= 0, \\ A'w^2+2B'vw+C'v^2+2D'uw &= 0. \end{aligned} \qquad (1)$$

Wenn wir diese beiden Gleichungen zu irgend einer neuen Gleichung des zweiten Grades verbinden, so stellt diese neue Gleichung einen solchen geometrischen Ort zweiter Classe dar, der mit den beiden gegebenen Curven (1) dieselben vier gemeinschaftlichen Tangenten hat. Ziehen wir insbesondere die Gleichungen (1) von einander ab, nachdem wir die erste derselben mit C', die zweite mit C multiplicirt haben, so kommt:

$$w[(AC'-A'C)w+2(BC'-B'C)v+2(DC'-D'C)u] = 0.$$

Diese Gleichung stellt zwei Puncte dar, und diese Puncte sind also nothwendig solche, in welchen die vier gemeinschaftlichen Tangenten der beiden Curven (1), zu zwei und zwei genommen, sich schneiden. Der eine dieser beiden Puncte ist der Anfangspunct, in welchem die beiden Curven sich berühren, und der als der Durchschnittspunct zweier in der ersten Axe zusammenfallender gemeinschaftlicher Tangenten anzusehen ist. Der andere Punct, für dessen Gleichung wir folgende erhalten:

$$(AC'-A'C)w+2(BC'-B'C)v+2(DC'-D'C)u = 0, \qquad (2)$$

ist also der Durchschnitt der beiden, einzig noch übrigen, gemeinschaftlichen Tangenten der beiden gegebenen Curven.

Die Discussion der Gleichung (2) führt zu einfachen und symmetrischen Resultaten. Wenn wir erstens annehmen, es sei:

$$DC' = D'C,$$

so reducirt sich die Gleichung (2) auf folgende:

$$(AC'-A'C)w+2(BC'-B'C)v = 0, \qquad (3)$$

und stellt also einen solchen Punct dar, der auf der ersten Axe in einer Entfernung vom Anfangspuncte liegt, die gleich ist:

$$2.\frac{BC'-B'C}{AC'-A'C}.$$

Von den vier gemeinschaftlichen Tangenten der beiden gegebenen Curven fallen also drei in der ersten Axe zusammen und die vierte erhält man, indem man durch den Punct (2)

Digitized by Google

eine Tangente an eine beliebige dieser Curven legt. In dem vorliegenden Falle haben die beiden gegebenen Curven drei auf einander folgende Elemente mit einander gemein; es findet zwischen denselben eine dreipunctige (dreitangentige) Osculation Statt. *)

Wenn wir zweitens voraussetzen, es sei:

$$BC' = B'C,$$

so reducirt sich die Gleichung (2) auf folgende:

$$(AC'-A'C)w+2(DC'-D'C)u = o, \qquad (4)$$

und stellt also einen solchen Punct dar, der auf der zweiten Axe liegt, und zwar in einer Entfernung vom Anfangspuncte, die gleich ist:

$$2.\frac{DC'-D'C}{AC'-A'C}.$$

Wenn wir drittens voraussetzen, es sei:

$$AC' = A'C,$$

so verwandelt sich die Gleichung (2) in folgende:

$$(BC'-B'C)v+(DC'-D'C)u = o,$$

und stellt also einen Punct dar, der nach einer leicht zu bestimmenden Richtung hin, unendlich weit liegt. Die beiden gegebenen, sich berührenden Curven haben also zwei parallele, gemeinschaftliche Tangenten.

Hierhin gehört als besonderer Fall, dass

$$A = A' = o,$$

und also die beiden gegebenen Curven Parabeln sind; die eine gemeinschaftliche Tangente liegt alsdann unendlich weit, und ist als mit jeder gegebenen geraden Linie parallel anzusehen.

Wenn viertens die beiden Gleichungen:

$$DC' = D'C, \qquad BC' = B'C,$$

zugleich bestehen, so reducirt sich die Gleichung (2) auf:

$$w = o,$$

auf die Gleichung des Anfangspunctes. Der Durchschnittspunct der Tangente im Osculationspuncte des ersten Falles mit der vierten gemeinschaftlichen Tangente fällt alsdann mit dem Osculationspuncte, die vierte gemeinschaftliche Tangente mit den drei ersten, zusammen, oder, wenn wir vom zweiten Falle ausgehen, der Durchschnittspunct der beiden gemeinschaftlichen Tangenten auf der zweiten Axe fällt mit dem Berührungspuncte, diese Tangenten fallen mit der Tangente im Berührungspunte zusammen und die Richtung der zweiten Axe kann wieder jede beliebige sein: die beiden gegebenen Curven haben einen vierpunctigen (viertangentigen) Contact.

Wenn fünftens die beiden Gleichungen:

$$DC' = D'C, \qquad AC' = A'C,$$

*) Auf gewisse Weise wird die Theorie der Osculation hier noch anschaulicher als da, wo man dieselbe aus dem Zusammenfallen von Durchschnittspuncten herleitet. Denkt man sich nemlich eine Curve als die Gränze eines Polygones mit immer zunehmender Seitenzahl, so entsprechen die Tangenten der Curve verlängerten Seiten des Polygons. Der Berührung zweier Curven entspricht ein Zusammenfallen zweier auf einander folgender Seiten der beiden bezüglichen Polygone, der einfachen Osculation ein Zusammenfallen dreier consecutiver Seiten des einen Polygons mit dreien consecutiven Seiten des andern und so fort.

Digitized by Google

zugleich befriedigt werden, so verwandelt sich die Gleichung (2) in folgende:

$$v = 0;$$

die beiden gemeinschaftlichen Tangenten sind also der ersten Axe parallel, und mithin osculiren die beiden gegebenen Curven sich im Anfangspuncte und berühren dieselbe, der Tangente in diesem Puncte parallele, gerade Linie.

Wenn insbesondere

$$A = A' = 0,$$

so sind die beiden Curven beliebige Parabeln, die sich im Anfangspuncte osculiren.

Wenn sechstens die beiden Gleichungen:

$$BC' = B'C, \qquad AC' = A'C,$$

zugleich Statt finden, so verwandelt sich die Gleichung (2) in folgende:

$$n = 0,$$

die beiden gemeinschaftlichen Tangenten sind also unter sich und mit der zweiten Axe parallel.

Wenn insbesondere

$$A = A' = 0,$$

so sind die gegebenen Curven Parabeln, welche die erste Axe im Anfangspuncte berühren und eine gemeinschaftliche Tangente haben, die der zweiten Axe parallel ist.

581. Wir können die vorstehenden Bestimmungen dadurch noch vereinfachen, dass wir

$$C = C' = 1$$

setzen. Wenn wir demgemäss die Gleichung:

$$v^2 + Aw^2 + 2Bvw + 2Duw = 0, \qquad (5)$$

zu Grunde legen, so erhalten wir folgende Zusammenstellung verschiedener Fälle:

$D = const.$ — Alle Curven osculiren einander dreipunctig auf der ersten Axe im Anfangspuncte; die Richtung der zweiten Axe bleibt unbestimmt.

$B = const.$ — Alle Curven berühren sich auf der ersten Axe im Anfangspuncte und die beiden gemeinschaftlichen Tangenten, je zweier derselben, schneiden sich auf der zweiten Axe.

$A = const.$ — Alle Curven berühren sich auf der ersten Axe im Anfangspuncte und die gemeinschaftlichen Tangenten je zweier derselben sind parallel. Die zweite Axe hat eine beliebige Richtung.

$D = const.$, $B = const.$ — Alle Curven osculiren sich vierpunctig auf der ersten Axe im Anfangspuncte. Die Richtung der zweiten Axe ist beliebig.

$D = const$, $A = const.$ — Alle Curven osculiren einander dreipunctig auf der ersten Axe im Anfangspuncte und berühren dieselbe, dieser Axe parallele gerade Linie. Die Richtung der zweiten Axe ist beliebig.

$B = const.$, $A = const.$ — Alle Curven berühren sich auf der ersten Axe im Anfangspuncte, und jede derselben berührt überdiess zwei gegebene, der zweiten Axe parallele, gerade Linien.

582. Wenn

$$A = 0,$$

so ist die resultirende Gleichung:

$$v^2 + 2Bvw + 2Duw = 0,$$

die allgemeine Gleichung aller Parabeln, welche die erste Axe im Anfangspuncte berühren. Es ergeben sich hier folgende besondere Fälle:

Digitized by Google

$D = const.$ { Alle Parabeln osculiren sich dreipunctig auf der ersten Axe im Anfangspuncte. Die zweite Axe hat eine beliebige Richtung.

$B = const.$ { Alle Parabeln berühren einander auf der ersten Axe im Anfangspuncte und überdiess eine gegebene gerade Linie, die der zweiten Axe parallel ist. Wenn insbesondere $B = 0$, so liegt diese gerade Linie unendlich weit, und die zweite Axe ist ein gemeinschaftlicher Durchmesser aller Parabeln.

533. Wenn wir in der allgemeinen Gleichung der Curven zweiter Classe:

$$Aw^2+2Bvw+Cv^2+2Dnw+2Env+Fn^2 = 0,$$

zu gleicher Zeit:

$$F = 0, \qquad D = 0,$$

nehmen, so erhalten wir die allgemeine Gleichung solcher Curven dieser Classe, welche die erste Coordinaten-Axe berühren, und deren Mittelpunct zugleich auf dieser Axe liegt. Hieraus ist klar, dass alle diese Curven Hyperbeln sind, die eine gemeinschaftliche Asymptote haben, und dass diese Asymptote in die erste Axe fällt.

Hiernach stellen also folgende beiden Gleichungen:

$$\begin{aligned} Aw^2+2Bvw+Cv^2+2Env &= 0, \\ A'w^2+2B'vw+C'v^2+2E'nv &= 0, \end{aligned} \qquad (1)$$

zwei Hyperbeln dar, welche beide die erste Axe zu einer ihrer Asymptoten haben. Ziehen wir diese beiden Gleichungen von einander ab, nachdem wir zuvor die erste mit A', die zweite mit A multiplicirt haben, so kommt:

$$v[2(A'B-AB')w+(A'C-AC')v+2(A'E-AE')n] = 0.$$

Der Factor v des ersten Theiles dieser Gleichung bezieht sich auf die beiden in der ersten Axe zusammenfallenden gemeinschaftlichen Tangenten der beiden gegebenen Curven, als deren Durchschnittspunct man den, nach der Richtung der ersten Axe hin, unendlich weit liegenden Berührungspunct anzusehen hat. Die Gleichung:

$$2(A'B-AB')w+(A'C-AC')v+2(A'E-AE')n = 0, \qquad (2)$$

stellt also den Durchschnittspunct der beiden übrigen gemeinschaftlichen Tangenten dar.

Wenn erstens:

$$A'E = AE',$$

so reducirt sich die Gleichung (2) auf folgende:

$$2(A'B-AB')w+(A'C-AC')v = 0,$$

und stellt mithin einen Punct der ersten Axe dar. Wenn wir die beiden durch diesen Punct gehenden gemeinschaftlichen Tangenten, die immer reell sind, construiren, so fällt die eine derselben in die erste Axe und mithin fallen drei gemeinschaftliche Tangenten der beiden durch die Gleichungen (1) gegebenen Hyperbeln in ihre gemeinschaftliche Asymptote zusammen: die Hyperbeln osculiren sich dreipunctig auf der ersten Axe in unendlicher Entfernung.

Wenn zweitens:

$$A'C = AC',$$

so reducirt sich die Gleichung (2) auf folgende:

$$(A'B-AB')w+(A'E-AE')n = 0,$$

und folglich geht die zweite Axe durch den Durchschnittspunct der beiden gemeinschaftlichen Tangenten.

Wenn drittens:

$$A'B = AB',$$

und also die beiden Hyperbeln denselben Mittelpunct haben, so reducirt sich die Gleichung (2) auf folgende:

$$(A'C-AC')v+2(A'E-AE')u = 0;$$

die beiden gemeinschaftlichen Tangenten sind also parallel.

Wenn viertens zugleich:

$$A'E = AE', \qquad A'C = AC',$$

so reducirt sich die Gleichung (2) auf:

$$w = 0.$$

Die beiden gegebenen Hyperbeln haben einen dreipunctigen Contact in unendlicher Entfernung auf der ersten Axe und ihre gemeinschaftliche Tangente geht durch den Anfangspunct.

Wenn fünftens zugleich:

$$A'E = AE', \qquad A'B = AB',$$

so reducirt sich die Gleichung (2) auf:

$$v = 0.$$

Alle vier gemeinschaftliche Tangenten fallen also in die gemeinschaftliche Asymptote zusammen, es haben die beiden Hyperbeln auf dieser Asymptote (der ersten Axe) in unendlicher Entfernung einen vierpunctigen Contact. Solche Hyperbeln haben denselben Mittelpunct.

Wenn sechstens zugleich:

$$A'C = AC', \qquad A'B = AB',$$

so reducirt sich die Gleichung (2) auf:

$$u = 0.$$

Die erste Axe ist in diesem Falle eine gemeinschaftliche Asymptote der beiden Hyperbeln, es haben dieselben überdiess zwei parallele gemeinschaftliche Tangenten, und mit diesen Tangenten ist die zweite Axe parallel.

584. Wenn wir zusammenfassen und, indem wir $A = 1$ setzen, von der Gleichung:

$$w^2+2Bvw+Cv^2+2Euv = 0,$$

als von der allgemeinen Gleichung solcher Hyperbeln, welche die erste Coordinaten-Axe zur gemeinschaftlichen Asymptote haben, ausgehen, so erhalten wir folgendes Schema:

$E = const.$	Alle Hyperbeln osculiren sich dreipunctig auf der ersten Axe in unendlicher Entfernung; die zweite Axe ist beliebig.
$C = const.$	Die beiden gemeinschaftlichen Tangenten schneiden sich auf der zweiten Axe.
$B = const.$	Alle Hyperbeln haben denselben Mittelpunct; die zweite Axe ist beliebig.
$E = const.$ $C = const.$	Alle Hyperbeln osculiren sich dreipunctig auf der ersten Axe in unendlicher Entfernung, und berühren dieselbe durch den Anfangspunct gehende gerade Linie; die Richtung der zweiten Axe ist beliebig.
$E = const.$ $B = const.$	Alle Hyperbeln osculiren sich vierpunctig auf der ersten Axe in unendlicher Entfernung; die zweite Axe ist beliebig.
$C = const.$ $B = const.$	Alle Hyperbeln berühren dieselben beiden, unter einander und mit der zweiten Axe parallelen geraden Linie. —

585. Die Discussionen in den vorstehenden Nummern dieses Paragraphen werden dadurch bedingt, dass wir zwei Coefficienten in der allgemeinen Gleichung gleich Null

setzen und zwar einmal F und E, das andere Mal F und D. Wir erhalten ganz ähnliche Discussionen, wenn wir C und E, oder C und B beide gleich Null nehmen, und die geometrische Deutung bleibt dieselbe als in dem Vorhergehenden, mit dem einzigen Unterschiede, dass die beiden Axen sich mit einander vertauschen.

Man sieht sogleich, dass man auch noch zu analogen Discussionen kommt, wenn man einmal A und B, das andere Mal A und D gleich Null setzt. Diese beiden Fälle unterscheiden sich offenbar wiederum nur dadurch, dass die eine Coordinaten-Axe an die Stelle der andern tritt. Wir wollen in dem Folgenden einen dieser beiden Fälle näher betrachten.

Es sind (464):

$$\begin{aligned} 2B\,vw+C\,v^2+2E\,ov+F\,n^2 &= o,\\ 2B'vw+C'v^2+2E'uv+F'u^2 &= o, \end{aligned} \qquad (1)$$

die Gleichungen irgend zweier Parabeln, deren Durchmesser der ersten Axe parallel sind. Ziehen wir diese beiden Gleichungen von einander ab, nachdem wir zuvor die erste mit F', die zweite mit F multiplicirt haben, so kommt:

$$v[2(BF'-B'F)w+(CF'-CF)v+2(EF'-E'F)u] = o.$$

Der Factor v des ersten Theiles dieser Gleichung bezieht sich auf zwei, der ersten Axe parallele, gemeinschaftliche Tangenten der beiden Parabeln (1), die folglich als unendlich weit liegend und als zusammenfallend zu betrachten sind. Man kann also sagen, dass die beiden Parabeln in unendlicher Entfernung sich berühren. Solche Parabeln haben ausserdem nur noch zwei gemeinschaftliche Tangenten. In dem vorliegenden Falle schneiden sich dieselben in dem Puncte:

$$2(BF'-B'F)w+(CF'-CF)v+2(EF'-E'F)u = o. \qquad (2)$$

Wenn:

$$EF' = E'F,$$

so geht die erste Axe durch den Durchschnittspunct der beiden gemeinschaftlichen Tangenten. Wenn:

$$CF' = C'F,$$

so liegt dieser Punct auf der zweiten Axe. Wenn endlich zugleich:

$$EF' = E'F, \qquad CF' = C'F,$$

so ist der Durchschnittspunct der beiden gemeinschaftlichen Tangenten Anfangspunct der Coordinaten.

Wenn:

$$BF' = B'F,$$

so reducirt sich die Gleichung (2) auf folgende:

$$(CF'-C'F)v+2(EF'-E'F)u = o,$$

und stellt folglich einen, nach einer gegebenen Richtung hin, unendlich weit entfernt liegenden Punct dar. Es liegt also auch eine der in Rede stehenden gemeinschaftlichen Tangenten der beiden Parabeln (1) unendlich weit, und ist mithin als mit den beiden ersten, unendlich weit liegenden, gemeinschaftlichen Tangenten zusammenfallend anzusehen. Man kann also sagen, dass die beiden Parabeln in unendlicher Entfernung sich dreipunctig osculiren.

Wenn zugleich:

$$BF' = B'F, \qquad EF' = E'F,$$

so liegt der Punct (2) nach der Richtung der ersten Axe hin unendlich weit. Es liegen also auch alle vier gemeinschaftlichen Tangenten unendlich weit und sind mithin als zu-

Digitized by Google

sammenfallend zu betrachten. Die beiden Parabeln (1) haben in diesem Falle einen vierpunctigen Contact in unendlicher Entfernung.

Wenn zugleich:

$$BF' = BF, \qquad CF' = CF,$$

so haben die beiden in Rede stehenden Parabeln in unendlicher Entfernung einen dreipunctigen Contact und die zweite Axe ist ihrer gemeinschaftlichen Tangente parallel.

586 Wenn wir die verschiedenen in der vorigen Nummer discutirten Fälle zusammenfassen, so erhalten wir, indem wir, der Kürze halber, $F = 1$ setzen und demnach von der Gleichung:

$$n^2 + 2Bvw + Cv^2 + 2Env = 0,$$

als von der allgemeinen Gleichung solcher Parabeln, deren Durchmesser der ersten Axe parallel sind, ausgehen, zu folgendem Schema:

$E = const.$ { Die erste Axe geht durch den Durchschnitt der beiden gemeinschaftlichen Tangenten je zweier Parabeln; die zweite Axe ist durchaus beliebig.

$C = const.$ { Die zweite Axe, deren Richtung jede beliebige sein kann, geht durch den Durchschnittspunct der gemeinschaftlichen Tangenten je zweier Parabeln.

$B = const.$ { Alle Parabeln osculiren sich dreipunctig in unendlicher Entfernung. Der Anfangspunct und die Richtung der zweiten Axe sind beliebig.

$E = const.$, $C = const.$ { Alle Parabeln berühren dieselben beiden geraden Linien, die im Anfangspuncte der Coordinaten sich schneiden; die Richtung der zweiten Axe ist beliebig.

$E = const.$, $B = const.$ { Alle Parabeln osculiren sich vierpunctig in unendlicher Entfernung; die zweite Axe und der Anfangspunct sind beliebig.

$C = const.$, $B = const.$ { Alle Parabeln osculiren sich dreipunctig in unendlicher Entfernung, und berühren dieselbe der zweiten Axe parallele gerade Linie.

587. Das System irgend zweier Puncte, die auf der ersten Axe liegen, können wir durch folgende Gleichung darstellen:

$$v^2 + (x+x')vw + xx'w^2 = 0. \qquad (1)$$

Wenn wir diese Gleichung von der allgemeinen Gleichung solcher Curven, welche die erste Axe im Anfangspuncte berühren:

$$v^2 + 2Bvw + Aw^2 + 2Duw = 0, \qquad (2)$$

abziehen, und im Resultate den gemeinschaftlichen Factor w fortlassen, so ergibt sich:

$$(A - xx')w + (2B - (x+x'))v + 2Du = 0. \qquad (3)$$

Diese Gleichung stellt den Durchschnittspunct derjenigen beiden durch die Puncte (1) gehenden Tangenten der Curve (2) dar, welche nicht in die erste Axe fallen.

Die Richtung der geraden Linie, welche den Punct (3) mit dem Anfangspuncte verbindet, ist durch folgende Gleichung bestimmt:

$$\frac{v}{u} = \frac{2D}{2B - (x+x')}.$$

Dieser Ausdruck ist unabhängig von A und bleibt also unverändert derselbe, wenn wir statt (2) irgend eine andere Curve zweiter Classe betrachten, welche mit derselben im Anfangspuncte einen vierpunctigen Contact hat. Also:

Digitized by Google

Wenn man von irgend zwei festen Puncten der gemeinschaftlichen Tangente im Osculations-Puncte mehrerer sich vierpunctig osculirender Curven zweiter Classe an jede derselben noch zwei Tangenten zieht, so liegen die Durchschnitte je zweier solcher Tangenten auf einer festen, durch den Osculationspunct gehenden, geraden Linie.

588. Hiernach erhalten wir eine Construction folgender Aufgabe:

Eine Curve zweiter Classe zu beschreiben, die eine gegebene in einem gegebenen Puncte vierpunctig osculirt und eine gegebene gerade Linie berührt.

Es sei, indem wir die Figur in Gedanken hinzuthun, TS die gegebene gerade Linie, welche der Tangente des Osculationspunctes O im Puncte T begegne. Man lege durch T an die gegebene Curve die zweite Tangente TS' und eine beliebige dritte Tangente T'S', die den beiden ersten Tangenten in T' und S' begegne. Man ziehe OS', die der gegebenen geraden Linie TS in S begegne und endlich T'S. Diese gerade Linie T'S ist alsdann eine neue Tangente der zu construirenden Curve, welche durch den, beliebig auf der Tangente im Osculationspuncte anzunehmenden, Punct T' geht.

Wenn die beiden Puncte T und T', und also auch die durch dieselben gehenden zweiten Tangenten, zusammenfallen, (was darauf hinauskommt, $x = x'$ zu setzen), so sind S' und S Puncte, von welchen der eine auf der gegebenen, der andere auf der zu construirenden Curve liegt, und diese beiden Puncte liegen immer noch mit dem Osculationspuncte O in gerader Linie. Auf diese Weise kommen wir zu der Umkehrung eines Satzes, den wir schon früher erwähnt haben *) und nach welchem wir, wenn ein Punct der zu construirenden Curve gegeben ist, in diesem Puncte die Tangente legen, und wenn eine Tangente gegeben ist, auf dieser Tangente den Berührungspunct bestimmen können.

589. Wir erhalten ferner, wenn wir annehmen, dass die gegebene zu berührende gerade Linie unendlich weit liegt, die Construction folgender Aufgabe:

Eine Parabel zu beschreiben, welche eine gegebene Curve zweiter Classe in einem gegebenen Puncte vierpunctig osculirt.

Man lege, parallel mit der Tangente im Osculationspuncte O, eine zweite Tangente an die gegebene Curve, und irgend eine dritte Tangente T'S', welche der ersten in T' und der zweiten in S' begegne; man ziehe OS' und endlich durch T' eine gerade Linie parallel mit OS'. Diese letztgezogene gerade Linie ist eine Tangente der gesuchten Parabel. Der Berührungspunct auf dieser Tangente ist derjenige Punct, in welchem derselbe von einer durch O und den Berührungspunct auf der Tangente der gegebenen Curve T'S' gehenden geraden Linie geschnitten wird.

Man sieht ferner, indem man den Berührungspunct auf der unendlich weit entfernten Tangente der zu construirenden Parabel sucht, dass der durch den Osculationspunct gehende Durchmesser der gegebenen Curve auch ein Durchmesser der Parabel ist.

590. Der Abstand des Punctes (3) von der ersten Axe ist durch folgenden Ausdruck gegeben:

$$-\frac{w}{n} = \frac{2D}{A-\varkappa},$$

welcher von B unabhängig ist und also derselbe bleibt, wenn wir mit der Curve (2) ir-

*) *Entwicklungen*, 355.

gend eine andere vertauschen, welche dieselbe im Anfangspuncte dreipunctig osculirt und mit ihr eine gemeinschaftliche Tangente hat, die der Tangente im Osculationspuncte parallel ist. Also:

Wenn mehrere Curven zweiter Classe, welche dieselben beiden Parallelen berühren und sich auf einer derselben dreipunctig osculiren, gegeben sind und man legt von irgend zweien festen Puncten der Tangente im gemeinschaftlichen Osculationspuncte zwei neue Tangenten an jede der Curven: so liegen die Durchschnitte dieser Tangenten-Paare auf einer dritten parallelen.

Wenn man von irgend einem Puncte der Tangente im Osculationspuncte noch eine zweite Tangente an jede Curve zieht, so liegen die Berührungspuncte alle auf derselben geraden Linie, die den beiden parallelen Tangenten parallel ist.

Es lässt sich mit dem ersten dieser beiden Sätze der Satz der 587. Nummer als besonderer Fall in Verbindung bringen, wenn man mit der Tangente im Osculationspuncte die zweite, ihr parallele gemeinschaftliche Tangente zusammenfallen lässt. Diejenige gerade Linie nemlich, welche der geometrische Ort für die Durchschnittspuncte der verschiedenen Tangenten-Paare ist, geht, weil sie mit den beiden parallelen Tangenten parallel ist, durch den (unendlich weit entfernten) Durchschnitt derselben. Fallen aber die beiden parallelen Tangenten zusammen, so ist der Osculationspunct als ihr Durchschnittspunct anzusehen.

591. Wenn wir annehmen, dass in der Gleichung (2) $A = o$ ist, so erhalten wir statt der beiden Sätze der vorigen Nummer die folgenden:

Wenn man von irgend zwei festen Puncten der Tangente im Osculationspuncte mehrerer sich osculirender Parabeln noch zwei Tangenten an jede Parabel legt, so liegt der Durchschnittspunct solcher zwei Tangenten auf einer festen geraden Linie, die der gemeinschaftlichen Tangente im Osculationspuncte parallel ist.

Wenn man von irgend einem festen Punete der Tangente im Osculationspuncte an jede Parabel noch eine zweite Tangente legt, so liegen die Berührungspuncte auf allen diesen Tangenten auf einer festen geraden Linie, welche der Tangente im Osculationspuncte parallel ist.

Nach dem ersten der beiden vorstehenden Sätze können wir folgende Aufgabe construiren:

Eine Parabel zu beschreiben, die eine gegebene in einem gegebenen Puncte osculirt und überdiess eine gegebene gerade Linie berührt.

Es sei SQ die gegebene gerade Linie, die der Tangente des Osculationspunctes O im Puncte T begegne. Man lege durch T eine zweite Tangente TM an die gegebene Parabel und an dieselbe Parabel noch irgend eine beliebige dritte Tangente, die der Tangente TM in S', und der Tangente OT in T' begegne. Durch S' ziehe man, parallel mit OT, die gerade Linie S'S, die der gegebenen SQ in S begegne, und endlich ST'. Diese gerade Linie ist alsdann eine neue Tangente der zu construirenden Curve.

Nach dem zweiten der beiden vorstehenden Sätze können wir in der letzten Aufgabe auf der gegebenen geraden Linie den Berührungspunct bestimmen.

592. Der Abstand des Punctes (a) von der zweiten Axe ist gleich:

$$-\frac{w}{v} = \frac{2B-(x+x')}{A-xx'},$$

und bleibt also derselbe, so lange A und B dieselben Werthe behalten, das heisst, für alle beliebige Curven, welche die erste Axe im Anfangspuncte und überdiess zwei gegebene, unter sich und mit der zweiten Axe, parallele gerade Linien berühren. Also:

Wenn mehrere Curven zweiter Classe eine gegebene gerade Linie in demselben Punete und überdiess noch zwei gegebene gerade Linien berühren, und man von irgend zwei festen Puncten der ersten geraden Linie noch zwei Tangenten an jede Curve legt, so schneiden sich die verschiedenen Tangenten-Paare auf einer festen geraden Linie, die mit den beiden gegebenen parallelen Linien parallel ist.

Wenn man von demselben festen Punct der ersten gegebenen geraden Linie Tangenten an alle Curven zieht, so liegen die Berührungspuncte auf allen diesen Tangenten auf einer neuen Parallelen.

Wenn mehrere Parabeln zwei gegebene gerade Linien berühren und zwar die erste derselben in einem gegebenen Puncte, so schneiden sich je zwei Tangenten, die sich von irgend zwei festen Puncten dieser ersten geraden Linie an jede Parabel legen lassen, in einem Puncte einer festen geraden Linie, die der zweiten gegebenen parallel ist.

Wenn man von irgend einem festen Puncte der ersten gegebenen geraden Linie eine zweite Tangente an jede Parabel legt, so liegen die Berührungspuncte auf allen diesen Tangenten in derselben geraden Linie, die der zweiten gegebenen parallel ist.

Aus den vorstehenden Sätzen ergeben sich wiederum lineare Constructionen, die wir hier übergehen. Die Sätze der zunächst vorhergehenden Nummern sind als besondere Fälle derselben anzusehen.

593. Wenn wir von der allgemeinen Gleichung solcher Hyperbeln, welche die erste Axe zur gemeinschaftlichen Asymptote haben:

$$w^2+2Bvw+Cv^2+2Euv = 0, \qquad (4)$$

folgende Gleichung:

$$w^2+(\xi+\xi')vw+\xi\xi'v^2 = 0, \qquad (5)$$

welche das System irgend zweier auf der ersten Axe liegenden Puncte darstellt, abziehn und dann den gemeinschaftlichen Factor w fortlassen, so kommt:

$$(2B-(\xi+\xi'))w+(C-\xi\xi')v+2En = 0. \qquad (6)$$

Diese Gleichung stellt den Durchschnittspunct derjenigen beiden Tangenten dar, die sich von den beiden Puncten (5), die auf der Asymptote der Curve liegen, an die Curve ziehen lassen. Wenn wir diese beiden Puncte als fest, und demnach ξ und ξ' als gegeben betrachten, so erhalten wir die folgenden drei Fälle aus der Discussion der Gleichung (6).

1) Der in Rede stehende Durchschnittspunct (6) liegt auf einer festen, durch den Anfangspunct gehenden, geraden Linie, wenn wir nach einander statt der Curve (5) verschiedene Curven nehmen, in deren Gleichungen B beliebig ist, C und E aber ein für alle Mal gegeben sind.

2) Der Durchschnittspunct (6) liegt auf einer festen, der ersten Axe parallelen, geraden Linie, wenn C nach einander verschiedene Werthe erhält, B und E aber ein für alle Mal bestimmt sind.

3) Der Durchschnittspunct (6) liegt auf einer festen, der zweiten Axe parallelen, geraden Linie, wenn C und B durchaus bestimmte Werthe erhalten, der Coefficient E aber unbestimmt bleibt.

Digitized by Google

594. Die geometrische Deutung des ersten dieser drei Fälle gibt die folgenden Sätze:

Wenn man von irgend zwei festen Puncten der gemeinschaftlichen Asymptote mehrerer Hyperbeln, welche auf dieser Asymptote in unendlicher Entfernung einen dreipunctigen Contact haben, und überdiess eine gegebene gerade Linie berühren, an jede Hyperbel zwei Tangenten zieht, so liegt der Durchschnittspunct aller dieser Tangenten-Paare auf ein und derselben geraden Linie, welche durch den Durchschnitt der gemeinschaftlichen Tangente und Asymptote geht.

Wenn man von irgend einem festen Puncte der gemeinschaftlichen Asymptote an jede Hyperbel eine Tangente legt, so liegen die Berührungspuncte auf allen diesen Tangenten in einer ebenfalls durch jenen Durchschnitt gehenden geraden Linie.

In der 13. Figur, die ich hinzufüge, um von der Beziehung zweier sich in unend- Fig. 13.
licher Entfernung dreipunctig osculirender Hyperbeln zu einander eine Anschauung zu geben, ist AB die gemeinschaftliche Asymptote der beiden Curven, $\tau\tau'$ die gemeinschaftliche Tangente, und τ der Punct, in welchem diese beiden geraden Linien sich schneiden. T und T' sind zwei beliebige feste Puncte der gemeinschaftlichen Asymptote, die durch diese beiden Puncte gehenden Tangenten der einen Curve schneiden sich in S, die der andern in S'. Der Punct τ liegt mit den beiden Puncten S und S' in gerader Linie.

Nach dem ersten der beiden vorstehenden Sätze erhalten wir eine lineare Construction folgender Aufgabe:

Eine Hyperbel zu beschreiben, die mit einer gegebenen in unendlicher Entfernung einen dreipunctigen Contact hat und überdiess irgend zwei gegebene gerade Linien berührt.

Wir wollen erstens annehmen, dass eine der beiden gegebenen zu berührenden geraden Linien $\tau\tau'$ zugleich eine Tangente der gegebenen Hyperbel MN sei. Die andere gegebene gerade Linie sei TQ und schneide diejenige Asymptote AB der gegebenen Hyperbel, auf welche der Contact Statt finden soll, im Puncte T. Man lege von T aus an die gegebene Hyperbel die Tangente TS' und an dieselbe Curve noch irgend eine zweite Tangente T'S', welche der Tangente TS' in S' und der Asymptote AB in T' begegne. Man ziehe τS', welche der gegebenen geraden Linie TQ in S begegne und endlich T'S. Diese letzte gerade Linie ist alsdann eine neue Tangente der zu construirenden Curve.

Wenn zweitens irgend zwei beliebige gerade Linien, welche von der gesuchten Curve berührt werden sollen, gegeben sind, so können wir sogleich die gemeinschaftliche Tangente der beiden Curven bestimmen. Es seien nemlich TS und T'S die beiden gegebenen geraden Linien; alsdann ergibt sich der Punct S', indem wir von T und T' aus Tangenten an die gegebene Hyperbel legen. Die durch S und S' gehende gerade Linie schneidet AB in τ, durch welchen Punct jene gemeinschaftliche Tangente geht.

Nach dem zweiten der beiden vorstehenden Sätze können wir sogleich die beiden Berührungspuncte auf den beiden gegebenen geraden Linien bestimmen. Der Berührungspunct t auf TQ zum Beispiel liegt zugleich auf derjenigen geraden Linie τt', welche den Berührungspunct t' auf TS', der durch T' gehenden Tangente der gegebenen Hyperbel mit dem Puncte τ verbindet.

Digitized by Google

An den letztgenannten Satz schliessen sich noch einige specielle Constructionen an, von denen wir die Construction der folgenden Aufgabe noch hervorheben wollen.

Eine Hyperbel zu beschreiben, die mit einer gegebenen auf einer gegebenen Asymptote derselben einen dreipunctigen Contact und überdiess eine gegebene gerade Linie zur zweiten Asymptote hat.

Es sei AC die gegebene gerade Linie, welche der gemeinschaftlichen Asymptote AB in A begegne. Man lege durch A eine Tangente At'' an die gegebene Curve und t'' sei der Berührungspunct. Durch t'' lege man eine gerade Linie parallel mit AC. Diese gerade Linie schneidet AB in T.

595. Die geometrische Deutung des zweiten Falles der 593. Nummer gibt die folgenden beiden Sätze:

Wenn man von irgend zwei festen Puncten der gemeinschaftlichen Asymptote mehrerer in unendlicher Entfernung sich vierpunctig osculirender Hyperbeln, zwei Tangenten an jede derselben legt, so liegen die Durchschnittspuncte aller dieser Tangenten-Paare auf einer der gemeinschaftlichen Asymptote parallelen geraden Linie. Die Berührungspuncte auf allen durch denselben Punct der gemeinschaftlichen Asymptote gehenden Tangenten liegen ebenfalls auf einer dieser Asymptote parallelen geraden Linie.

Nach dem vorstehenden Satze können wir folgende Aufgabe construiren:

Eine Hyperbel zu beschreiben, die eine gegebene in unendlicher Entfernung vierpunctig osculirt und überdiess eine gegebene gerade Linie berührt.

Fig. 14. Es sei MN die gegebene Hyperbel, AB diejenige Asympsote, auf welcher der Contact Statt finden soll, und die von der gegebenen geraden Linie TQ in T geschnitten wird. An die gegebene Hyperbel lege man irgend zwei Tangenten TS' und TS'', von welchen die erstgenannte durch T geht. Durch S', den Durchschnitt dieser beiden Tangenten, lege man S'S parallel mit AB und S sei der Punct, in welchem diese gerade Linie der gegebenen TQ begegnet. Zieht man alsdann TS, so erhält man eine neue Tangente der zu construirenden Curve.

Wenn die gegebene gerade Linie insbesondere TQ durch den Mittelpunct der gegebenen Curve geht, so ist dieselbe die zweite Asymptote der verlangten Curve. In der eben angezeigten Construction der Tangenten dieser Curve ändert sich nichts.

Um auf der gegebenen geraden Linie TQ den Berührungspunct t zu bestimmen, brauchen wir nur tt', parallel mit AB durch t', den Berührungspunct auf Tt', zu ziehen.

Eine Hyperbel zu beschreiben, die eine gegebene in unendlicher Entfernung vierpunctig osculirt und überdiess durch einen gegebenen Punct geht.

Es sei t der gegebene Punct. Durch diesen Punct lege man tt' parallel mit AB, und t' sei der Punct, in welchem diese gerade Linie der gegebenen Hyperbel begegnet. An diese Hyperbel lege man im Puncte t' eine Tangente, die der Asymptote AB in T begegne. Zieht man endlich Tt, so erhält man die Tangente der verlangten Curve in dem gegebenen Puncte t.

Man sieht ohne Mühe, dass die Sätze und Constructionen dieser Nummer aus den Sätzen und Constructionen der vorigen als besondere Fälle sich herleiten lassen. Aus der Discussion des dritten Falles der 593. Nummer ergeben sich ganz analoge, und noch allgemeinere Resultate, bei deren Herleitung wir hier nicht verweilen wollen.

Digitized by Google

596. Wenn wir von der allgemeinen Gleichung solcher Parabeln, deren Durchmesser der ersten Axe parallel sind:

$$n^2+2Bvw+Cv^2+2Env = 0, \qquad (7)$$

folgende Gleichung:

$$n^2+(\lambda+\lambda')nv+\lambda\lambda'v^2 = 0, \qquad (8)$$

die ein System von zwei nach gegebenen Richtungen hin unendlich weit liegenden Puncten darstellt, abziehen, und in der resultirenden Gleichung den gemeinschaftlichen Factor v vernachlässigen, so kommt:

$$2Bw+(C-\lambda\lambda')v+(2E-(\lambda+\lambda'))n = 0. \qquad (9)$$

Diese Gleichung stellt offenbar den Durchschnittspunct derjenigen beiden Tangenten dar, welche die der Gleichung (8) entsprechenden Richtungen haben. Wir erhalten hier wiederum drei verschiedene Fälle: (586)

1) Der Punct (9) liegt auf einer festen, durch den Anfangspunct gehenden, geraden Linie, wenn wir in der allgemeinen Gleichung (7) für C und E ein für alle Mal bestimmte, für B aber nach einander alle möglichen Werthe annehmen.
2) Der Punct (9) liegt auf einer der zweiten Axe parallelen geraden Linie, wenn die Coefficienten B und C bestimmt sind, aber E unbestimmt bleibt.
3) Der Punct (9) liegt auf einer der ersten Axe parallelen geraden Linie, wenn die Coefficienten B und E gegeben sind, der Coefficient C aber beliebig angenommen werden kann.

597. Die geometrische Deutung des ersten Falles der vorigen Nummer führt uns zu folgendem Satze.

Wenn man nach zwei gegebenen Richtungen, an jede von solchen Parabeln, die zwei gegebene gerade Linien berühren und deren Durchmesser parallel sind, zwei Tangenten legt, so liegen die Durchschnittspuncte solcher Tangenten-Paare, so wie die Berührungspuncte auf allen unter sich parallelen Tangenten, auf denselben geraden Linien und diese geraden Linien gehen durch den Durchschnittspunct der gemeinschaftlichen Tangenten der beiden Parabeln.

Nach diesem Satze ergibt sich unter Anderm, wie sogleich erhellet, die Construction der gemeinschaftlichen Tangenten zweier Parabeln, deren Durchmesser parallel sind.

598. Die geometrische Deutung des 2. Falles der 596. Nummer gibt folgenden Satz:

Wenn man nach zwei gegebenen Richtungen, an jede von solchen Parabeln, die sich in unendlicher Entfernung dreipunctig osculiren und überdiess eine gegebene gerade Linie berühren, zwei Tangenten legt, so liegen die Durchschnitte aller dieser Tangenten-Paare in gerader Linie und diese gerade Linie ist der gegebenen parallel. Die Berührungspuncte auf allen unter einander parallelen Tangenten der verschiedenen Parabeln liegen ebenfalls in einer solchen geraden Linie.

Hiernach ergibt sich die Construction folgender Aufgabe:

Eine Parabel zu beschreiben, die eine gegebene in unendlicher Entfernung dreipunctig osculirt und überdiess irgend zwei gegebene gerade Linien berührt.

Es sei MN die gegebene Parabel, QS und RS seien die beiden gegebenen geraden Linien und S ihr Durchschnitt. Man lege an die gegebene Parabel zwei diesen geraden Linien parallele Tangenten Q'S' und R'S', die sich in irgend einem Puncte S' schneiden werden. Man ziehe SS' und lege, parallel mit dieser geraden Linie, an die gegebene Parabel die Tangente TT. Diese Tangente berührt zugleich auch die verlangte Parabel; Fig. 15.

Sobald diese gemeinschaftliche Tangente gefunden ist, ist es leicht, beliebig viele Tangenten der letztgenannten Parabel zu bestimmen.

Um die Berührungspuncte t und t'' auf den beiden geraden Linien QS und RS zu finden, brauchen wir nur durch t' und t''', die Berührungspuncte auf Q'S' und R'S', zwei gerade Linien, parallel mit SS', zu ziehen.

599. Die geometrische Deutung des dritten Falles der 596. Nummer zeigt, dass alsdann alle Parabeln denselben Haupt-Durchmesser und gleiche Parameter haben und also zusammenfallen würden, wenn man dieselben nach der Richtung der ersten Axe gehörig verschöbe. Dasselbe folgt unmittelbar aus der 480. und 506. Nummer.

600. Die Gleichung (3) der 587. Nummer stellt, indem wir von irgend einer bestimmten, der durch die allgemeine Gleichung (1) dargestellten, Curven ausgehen und nach und nach für x und x' alle möglichen Werthe nehmen, alle möglichen Puncte in der Ebene der Curve dar. Bestimmen wir x und x' so, dass

$$x+x' = const.,$$

so liegen alle diese Puncte auf derselben durch den Anfangspunct der Coordinaten gehenden geraden Linie. Hiernach erhalten wir folgenden Satz:

Wenn wir auf einer gegebenen Tangente einer gegebenen Curve zweiter Classe, solche Paare von Puncten bestimmen, die mit dem Berührungspuncte und irgend einem festen Puncte der gegebenen Tangente vier harmonische Theilungspuncte bilden, so schneiden sich die Tangenten-Paare, welche durch diese Puncte gehen, auf einer festen, durch den Berührungspunct gehenden, geraden Linie.

Dieselbe gerade Linie geht offenbar auch durch den Berührungspunct auf der zweiten durch jenen festen Punct gehenden Tangente. Hiernach können wir demselben Satze auch folgende Aussage geben:

Irgend zwei Tangenten einer gegebenen Curve zweiter Classe werden von zweien andern harmonisch geschnitten, wenn der Durchschnitt dieser auf der Polaren des Durchschnittes von jenen liegt.

Die Beziehung der beiden Tangenten-Paare zu einander ist durchaus gegenseitig.

Wenn wir insbesondere

$$x+x' = 0$$

setzen, so ist der in Rede stehende Ort ein Durchmesser der Curve und wir kommen zu einem allbekannten Satze.

Der Punct (3) liegt ferner auf einer der ersten Axe paralellen geraden Linie, wenn

$$x' = const.,$$

und somit erhalten wir den nachstehenden Satz:

Wenn wir von zwei beliebigen Puncten einer gegebenen Tangente einer gegebenen Curve zweiter Classe, für welche das Product der Abstände vom Berührungspuncte, derselben beliebigen Grösse gleich ist, Tangenten an die Curve legen, so schneiden dieselben sich auf einer festen, der gegebenen Tangente parallelen, geraden Linie.

601. Die ganz analoge Discussion der Gleichung (6) der 593. Nummer gibt, indem wir

$$\xi+\xi' = const.$$

setzen, folgenden Satz, den wir durch Gränzbetrachtungen sogleich aus dem ersten Satze der vorhergehenden Nummer hätten herleiten können.

Wenn man von solchen Puncten einer Asymptote einer gegebenen Hyperbel, die von einem gegebenen Punete dieser Asymptote gleich weit abstehen, Tangenten an die Hyperbel legt, so schneiden sich diese Tangenten, paarweise genommen, auf einer festen, jener Asymptote parallelen geraden Linie.

Hiernach ergibt sich eine leichte Construction einer Hyperbel, die von vier gegebenen geraden Linien eine zu einer ihrer Asymptoten und die drei übrigen zu Tangenten hat.

Wenn wir

$$\xi\xi' = const.$$

setzen, so ergibt sich folgender Satz:

Wenn man von solchen zwei Puncten einer Asymptote einer gegebenen Hyperbel, für welche das Product der Abstände von einem festen Puncte derselben Asymptote constant ist, Tangenten an die Hyperbel legt, so schneiden sich dieselben in einem Puncte einer durch den festen Punct gehenden festen geraden Linie.

602. Aus einer analogen Discussion der Gleichung (9) erhalten wir endlich noch zwei allbekannte Sätze, die den Sätzen der beiden vorigen Nummern entsprechen und die wir aus diesem Grunde hier anführen.

Irgend zwei Tangenten einer gegebenen Parabel, derjenige Durchmesser, welcher durch den Durchschnittspunct derselben geht, und die Tangente im Scheitel dieses Durchmessers, haben die Richtung von vier Harmonicalen.

Dieser Satz bezieht sich auf die Bedingung:

$$\lambda + \lambda' = const.$$

Wenn wir

$$\lambda\lambda' = const.$$

setzen und insbesondere *const.* $= (-1)$ nehmen, so kommen wir zu folgendem zweiten Satze:

Die Scheitel aller rechten Winkel, deren Schenkel eine gegebene Parabel berühren, liegen in gerader Linie (der Directrix). —

603. Wenn wir irgend eine Curve zweiter Classe, welche die erste Coordinaten-Axe im Anfangspuncte berührt, durch die Gleichung:

$$Aw^2 + 2Bvw + Cv^2 + 2Duw = 0, \qquad (1)$$

darstellen, so erhalten wir die Gleichungen aller möglichen Curven derselben Classe, die die gegebene im Anfangspuncte dreipunctig osculiren, wenn wir, unter der Bedingung, dass der Quotient $\frac{D}{C}$ unverändert derselbe bleibt, den Coefficienten der vorstehenden Gleichung beliebige Werthe beilegen (581). Eine von diesen Gleichungen insbesondere stellt einen Kreis dar. Diesen Kreis wollen wir in dem Folgenden bestimmen.

Bei der Annahme rechtwinkliger Coordinaten-Axen ist die allgemeine Gleichung des Kreises:

$$(au + bv + w)^2 = \varrho^2(v^2 + u^2),$$

wenn ϱ den Radius desselben bezeichnet und

$$au + bv + w = 0$$

die Gleichung seines Mittelpunctes ist (442). Wenn der Kreis die erste Coordinaten-Axe im Anfangspuncte berühren soll, so verwandelt sich seine Gleichung, indem wir

$$b = 0, \qquad a = \varrho,$$

setzen, in folgende:

$$w^2 - \varrho^2 v^2 + 2\varrho uw = 0. \qquad (1)$$

Wenn der Kreis (2) die gegebenen Curve (1) dreipunctig osculiren soll, so erhalten wir (581) die Bedingungs-Gleichung:

$$\frac{D}{C} = -\frac{1}{\varrho},$$

mithin:

$$\varrho = -\frac{C}{D}.$$

Wir erhalten hiernach eine einfache Construction des Krümmungshalbmessers einer gegebenen Curve zweiter Classe in einem gegebenen Puncte. Es ist nemlich $\left(\frac{C}{A}\right)$ gleich dem Producte der beiden Abstände der beiden der zweiten Coordinaten-Axe parallelen Tangenten von dieser Axe (der Normalen im gegebenen Puncte) und $\left(-\frac{2D}{A}\right)$ gleich dem Abstande derjenigen Tangente, die der ersten Coordinaten-Axe parallel ist, von dieser Axe (der Tangente im gegebenen Puncte). Hiernach gelangen wir zu folgendem Satze:

Der Krümmungshalbmesser einer in ein gegebenes Rechteck beschriebenen Curve zweiter Classe in demjenigen Puncte, in welchem dieselbe eine Seite des Rechtecks berührt, ist gleich der vierten Proportionalen zu der Hälfte einer der beiden anliegenden Seiten des Rechtecks und den beiden durch den Berührungspunct auf der erstgenannten Seite bestimmten Segmente.

Unmittelbar an diesen Satz knüpft sich die Construction folgender Aufgabe:

In ein gegebenes Rechteck eine Ellipse zu beschreiben, die in demjenigen Puncte, in welchem eine Seite des Rechtecks berührt wird, eine gegebene Krümmung hat.

Man würde nur leichte Modificationen erhalten, wenn man an die Stelle des Rechtecks ein beliebiges Parallelogramm setzte.

604. Die in der vorigen Nummer entwickelte Construction des Krümmungshalbmessers einer gegebenen Curve zweiter Classe in einem gegebenen Puncte verliert ihre Anwendbarkeit für den Fall der Parabel. Wir erhalten eine zweite Construction, wenn wir zu der allgemeinern Constanten-Bestimmung in der 527. Nummer zurückgehen, nach der sich, wenn wir den Mittelpunct der Curve durch (y', x'), und den Pol der zweiten Axe, der in dem vorliegenden Falle auf der ersten Axe liegt, durch (o', x'') bezeichnen, folgende Gleichung ergibt:

$$\varrho = -\frac{C}{D} = -\frac{x'}{y'}x''.$$

Fig. 16. In der 16. Figur, auf die wir uns, der Kürze halber, beziehen wollen, ist O der auf dem Umfange der Curve liegende Anfangspunct und OY und OX sind die beiden sich rechtwinklig schneidenden Coordinaten-Axen. K ist der Mittelpunct und X'' der Pol der zweiten Axe. Alsdann kommt:

$$x'' = OX'',$$

$$-\frac{x'}{y'} = tang YOK = tang\alpha,$$

und mithin:

$$\varrho = OX'' tang\alpha = OP,$$

indem wir durch X'' die gerade Linie PX'' so legen, dass der Winkel OX''P gleich α ist. Man kann hiernach den Punct P auch construiren, indem man vom Puncte X'' aus auf den durch den gegebenen Punct O gehenden Durchmesser KO ein Perpendikel fällt, und

Digitized by Google

mit diesem Perpendikel, verlängert bis zom Durchschnitte mit der zweiten Axe, als Radius, aus X'', als Mittelpunct, einen Kreis RP beschreibt. Wir haben also folgenden Satz:

Wenn eine Curve zweiter Classe und auf dem Umfange derselben ein Punct gegeben ist, so bildet der durch diesen Punct gehende Durchmesser mit der Normalen denselben Winkel, als die Tangente mit einer durch den Pol der Normalen und den Mittelpunct des Osculations-Kreises in dem gegebenen Puncte gehenden geraden Linie.

Es besteht dieser Satz offenbar auch für denjenigen Fall, dass die gegebene Corve eine Parabel ist.

605. Aus dem Anblick der beiden Gleichungen (1) und (2) der 603. Nummer ergibt sich sogleich, dass der Kreis (2) mit der gegebenen Curve nur dann einen vierpunctigen Contact haben kann, wenn (581):

$$B = o,$$

das heisst, wenn die zweite Axe durch den Mittelpunct der gegebenen Corve geht. Also nur in den Scheitelpuncten der beiden Haoptdorchmesser einer gegebenen Curve zweiter Classe wird dieselbe von einem Kreise vierpunctig osculirt. *)

---

*) Wir wollen in dieser Note kurz aodeoten, wie die im Texte entwickelte Theorie der Osculation sich unmittelbar auf Curven einer beliebigen Classe aosdehnen lässt.

Es sei:

$$aw^3+(bv+cu)w^2+(dv^2+euv+fu^2)w+gv^3+huv^2+iu^2v+ku^3 = o, \qquad (1)$$

die allgemeine Gleichoog der Curveo dritter Classe.. Wenn wir io dieser Gleichong $w = o$ setzen, so ergibt sich die Gleichung:

$$gv^3+hov^2+iu^2v+ku^3 = o,$$

sor Bestimmong der Richtong der drei durch den Anfangspouct geheodeo Tangeoten. Io dem Falle, dass $k = o$, wird die Corve von der ersten Axe berührt. Wenn zogleich $i = o$, so fallen zwei durch den Anfangspunct der Coordinaten gehende Tangenten mit der ersten Axe zusammen: die Curve geht durch den Anfangspunct. Weno endlich überdiess auch $h = o$, so fallen drei durch den Anfangspunct gehende Tangenten mit der ersteo Axe zusammen. Der Anfangspunct ist ein singularer Punct, drei auf einander folgende Elemente der Curve fallen in die erste Axe; man könnte sagen: zwischen Curve uod Anfangspunct finde eine dreitangentige Osculation Statt.

Wenn wir in der Gleichung (1) $v = o$ setzen, so erhalteo wir zur Bestimmong derjenigen Puncte, in welchen die drei der ersteo Axe parallelen Tangenteo io die zweite Axe einschneiden, folgende Gleichung:

$$aw^3+cuw^2+fu^2w+ku^3 = o.$$

Diese Gleichong zeigt wiederum, dass, wenn $k = o$ ist, eine Tangente der Corve mit der ersten Axe zusammenfällt. Wenn zogleich $f = o$, so gehen zwei der ersten Axe parallele Taogenten durch deo Anfangspunct: die erste Axe berührt, im Allgemeinen, zwei Zweige der gegebeneo Curve. Wenn überdiess auch ooch $c = o$, so gehen drei der ersten Axe parallele Tangenten durch den Anfangspnoct; es wird diese Axe von der gegebeneo Curve, im Allgemeinen, in drei Puocten berührt. —

Wenn wir den Anfangspunct der Coordinateo auf dem Umfange irgend einer gegebenen Corve dritter Classe beliebig annehmen, uod mit der Tangente in diesem Puncte die erste Axe zusammenfallen lassen, so erhalten wir für die Curve, wie wir eben geseheo haben, eioe Gleichung von folgender Form:

$$aw^3+(bv+cu)w^2+(dv^2+euv+fu^2)w+gv^3+huv^2 = o. \qquad (2)$$

Ferner ist die allgemeine Gleichung derjeoigen Curven zweiter Classe, welche die erste Axe, uod mithin auch die gegebeoe Corve dritter Classe, im Aofangspuncte berühreo,

$$Aw^2+2Bvw+Cv^2+2Duw = o. \qquad (3)$$

Es ist leicht, aus den beiden vorstehenden Gleichungen eine solche Gleichung herzuleiten, die ebeofalls vom dritteo Grade ist, ond in welcher w als gemeinschaftlicher Factor erscheint. Wir brauchen zu diesem Ende in der Gleichung (2) nur statt v^3 und uv^2 folgende Ausdrücke, welche wir aus (3) erhalteo, zu substituireo:

Digitized by Google

606. In der 584. Nummer haben wir nachgewiesen, dass alle Curven, welche durch folgende Gleichung:

$$w^2+2Bvw+Cv^2+2Euv = o,$$

dargestellt werden, wenn B und C beliebige Coefficienten sind, E aber ein für alle Mal

---

$$-v.\frac{Aw^2+2Bvw+2Duw}{C}, \qquad -u.\frac{Aw^2+2Bvw+2Duw}{C}.$$

Hiernach kommt:

$$w[Caw^2+(Ch-Ag)vw+(Cd-2Bg)v^2+(Ce-Ah)uw+(Ce-2Dg-2Bh)uv+(Cf-2Dh)u^2] = o. \quad (4)$$

Da die Gleichung (4) eine algebraische Folge aus den beiden Gleichungen (2) und (3) ist, so können wir die gemeinschaftlichen Tangenten der beiden gegebenen Curven auch aus der Zusammenstellung der beiden Gleichungen (2) und (4) bestimmen. Die Anzahl dieser gemeinschaftlichen Tangenten beträgt sechs. Zwei dieser sechs Tangenten, worauf sich der Factor w in der letzten Gleichung bezieht, fallen in die erste Axe; die vier übrigen erhalten wir, indem wir aus (3) und der Gleichung:

$$Caw^2+(Ch-Ag)vw+(Cd-2Bg)v^2+(Ce-Ah)uw+(Ce-2Dg-2Bh)uv+(Cf-2Dh)u^2 = o, \quad (5)$$

etwa die Werthe für $\frac{w}{u}$ und $\frac{w}{v}$ ziehen. Um auszudrücken, dass diese letztgenannten vier gemeinschaftlichen Tangenten der beiden gegebenen Curven, die also auch gemeinschaftliche Tangenten jeder dieser Curven und der durch (5) dargestellten Curve zweiter Classe sind, mit der ersten Axe zusammenfallen, erhalten wir zugleich folgende Gleichungen:

$$Cf-2Dh = o, \quad (6)$$
$$Ce-2Dg-2Bh = o, \quad (7)$$
$$C(Ce-Ah) = 2D(Cd-2Bg), \quad (8)$$
$$C(Ch-Ag) = 2B(Cd-2Bg), \quad (9)$$

Die Gleichung (6) bedeutet, dass die Curve (5) die erste Axe berührt, die Gleichungen (6) und (7) zeigen an, dass der Berührungspunct auf der ersten Axe mit dem Anfangspuncte zusammenfällt. Die Gleichungen (6), (7) und (8) drücken aus, dass die Curve (5) die gegebene Curve zweiter Classe (3) dreipunctig osculirt, und die letzten Gleichungen, alle vier zugleich, dass diese Osculation eine vierpunctige ist. Es folgt hieraus, dass die beiden gegebenen Curven (2) und (3) sich in diesen verschiedenen Fällen drei-, vier-, fünf-, sechs-punctig osculiren auf der ersten Axe im Anfangspuncte der Coordinaten.

Aus den letzten vier Gleichungen erhalten wir ohne Mühe die nachstehenden, welche ihre Stelle vertreten können:

$$Cf-2Dh = o, \quad (10)$$
$$C(he-fg)-2Bh^2 = o, \quad (11)$$
$$C(ch^3-dfh^2+fegh-f^2g^2)-Ah^4 = o, \quad (12)$$
$$bh^4-(cg+dh)h^3+(e^2g+2dfg)h^2-3feg^2h+2f^2g^3 = o. \quad (13)$$

Hiernach ergibt sich unmittelbar für den Osculations-Kreis der gegebenen Curve im Anfangspuncte (bei der Voraussetzung rechtwinkliger Coordinaten-Axen) folgende Gleichung:

$$f^2w^2-4h^2v^2-4fhuw = o. \quad (14)$$

Wollen wir die Krümmung der Curve noch genauer bestimmen, so können wir diess am füglichsten vermittelst der Osculations-Parabel thun. Für diese Parabel finden wir folgende Gleichung:

$$(he-fg)vw+h^2v^2+fhuw = o. \quad (15)$$

Wollen wir die Krümmung der gegebenen Curve im Anfangspuncte durch die (fünfpunctig) osculirende Curve zweiter Classe bestimmen, so erhalten wir für diese Curve folgende Gleichung:

$$(ch^3-dfh^2+fegh-f^2g^2)w^2+h^2(he+fg)vw+h^3v^2+fh^3uw = o. \quad (16)$$

Weiter können wir hier im Allgemeinen nicht gehen. Die Gleichung (13) ist eine Bedingungs-Gleichung zwischen den Constanten der gegebenen Gleichung der Curve dritter Classe, die befriedigt werden muss, wenn diese Curve im Anfangspuncte mit einer Curve zweiter Classe einen sechspunctigen Contact haben soll. Eine Curve dritter Classe hat nur in gewissen Puncten ihres Umfangs mit einer Curve zweiter Classe einen sechspunctigen Contact. Wenn ein solcher Punct zum Anfangspuncte der Coordinaten, und die Tangente in diesem Puncte zur ersten Axe genommen wird, so stellt die letzte Gleichung jene sechspunctig os-

Digitized by Google

gegeben ist, solche Hyperbeln sind, welche sich auf der ersten Axe in unendlicher Entfernung osculiren. Für alle diese Curven ist das Product der beiden Haupt Durchmesser derselben eine constante (imaginäre) Grösse. Das Quadrat dieses Productes ist nemlich (511), wenn wir die allgemeine Gleichung zu Grunde legen, gleich:

$$\frac{(AE-BD)^2-(AC-B^2)(AF-D^2}{A^4},$$

und dieser Ausdruck reducirt sich, indem wir A = 1, D = o und F = o setzen, auf:

$$-E^2.$$

E ist aber nach der 532. Nummer gleich dem Inhalte des von einer beliebigen Tangente und den beiden Asymptoten einer der gegebenen Hyperbeln gebildeten Dreiecks.

In allen Hyperbeln, welche sich in unendlicher Entfernung dreipunctig osculiren, ist der Inhalt aller Dreiecke, die von dem Asymptoten-Winkel durch eine beliebige Tangente abgeschnitten werden, constant. *)

---

culirende Curve dar, und es gibt eigentlich keine fünfpunctig osculirende Curve zweiter Classe für diesen Punct.

Die Construction des Krümmungshalbmessers, die wir in der 603. Nummer für den Fall, dass die gegebene Curve von der zweiten Classe ist, entwickelt haben, lässt sich auf beliebige algebraische Curven ausdehnen. Es sei:

$$aw^m+(bv+en)w^{m-1}+\ldots+(dv^{m-1}+euv^{m-2}+\ldots fu^{m-2})w^2+(gv^{m-1}+\ldots+bn^{m-2}v+kn^{m-1})w+lv^m+\ldots+mu^{m-1}v^2+nu^m=o,$$

die Gleichung irgend einer Curve m. Classe. Der Krümmungshalbmesser dieser Curve im Anfangspuncte der Coordinaten ist alsdann gleich:

$$\frac{2}{m-1}\cdot\frac{n}{k},$$

was unter Anderm auch aus der 544. Nummer folgt, nach welcher:

$$fw^2+hvw+(m-1)kuw+nv^2=o,$$

eine Curve zweiter Classe darstellt, welche die gegebene im Anfangspuncte der Coordinaten dreipunctig osculirt.

Wenn wir die Abstände derjenigen m Tangenten der gegebenen Curve, welche der zweiten Axe parallel sind, durch $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_m$, ferner die Abstände derjenigen (m—1) Tangenten, welche der ersten Axe parallel sind, durch $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_{m-1}$ und endlich diejenigen Winkel, welche die durch den Anfangspunct gehenden (m—2) Tangenten (die beiden in die erste Axe fallenden Tangenten nicht mitgerechnet) durch $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_{m-2}$ bezeichnen, so erhalten wir, abgesehen vom Zeichen, sogleich folgende Ausdrücke:

$$\frac{n}{l} = tang\omega_1 \cdot tang\omega_2 \ldots tang\omega_{m-2},$$

$$\frac{l}{a} = \eta_1 \cdot \eta_2 \ldots \eta_m,$$

$$\frac{k}{a} = \xi_1 \cdot \xi_2 \ldots \xi_{m-1};$$

und hiernach ist der zu bestimmende Krümmungshalbmesser gleich:

$$\frac{2}{m-1}\cdot\frac{\eta_1 \cdot \eta_2 \ldots \eta_m}{\xi_1 \cdot \xi_2 \ldots \xi_{m-1}} \cdot tang\omega_1 \cdot tang\omega_2 \ldots tang\omega_{m-2}.$$

Der Raum verbietet in die Discussion dieses bemerkenswerthen Ausdrucks, der zum Beispiel für den Fall, dass wir zum Anfangspuncte einen der Berührungspuncte auf einer solchen geraden Linie nehmen, welche zwei oder mehrere Zweige der gegebenen Curve zugleich berührt, unter der Form $\frac{o}{o}$ erscheint.

*) Wenn irgend eine Curve gegeben ist, die reelle Asymptoten hat, so können wir Hyperbeln bestimmen, welche mit der gegebenen Curve auf jeder Asymptote in unendlicher Entfernung

607. Wir haben in der 586. Nummer gesehen, dass, wenn wir in der Gleichung:

$$2Bvw+Cv^2+2Euv+u^2 = 0,$$

C und E beliebig annehmen, während wir B als ein für alle Mal gegeben betrachten, diese Gleichung solche Parabeln darstellt, die sich in unendlicher Entfernung dreipunctig osculiren. Alle diese Parabeln haben, wie wir schon gezeigt haben, Durchmesser, die der ersten Axe parallel sind, und, wovon man sich leicht überzeugt, gleiche Parameter. Indem wir nemlich die Gleichung:

$$2Bvw+Cv^2+2Duw+2Euv+Fu^2 = 0,$$

zu Grunde gelegt, haben wir für den vierten Theil des Parameters der bezüglichen Curve in der 506. Nummer folgenden Ausdruck erhalten:

---

einen dreipunctigen Contact haben. Wenn wir eine dieser osculirenden Hyperbeln durch die Gleichung:

$$w^2+2Bvw+Cv^2+Euv = 0,$$

darstellen, so können wir E als das Maass der Krümmung der gegebenen Curve auf einer der Asymptoten in unendlicher Entfernung betrachten.

Es sei:

$$aw^m+(bv+cu)w^{m-1}+\ldots+(dv^{m-2}+euv^{m-3}+\ldots+fu^{m-2})w^2+(gv^{m-1}+\ldots+hu^{m-2}v)w$$
$$+lv^m+\ldots+nu^{m-2}v^2+pu^{m-1}v = 0,$$

die Gleichung einer gegebenen Curve m. Classe. Die erste Axe ist eine Asymptote der Curve; denn wenn wir in der vorstehenden Gleichung $w = 0$ setzen, kommt:

$$v(lv^{m-1}+\ldots+nu^{m-2}v+pu^{m-1}) = 0,$$

und wenn wir $v = \pm 0$ setzen, so ergibt sich:

$$w^2(aw^{m-2}+cuw^{m-3}+\ldots+fu^{m-2}) = 0.$$

Hiernach ergibt sich nach der 544. Nummer für eine der in Rede stehenden osculirenden Hyperbeln folgende Gleichung:

$$fw^2+hvw+nv^2+(m-1)puv = 0,$$

und mithin:

$$E = \frac{m-1}{2}\,\frac{p}{f}.$$

Um diesen Ausdruck zu construiren, wollen wir die Abstände der $(m-2)$ Tangenten, die derjenigen Asymptote, auf welcher in unendlicher Entfernung die dreipunctige Osculation Statt finden soll, parallel sind, von dieser Asymptote, durch $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_{m-2}$; die Abstände der m Tangenten, welche der zweiten Axe parallel sind, und also bei unserer Coordinaten-Annahme auf jener Asymptote senkrecht stehen, von der zweiten Axe, durch $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_m$; und endlich die Winkel, welche die $(m-1)$ durch den Anfangspunct gehenden Tangenten, mit der Asymptote bilden, durch $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_{m-1}$ bezeichnen, — so finden wir ohne Mühe:

$$\frac{p}{l} = tang\omega_1 \cdot tang\omega_2 \cdot \ldots \cdot tang\omega_{m-1},$$

$$\frac{-}{a} = \eta_1 \cdot \eta_2 \cdot \ldots \cdot \eta_m,$$

$$\frac{f}{a} = \xi_1 \cdot \xi_2 \cdot \ldots \cdot \xi_{m-2},$$

und endlich:

$$E = \frac{m-1}{2} \cdot \frac{\eta_1 \cdot \eta_2 \cdot \ldots \cdot \eta_m}{\xi_1 \cdot \xi_2 \cdot \ldots \cdot \xi_{m-2}}\, tang\omega_1 \cdot tang\omega_2 \cdot \ldots \cdot tang\omega_{m-1}.$$

Je grösser der Werth von E ist, desto langsamer nähert sich die Curve der in Rede stehenden Asymptote. Wenn wir diese Annäherung noch genauer bestimmen wollen, so müssen wir höhere Ordnungen der Osculation in unendlicher Entfernung betrachten. Wir gelangen hiezu, ohne irgend einer Schwierigkeit zu begegnen, auf dem in der Note zur 605. Nummer eingeschlagenen Wege.

Digitized by Google

$$\frac{(CD^2-2BDF+FB^2)\sin^2\vartheta}{2(B^2+2BD\cos\vartheta+D^2)^{3/2}};$$

und dieser Ausdruck reducirt sich, indem wir F = 1 und D = 0 setzen, auf

$$\frac{\sin^2\vartheta}{2B}. \quad -\ ^*)$$

---

*) Die Gleichung irgend einer Curve m. Classe, welche ein Paar parabolischer Zweige hat, ist, nach der Note der 524. Nummer, von folgender Form:

$$(Bv+C)w^{m-1}+(Dv^2+Ev+F)w^{m-2}+\ \ldots\ =\ 0.$$

Eine solche Curve berührt, wie die Parabel, eine unendlich weit liegende gerade Linie, die mit einer gegebenen parallel ist; das heisst, wenn man auf jedem der beiden ins Unendliche hin sich erstreckenden Zweige immer weiter fortgeht, so nähert sich die Richtung der entsprechenden Tangenten immer mehr einer bestimmten Richtung und zugleich entfernen sich die Tangenten auf beiden Zweigen immer weiter, bis sie, nach entgegengesetzter Seite ins Unendliche hin weiterrückend, zuletzt als zusammenfallend anzusehen sind.

Wir können die vorstehende Gleichung leicht und zwar nur auf eine einzige Weise in eine andere verwandeln, in welcher das mit w^{m-1} behaftete Glied fehlt. Lassen wir nemlich, indem wir von einem rechtwinkligen Coordinaten-Systeme zu einem rechtwinkligen übergehen, die beiden Axen um einen Winkel φ sich drehen, so geht (552 (D)) jene Gleichung in folgende über:

$$\frac{(B\cos\varphi+C\sin\varphi)v-(B\sin\varphi-C\cos\varphi)u}{(v\sin\varphi+u\cos\varphi)^m}w^{m-1}+\ \text{etc.}\ =\ 0,$$

und nimmt also, indem wir:

$$\operatorname{tang}\varphi\ =\ \frac{C}{B},$$

setzen, folgende Form an:

$$bvw^{m-1}+(cv^2+duv+2fu^2)w^{m-2}+\ \ldots\ +lv^m+\ \ldots\ pu^{m-1}v+qu^m\ =\ 0.$$

Wenn wir in dieser Gleichung u = n setzen, so kommt:

$$v(bw^{m-1}+dvw^{m-2}+\ \ldots\ +lv^{m-1})\ =\ 0,$$

und wenn wir v = ±0 setzen, so ergibt sich:

$$u^2(fw^{m-2}+\ \ldots\ +qu^{m-2})\ =\ 0.$$

Wir sehen hieraus, dass die gegebene Curve m. Classe die unendlich weit entfernte der ersten Axe parallele gerade Linie berührt.

Nach der 544. Nummer erhalten wir für eine, die gegebenen Curve auf der unendlich weit entfernt liegenden geraden Linie, (v = 0, u = 0), dreipunctig osculirende Parabel, folgende Gleichung:

$$(m-1)bvw+dv^2+euv+fu^2\ =\ 0.$$

Der vierte Theil des Parameters dieser Parabel ist gleich:

$$\frac{1}{m-1}.\frac{f}{b}.$$

Um diesen Ausdruck zu construiren, wollen wir die Abstände derjenigen (m—1) Tangenten, die der zweiten Axe parallel sind, von dieser Axe, durch $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_{m-1}$; die Abstände der (m—2), der ersten Axe parallelen Tangente (die in die unendlich weit liegende gerade Linie zusammenfallenden beiden Tangenten nicht mitgerechnet) von dieser Axe, durch $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_{m-2}$; und endlich diejenigen Winkel, welche die m durch den Anfangspunct gehenden Tangenten mit der ersten Axe bilden, durch $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_m$ bezeichnen. Alsdann ergibt sich, abgesehen vom Zeichen:

$$\frac{l}{b}\ =\ \xi_1.\xi_2\ \ldots\ \xi_{m-1},$$

$$\frac{q}{l}\ =\ \operatorname{tang}\omega_1.\operatorname{tang}\omega_2\ \ldots\ \operatorname{tang}\omega_m,$$

$$\frac{q}{f}\ =\ \eta_1.\eta_2\ \ldots\ \eta_{m-2},$$

und mithin:

$$\frac{1}{m-1}.\frac{f}{b}\ =\ \frac{\xi_1.\xi_2\ \ldots\ \xi_{m-1}}{\eta_1.\eta_2\ \ldots\ \eta_{m-2}}.\operatorname{tang}\omega_1.\operatorname{tang}\omega_2\ \ldots\ \operatorname{tang}\omega_m.$$

608. Wir kommen zu einer, namentlich in Beziehung auf die Annahme des Coordinaten-Systems, allgemeinern Bestimmung der Gleichungen solcher Curven, welche sich berühren und osculiren, wenn wir zu dem Schema der 539. Nummer zurückgehen. Wir wollen uns hier auf den ersten Fall dieses Schema beschränken.

Die allgemeine Gleichung:

$$Aw^2+2Bvw+Cv^2+2Duw+2Euv+Fu^2 = 0, \qquad (1)$$

stellt, wenn alle in derselben vorkommenden Coefficienten, A und B ausgenommen, ein für alle Mal gegeben sind und zwischen jenen beiden Coefficienten folgende Bedingungs-Gleichung Statt findet:

$$B = aA+b, \qquad (2)$$

solche Curven zweiter Classe dar, welche dieselben vier gegebenen (reellen oder imaginären) geraden Linien berühren. Von diesen vier geraden Linien schneiden sich, im Allgemeinen, zwei im Anfangspuncte der Coordinaten, und ihre Richtung bestimmt sich durch die Gleichung:

$$Cv^2+2Euv+Fu^2 = 0. \qquad (3)$$

Die beiden übrigen geraden Linien schneiden sich in einem solchen Puncte der ersten Coordinaten-Axe, dessen Abstand vom Anfangspuncte gleich (2a) ist, und ihre Richtung bestimmt sich durch folgende Gleichung (538):

$$(C-4ab)v^2+2(E-2Da)uv+Fu^2 = 0. \qquad (4)$$

Die Coordinaten des Mittelpunctes der durch (1) dargestellten Curve sind:

$$x = \frac{B}{A}, \qquad y = \frac{D}{A}.$$

Den auf diese Weise bestimmten vierten Theil des Parameters einer den parabolischen Zweig der gegebenen Curve in unendlicher Entfernung dreipunctig osculirenden Parabel, können wir als das Maass der Krümmung des parabolischen Zweiges in unendlicher Entfernung betrachten.

Wenn wir statt der dreipunctig osculirenden Parabel eine vierpunctig osculirende betrachten, so erhalten wir für diese denselben Parameter als wir für jene erhalten haben: denn die beiden Parabeln haben nothwendig auch unter sich in unendlicher Entfernung einen dreipunctigen Contact. Die vierpunctig osculirende Parabel unterscheidet sich von den andern nur dadurch, dass sie eine bestimmte gerade Linie zu ihrer Axe hat, und wir erhalten eine solche Parabel, wenn wir eine dreipunctig osculirende beliebig so verrücken, dass ihre Axe, während sie parallel mit sich selbst bleibt, mit jener bestimmten geraden Linie, die wir die Axe des paraboliachen Zweiges nennen können, zusammenfällt. Es gibt unendlich viele in unendlicher Entfernung vierpunctig osculirende Parabeln, unter denselben befindet sich eine einzige, welche den parabolischen Zweig in unendlicher Entfernung fünfpunctig osculirt; und die sich durch die Lage ihres Brennpunctes auf der gemeinschaftlichen Axe bestimmen lässt. Durch diese Parabel können wir den Lauf des parabolischen Zweiges der gegebenen Curve auch noch in geringerer Entfernung annäherungsweise darstellen.

Wir erhalten die eben bezeichneten verschiedenartig osculirenden Parabeln nach demselben Verfahren als in der Note zur 605. Nummer. Um ein einzelnes Beispiel zu geben, wollen wir folgende Gleichung:

$$cuw^2+(dv^2+euv+fu^2)w+gv^3+hv^2u+iu^2v+ku^3 = 0,$$

zu Grunde legen, welche die allgemeine Gleichung aller Curven dritter Classe ist, die einen parabolischen Zweig haben, wenn wir die zweite Coordinaten-Axe (ich nehme hier die zweite, wo ich bisher die erste Coordinaten-Axe genommen habe) parallel mit der Axe des parabolischen Zweiges annehmen. Alsdann brauchen wir, um die Gleichung derjenigen Parabel zu erhalten, welche die gegebene in unendlicher Entfernung fünfpunctig osculirt, wie man leicht sieht, in der Gleichung (16), in der Note zur 605. Nummer, bloss w mit u, und dann c mit f und d mit b gegenseitig zu vertauschen. Auf diese Weise kommt:

$$(fd^3-bcd^2+cegd-c^2g^2)u^2+2d^2(de+cg)uv+3d^3v^2+2cd^3uw = 0. —$$

Digitized by Google

Wenn wir zwischen diesen beiden Gleichungen und der Bedingungs-Gleichung (2) die Coefficienten A und B eliminiren, so kommt:

$$D(x-a) = by. \qquad (5)$$

Die Mittelpuncte aller durch die allgemeine Gleichung (1) darstellbaren Curven liegen also auf der durch die vorstehende Gleichung (5) dargestellten geraden Linie. Diese gerade Linie ist im Allgemeinen der zweiten Axe parallel, wenn $b = o$. Sie geht durch die Mitte der zur ersten Axe genommenen Diagonale derjenigen vierseitigen Figur, deren vier Seiten von allen in Rede stehenden Curven berührt werden. Da wir auf gleiche Weise jede der drei Diagonalen dieser vierseitigen Figur zur ersten Coordinaten-Axe nehmen können, so sieht man sogleich, dass die gerade Linie (5) durch die Mitten aller drei Diagonalen geht, und hiernach sich leicht construiren lässt.

Wenn wir besondere Voraussetzungen über die vier gegebenen Coefficienten C, D, E und F machen, so unterwerfen wir dadurch die vier, ebenfalls als gegeben zu betrachtenden, geraden Linien, von welchen alle in Rede stehenden Curven berührt werden, gewissen gegenseitigen Beziehungen. Hierüber wollen wir beispielsweise in ein ausführlicheres Detail eingehen.

1) Wenn wir

$$C = o$$

setzen, so zeigt die Gleichung (3), dass alsdann eine der gegebenen geraden Linien mit der zweiten Axe zusammenfällt.

Wenn zugleich:

$$C = o, \qquad b = o,$$

so zeigt die Gleichung (4), dass alsdann eine zweite der gegebenen geraden Linien mit der zweiten Axe parallel ist. Alle Curven sind also einem Parallel-Trapez eingeschrieben, von dessen parallelen Seiten eine in die zweite Axe, und dessen eine Diagonale in die erste Axe fällt.

2) Wenn wir

$$D = o$$

nehmen, so enthält, was die Gleichung (5) zeigt, die erste Axe die Mittelpuncte aller Curven. Zwei Diagonalen der von den vier gegebenen geraden Linien gebildeten vierseitigen Figur werden alsdann nothwendig von der dritten Diagonale halbirt. Diese dritte Diagonale ist die erste Coordinaten-Axe.

Wenn zugleich

$$D = o, \qquad b = o,$$

so erscheint der Ausdruck für die Ordinate des Durchschnittspunctes der geraden Linie (5) mit der zweiten Axe, nemlich der Ausdruck

$$\left(-\frac{Da}{b}\right),$$

unter der unbestimmten, nicht reducirbaren, Form $\frac{o}{o}$. Der Grund hiervon ergibt sich sogleich, wenn wir zu den Ausdrücken für y und x, aus welchen wir die Gleichung (5) hergeleitet haben, zurückgehen, wonach wir sogleich $y = o$, und $x = a$ erhalten. Alle Curven haben also denselben Mittelpunct, und dieser liegt auf der ersten Coordinaten-Axe. Die Richtung der zweiten Axe kann jede beliebige sein. Die geometrische Bedeutung der beiden letzten Bedingungs-Gleichungen ergibt sich sogleich aus der Bemerkung, dass alsdann die beiden Gleichungen (3) und (4) identisch

Digitized by Google

werden. Alle Curven sind alsdann demselben Parallogramm eingeschrieben, ein Winkelpunct desselben ist Anfangspunct der Coordinaten und die durch denselben gehende Diagonale erste Coordinaten-Axe.

3) Wenn wir

$$E = o$$

setzen, so bilden, was die Gleichung (3) zeigt, die beiden gegebenen durch den Anfangspunct gehenden geraden Linien und die beiden Coordinaten-Axen ein System von vier Harmonicalen. Wenn wir zugleich noch eine Bestimmung über b hinzufügen, so kann die allen Curven (1) umschriebene vierseitige Figur nicht mehr jede beliebige sein.

4) Wenn wir zugleich

$$C = o, \qquad D = o$$

setzen, so bleibt Alles wie in dem unter 2) betrachteten Falle, nur dass die zweite Axe, deren Richtung beliebig war, nun mit einer der beiden durch den Anfangspunct gehenden geraden Linien zusammenfällt.

5) Wenn zugleich

$$D = o, \qquad E = o,$$

so berühren alle Curven die vier Seiten einer vollständigen vierseitigen Figur, deren zwei Diagonalen parallel sind und also von der dritten Diagonale halbirt werden. Die erste Axe fällt, wie im 2. Falle, mit der letztgenannten Diagonale zusammen. Die zweite Axe ist parallel mit jenen beiden parallelen Diagonalen. Wenn überdiess auch noch

$$b = o,$$

so berühren alle Curven die Seiten eines Parallelogrammes, dessen ein Winkelpunct Anfangspunct des Coordinaten ist. Die durch diesen Punct gehende Diagonale ist die erste Coordinaten-Axe, parallel mit der andern Diagonale ist die zweite Axe.

6) Wenn zugleich

$$C = o, \qquad E = o,$$

so zeigt die Gleichung (3), dass alsdann zwei der gegebenen geraden Linien in der zweiten Axe zusammenfallen. Alle Curven berühren die drei Seiten eines gegebenen Dreiecks und zwar die eine dieser Seiten, welche zur zweiten Axe genommen wird, in demselben Punete, dem Anfangspuncte der Coordinaten. Die erste Axe geht zugleich durch den dieser Seite gegenüberliegenden Winkelpunct.

Wenn überdiess

$$b = o,$$

so sehen wir aus der Gleichung (4), dass alsdann eine der beiden gegebenen, durch den Punct (o, 2a) gehenden, geraden Linien mit der zweiten Axe parallel ist, und also alle Curven drei gegebene gerade Linien, von welchen zwei parallel sind, und zwar eine dieser letztern in demselben Puncte, berühren.

7) Wenn ferner folgende drei Bedingungs-Gleichungen:

$$C = o, \qquad D = o, \qquad E = o$$

zugleich befriedigt werden, so bleibt Alles wie in dem vorigen Falle, nur dass überdiess die beiden durch den Punct (o, 2a) gehenden geraden Linien und die beiden Coordinaten-Axen die Richtungen von vier Harmonicalen haben. Alle Curven sind demselben Dreieck eingeschrieben und berühren die eine Seite desselben in einem festen Puncte, in ihrer Mitte.

Digitized by Google

Wenn überdiess auch noch

$$b = 0,$$

so reduciren sich die Gleichungen (3) und (4) beide auf:

$$n^2 = 0.$$

Alle Curven berühren also zwei gegebene Parallellinien in denselben beiden Puncten. Die eine dieser beiden Parallellinien ist zur zweiten Axe genommen, die erste Axe geht durch die beiden Berührungspuncte.

8) Wenn wir

$$F = 0$$

setzen, so zeigen die beiden Gleichungen (3) und (4), dass alsdann zwei der vier gegebenen geraden Linien in der ersten Axe zusammenfallen, und also alle Curven demselben Dreiecke eingeschrieben sind, und die eine Seite dieses Dreiecks, die zur ersten Axe genommen worden ist, in demselben Puncte berühren. Um diesen Punct zu bestimmen, brauchen wir nur den Pol der ersten Axe zu suchen. Für die Gleichung dieses Poles ergibt sich sogleich, nach der 549. Nummer, wenn wir die Gleichung (1) in Beziehung auf n differentiiren:

$$Dw+Ev = 0,$$

und der Abstand desselben von dem zum Anfangspuncte genommenen Winkelpuncte des Dreiecks ist also gleich

$$\left(\frac{E}{D}\right). \qquad (6)$$

9) Wenn zugleich

$$C = 0, \qquad F = 0,$$

so bleibt Alles wie im vorigen Falle, nur dass eine Seite des Dreiecks mit der zweiten Axe zusammenfällt.

Die Gleichung (5) ist noch immer die Gleichung einer geraden Linie, des geometrischen Ortes, für die Mittelpuncte aller in Rede stehenden Curven. Nach einer einfachen Gränz-Betrachtung in der Construction ist aus dem Frühern klar, dass diese gerade Linie durch die Mitte derjenigen Seite des allen Curven umschriebenen Dreiecks, welche in demselben Puncte berührt wird, und die Mitte der diesen Berührungspunct mit dem gegenüberliegenden Winkelpuncte des Dreiecks verbindenden geraden Linie, geht. Wir finden diess auch unmittelbar bestätigt, denn die Gleichung (5) wird befriedigt, einmal, wenn wir zugleich

$$x = a, \qquad y = 0$$

setzen, das andere Mal, wenn wir zugleich

$$x = \frac{E}{2D}, \qquad y = \frac{E-2Da}{2b}$$

setzen.

Wenn wir über b eine bestimmte Voraussetzung machen, so kann, weil die Coordinaten-Axen beide vollkommen bestimmt sind, das allen Curven umschriebene Dreieck nicht mehr jedes beliebige sein. Wenn wir insbesondere

$$b = 0$$

setzen, so folgt aus (4), dass alsdann alle Curven nicht eigentlich mehr demselben Dreiecke eingeschrieben sind, sondern dass dieselben die beiden Coordinaten-Axen, und zwar die erste in demselben Punete, und überdiess eine der zweiten Axe parallele gerade Linie berühren.

Digitized by Google

10) Wenn zugleich

$$D = 0, \qquad F = 0,$$

so haben alle Curven die erste Axe zu einer ihrer Asymptoten (461) und berühren überdiess irgend zwei gerade Linien, von welchen eine durch den Anfangspunct geht. Es folgt diess auch aus dem Ausdrucke (6), der, wenn wir $D = 0$ setzen, unendlich wird.

Wenn ausserdem noch

$$b = 0,$$

so reduciren sich die Gleichungen (3) und (4) beide zugleich auf:

$$Cv^2 + 2Euv = 0,$$

und alle in Rede stehenden Curven, mit einer gemeinschaftlichen Asymptote, berühren also zwei gegebene parallele gerade Linien.

11) Wenn

$$C = 0, \qquad D = 0, \qquad F = 0,$$

so bleibt Alles gerade wie in dem vorigen Falle, nur dass eine gemeinschaftliche Tangente aller Curven mit der zweiten Axe zusammenfällt.

12) Wenn wir

$$E = 0, \qquad F = 0, \qquad (7)$$

setzen, so zeigen die beiden Gleichungen (3) und (4), dass alsdann drei gemeinschaftliche Tangenten in der ersten Axe zusammenfallen, dass mithin alle Curven auf dieser Axe sich dreipunctig osculiren und zwar, was unter Anderm auch der Ausdruck (6) zeigt, im Anfangspuncte der Coordinaten. Ausserdem berühren alle Curven eine gegebene gerade Linie, welche von der ersten Axe ein Segment (2a) abschneidet und deren Richtung durch die Gleichung

$$\frac{v}{u} = \frac{2Da}{C - 4ab}$$

gegeben ist. Die zweite Coordinaten-Axe ist dieser gegebenen geraden Linie parallel, wenn

$$C = 4ab,$$

sie ist derjenigen geraden Linie, welche die Mittelpuncte aller Curven enthält, parallel, wenn

$$b = 0.$$

Wenn neben den beiden vorstehenden Bedingungen (7) auch noch folgende erfüllt wird:

$$a = 0,$$

wonach sich die Gleichung (2) auf

$$B = b$$

reducirt, und also A jeden beliebigen Werth haben kann, B aber gegeben ist, so führen die Gleichungen (3) und (4) beide auf

$$v^2 = 0.$$

Es fallen also alle vier gemeinschaftlichen Tangenten in die erste Axe, alle Curven haben auf dieser Axe im Anfangspuncte einen vierpunctigen Contact (581). Wenn

$$B = b = 0,$$

so ist die zweite Coordinaten-Axe derjenigen geraden Linie, welche die Mittelpuncte aller Curven enthält, parallel.

13) Wenn wir

$$F = 0, \qquad E = 2Da$$

setzen, so zeigen die beiden Gleichungen (3) und (4), dass alsdann alle Curven sich

Digitized by Google

dreipunctig auf der ersten Axe in einer Entfernung vom Anfangspuncte, die gleich (2a) ist, osculiren, und eine solche gerade Linie berühren, die durch den Anfangspunct geht, und deren Richtung durch die Gleichung

$$Cv+2Eu = u$$

gegeben ist. Wenn also zugleich

$$C = o,$$

so wird die zweite Coordinaten-Axe berührt.

Es können auch die vier gemeinschaftlichen Tangenten der durch die allgemeine Gleichung dargestellten Curven, alle oder zum Theil, imaginär werden. Hierhin gehören insbesondere die folgenden Fälle.

14) Wenn wir, indem ϑ den Coordinaten-Winkel bezeichnet,

$$F = C, \qquad E = C\cos\vartheta \qquad (8)$$

setzen, so ist der Anfangspunct der Coordinaten gemeinschaftlicher Brennpunct aller Curven. Es berühren dieselben überdiess zwei auf der ersten Coordinaten-Axe sich schneidende Tangenten. Wenn

$$F = C-4ab, \qquad E-2Da = F\cos\vartheta, \qquad (9)$$

so berühren alle Curven zwei durch den Anfangspunct gehende gerade Linien und haben einen gemeinschaftlichen Brennpunct, welcher auf der ersten Coordinaten-Axe liegt. Wenn wir $\cos\vartheta = o$ setzen, so ist das Coordinaten-System ein rechtwinkliges; wenn wir $b = o$ setzen, so ist die zweite Axe derjenigen geraden Linie parallel, welche der geometrische Ort für die Mittelpuncte aller Curven ist. In dem zuletzt betrachteten Falle, kommt, indem wir $b = o$ setzen:

$$C = F,$$

wonach wir die Richtung der letztgenannten geraden Linie leicht bestimmen können.

Wenn die Gleichungen (8) und (9) alle zugleich befriedigt werden, oder wenn zugleich:

$$F = C, \qquad E = C\cos\vartheta, \qquad D = u, \qquad b = u,$$

so erhalten wir solche Curven, welche zwei gegebene Puncte, die auf der ersten Axe liegen und von denen der eine mit dem Anfangspuncte zusammenfällt, zu ihren Brennpuncten haben.

§. 8.

Verbindung der Gleichungen irgend zweier Oerter zweiter Classe zu der Gleichung eines Systems von zwei Puncten.

609. Wenn wir zwischen den beiden Gleichungen:

$$\begin{aligned} Aw^2+2Bvw+Cv^2+2Dw+2Ev+F^2 &= o, \\ A'w^2+2B'vw+C'v^2+2D'w+2E'v+F' &= u, \end{aligned} \qquad (1)$$

welche irgend zwei Oerter zweiter Classe darstellen, nach einander v und w eliminiren, so kommen wir zu zwei Gleichungen des vierten Grades in Beziehung auf die übrigbleibenden veränderlichen Grössen. Die Wurzeln dieser beiden Gleichungen gehören paarweise zusammen und bestimmen vier gerade Linien: die gemeinschaftlichen Tangenten der beiden Oerter zweiter Classe. Es können 1. diese gemeinschaftlichen Tangenten alle vier reell, 2. zwei derselben reell und die beiden übrigen imaginär, 3. alle vier imaginär

Digitized by Google

sein. Wir können den Coordinaten-Werthen dieser vier gemeinschaftlichen Tangenten allgemein folgende Form geben:

$$\text{I.}\ \begin{cases} w' = m+n, \\ v' = p+q; \end{cases} \qquad \text{II.}\ \begin{cases} w'' = m-n, \\ v'' = p-q; \end{cases}$$

$$\text{III.}\ \begin{cases} w''' = m'+n', \\ v''' = p'+q'; \end{cases} \qquad \text{IV.}\ \begin{cases} w'''' = m'-n', \\ v'''' = p'-q'. \end{cases}$$

In dem ersten der oben bezeichneten drei Fälle müssen wir unter n, q, n' und q' reelle Grössen verstehen, in dem zweiten Falle (etwa) unter n und q reelle, unter n' und q' imaginäre Grössen von der Form $b\sqrt{-1}$, und im dritten Falle endlich unter n, q, n' und q' vier imaginäre Grössen von der eben bezeichneten Form. m, p, m' und p' sind immer als reell zu betrachten.

Für den Durchschnittspunct der beiden ersten gemeinschaftlichen Tangenten (w', v') und (w'', v'') hat man folgende Gleichung:

$$w-w' = \frac{w''-w'}{v''-v'}(v-v'),$$

und hieraus ergibt sich, wenn wir substituiren:

$$qw-nv+(np-mq) = 0. \qquad (2)$$

Aus dieser Gleichung erhalten wir, indem wir accentuiren:

$$q'w-n'v+(n'p'-m'q') = 0, \qquad (3)$$

für die Gleichung des Durchschnittspunctes der beiden übrigen Tangenten (w''', v''') und (w'''', v'''').

Die beiden Gleichungen (2) und (3) bleiben, wie man sogleich sieht, in allen drei, eben bezeichneten, Fällen reell: die vier (reellen oder imaginären) gemeinschaftlichen Tangenten schneiden sich also immer in wenigstens zwei reellen Puncten.

Die Coordinaten der durch die beiden Puncte (2) und (3) gehenden geraden Linie sind:

$$w = \frac{(n'p'-m'q')n-(np-mq)n'}{nq'-n'q},$$
$$v = \frac{(n'p'-m'q')q-(np-mq)q'}{nq'-n'q}. \qquad (4)$$

Wenn wir auf demselben Wege, als vorhin, die Gleichung des Durchschnittspunctes der beiden Tangenten (w', v') und (w''', v''') suchen, so finden wir:

$$[p'-p+q'-q]w-[m'-m+n'-n]v+[(m'+n')(p+q)-(m+n)(p'+q')] = 0, \qquad (5)$$

und hieraus ergibt sich, indem wir bloss das Zeichen von n, q, n' und q' ändern, für den Durchschnittspunct der beiden Tangenten (w'', v'') und (w'''', v'''') folgende Gleichung:

$$[p'-p-(q'-q)]w-[m'-m-(n'-n)]v+[(m'-n')(p-q)-(m-n)(p'-q')] = 0. \qquad (6)$$

Die beiden Puncte (5) und (6) sind nur in dem Falle, dass die beiden Curven (1) vier reelle gemeinschaftliche Tangenten haben, reell. Durch Zusammenstellung der beiden letzten Gleichungen erhalten wir für die, durch diese beiden Puncte gehende, gerade Linie (w', v') folgende Coordinaten-Werthe:

$$w' = \frac{(m'^2-n'^2)q+(m^2-n^2)q'-(mm'-nn')(q'+q)-(m'n-mn')(p'-p)}{(n'-n)(p'-p)-(n'-n)(q'-q)},$$
$$v' = -\frac{(p'^2-q'^2)n+(p^2-q^2)n'-(pp'-qq')(n'+n)-(p'q-pq')(m'-m)}{(n'-n)(p'-p)-(m'-m)(q'-q)}. \qquad (7)$$

Digitized by Google

Um die Gleichungen der beiden Durchschnittspuncte der gemeinschaftlichen Tangenten (w', v') und (w'', v''), (w''', v''') und (w'''', v''''), und dann ferner die Coordinaten-Werthe derjenigen geraden Linie (w•, v•), welche durch diese beiden Durchschnittspuncte geht, zu erhalten, brauchen wir offenbar nur die Vorzeichen von n' und q' in den Gleichungen (5), (6) und (7) zu ändern. Auf diese Weise ergibt sich:

$$[p'-p-(q'+q)]w-[m'-m-(n'+n)]v+[(m'-n')(p+q)-(m-n)(p'-q')] = 0, \quad (8)$$

$$[p'-p+(q'+q)]w-[m'-m+(n'+n)]v+[(m'+n')(p-q)-(m-n)(p'+q')] = 0; \quad (9)$$

und:

$$w^{\bullet} = -\frac{(m'^2-n'^2)q-(m^2-n^2)q'-(mm'+nn')(q-q')-(m'n+mn')(p'-p)}{(n'+n)(p'-p)-(m'-m)(q'+q)},$$

$$v^{\bullet} = \frac{(p'^2-q'^2)n-(p^2-q^2)n'-(pp'+qq')(n-n')-(p'q-pq')(m'-m)}{(n'+n)(p'-p)-(m'-m)(q'+q)}. \quad (10)$$

Die Werthe von w• und v•, w•• und v•• ((7) und (10)) sind reell, nicht nur in dem Falle, dass alle vier gemeinschaftliche Tangenten der beiden Curven (1) reell sind, sondern auch, wie man leicht sieht, in dem Falle, dass dieselben alle vier imaginär sind. In dem erstern Falle bilden die sechs Puncte (2) und (3), (5) und (6), (8) und (9) die sechs Winkelpuncte einer vollständigen vierseitigen Figur, und bestimmen, paarweise genommen, die drei Diagonalen derselben. In dem letztern Falle bleiben diese drei Diagonalen reell, während die beiden Puncten-Paare (5) und (6), (8) und (9) imaginär werden.

Wenn die beiden gegebenen Oerter zweiter Classe (1) zwei reelle und zwei imaginäre gemeinschaftliche Tangenten haben, so sind nicht nur vier Winkelpuncte der ihnen beiden umschriebenen vierseitigen Figur, sondern auch zwei Diagonalen derselben imaginär. Diess erhellet sogleich aus dem Anblick der Gleichungen (7) und (10). Aber der Durchschnitt dieser beiden imaginären Diagonalen ist ein reeller Punct. Um uns hiervon auf directem Wege zu überzeugen, brauchen wir nur die Gleichung dieses Durchschnittspunctes:

$$w-w^{\bullet} = \frac{w^{\bullet\bullet}-w^{\bullet}}{v^{\bullet\bullet}-v^{\bullet}}(v-v^{\bullet}),$$

zu entwickeln, indem wir für w••, w•, v•• und v• die oben gefundenen Werthe substituiren. Aber zu demselben Resultate führt unmittelbar die allgemeine Theorie der Gleichungen. Denn, in derjenigen Gleichung des dritten Grades in Beziehung auf y und x, welche das System der drei Diagonalen der den beiden gegebenen Curven zweiter Classe umschriebenen vierseitigen Figur darstellt, sind nothwendig alle Coefficienten symmetrische Functionen, sowol von w', w'', w''' und w'''', als von v', v'', v''' und v''''. Es folgt diess unmittelbar aus der Art, wie diese Gleichung gebildet wird. Und somit sind alle Coefficienten reell und rational. Eine der drei durch diese Gleichung des dritten Grades dargestellten Diagonalen ist immer reell. Indem wir denjenigen Factor, der auf diese reelle Tangente sich bezieht, fortlassen, reducirt sich die in Rede stehende Gleichung auf den zweiten Grad, und stellt, da ihre Coefficienten nothwendig reell bleiben, entweder zwei reelle oder zwei solche imaginäre gerade Linien dar, die sich in einem reellen Puncte schneiden. (234)

Jede der beiden Diagonalen, welche ein imaginäres Puncten-Paar (5) und (6) oder (8) und (9) verbindet, lässt sich durch eine Gleichung des zweiten Grades darstellen. Um die Gleichungen dieser beiden Diagonalen zu erhalten, brauchen wir nur die ersten Theile der Gleichungen (5) und (6), (8) und (9) mit einander zu multipliciren und dann

das Product gleich Null zu setzen. Auf diese Weise kommt:

$$\begin{gathered}
[(p'-p)^2 \mp (q' \mp q)^2]w^2 \\
-2[(m'-m)(p'-p)-(n' \mp n)(q' \mp q)]vw \\
+[(m'-m)^2 \mp (n' \mp n)^2]v^2 \\
+2\big((p'-p)[(m'p-mp')\pm(n'q-nq')]\pm(q' \mp q)[(m'q \mp mq')\pm(n'p \mp np')]\big)w \\
-2\big((m'-m)[(m'p-mp')\pm(n'q-nq')]\pm(n' \mp n)[(m'q \mp mq')\pm(n'p \mp np')]\big)v \\
+[(m'^2-n'^2)(p^2-q^2)+(m^2-n^2)(p'^2-q'^2)-(m'm \mp n'n)(pp' \mp qq') \mp (n'm \mp nm')(p'q \mp pq')] = 0. \quad (10)
\end{gathered}$$

Je nachdem wir die obern oder untern Zeichen nehmen, stellt diese Gleichung die gerade Linie (w', v') oder die gerade Linie (w'', v'') dar. Darin, dass alle Coefficienten in dieser Gleichung, in dem Falle, dass die beiden gegebenen Curven keine reellen gemeinschaftlichen Tangenten haben, reell sind, liegt ein neuer Beweis, dass alsdann auch jene beiden geraden Linien reell sind.

Wenn wir die ersten Theile der vier Gleichungen (5), (6), (8) und (9) in einander multiplicíren und das Product gleich Null setzen, so kommen wir zu einer Gleichung des vierten Grades in Beziehung auf w und v, und diese Gleichung wird einen, in allen Fällen reellen, Punct darstellen.

Indem wir zusammenfassen, kommen wir also zu folgendem Satze:

Je nachdem zwei Curven zweiter Classe

1) *vier reelle,*
2) *vier imaginäre oder endlich*
3) *zwei reelle und zwei imaginäre*

gemeinschaftliche Tangenten haben, sind

1) *die Winkelpuncte der, beiden Curven umschriebenen, vollständigen vierseitigen Figur alle sechs reell, die drei Diagonalen dieser Figur, und die drei Durchschnittspuncte je zweier derselben reell;*
2) *zwei Winkelpuncte reell und vier imaginär, die drei Diagonalen und mithin auch die drei Durchschnittspunete je zweier derselben reell;*
3) *zwei Winkelpunete reell, die vier übrigen imaginär, eine Diagonale reell, die beiden übrigen imaginär; der Durchschnittspunct dieser beiden imaginären Diagonalen reell, die beiden übrigen Durchschnittspunete imaginär.*

6to. Nach der vorigen Nummer giht es also in dem Falle, dass die gemeinschaftlichen Tangenten zweier gegebener Curven zweiter Classe, alle oder zum Theil, imaginär werden, immer zwei reelle Puncte, deren Coordinaten auf dieselbe Weise durch die Coefficienten in den Gleichungen der beiden gegebenen Curven ausgedrückt werden, als die Coordinaten der Durchschnittspunete der, paarweise genommenen, gemeinschaftlichen Tangenten der beiden Curven, in dem Falle, dass diese Tangenten reell sind. Jene beiden reellen Puncte stehen also zu den beiden gegebenen Curven gerade in derselben Beziehung als diese Durchschnittspunete reeller gemeinschaftlicher Tangenten zu den bezüglichen Curven; und alle Eigenschaften dieser letztgenannten Puncte, bei denen die Realität der durch dieselben gehenden Tangenten nicht in Betracht kommt, gelten unmittelbar auch für jene beiden reellen Puncte. Wir müssen hier ein allgemeines Wort einführen, um den reellen Durchschnittspunct irgend zweier, reeller oder imaginärer, gemeinschaftlicher Tangenten zu bezeichnen. Da sich mir indess sogleich kein characteristisches Wort darbietet, so übersetze ich den von H. PONCELET gebrauchten Ausdruck „*centre*

d' homologie", indem ich solche Puncte: „homologe Puncte in Beziehung auf die beiden gegebenen Curven zweiter Classe", nenne.

Nur in dem Falle, dass die beiden gegebenen Curven vier reelle gemeinschaftliche Tangenten haben, gibt es sechs, sich paarweise zusammenordnender, homologer Puncte: drei Systeme von zwei reellen homologen Puncten. In den übrigen Fällen gibt es nur ein einziges System solcher Puncte. Es existiren aber, nach dem Vorstehenden, auch in dem Falle, dass alle vier gemeinschaftliche Tangenten imaginär sind, reelle gerade Linien, welche, analytisch, auf dieselbe Weise durch die Coefficienten in den Gleichungen der bezüglichen Curven bestimmt sind, und also auch dieselben Eigenschaften geniessen, als, in dem Falle reeller gemeinschaftlicher Tangenten, diejenigen geraden Linien, welche zwei zusammengehörige reelle homologe Puncte verbinden. Für solche gerade Linien bedürfen wir ein neues, allgemeines, Wort; ich nenne dieselben „homologe gerade Linien, in Beziehung auf die beiden gegebenen Curven zweiter Classe". *)

Wir können auch weiter gehen und die Durchschnittspuncte je zweier der drei homologen geraden Linien zweier Curven zweiter Classe „homologe Puncte zweiter Ordnung" nennen. Es gibt für je zwei Curven zweiter Classe immer einen reellen homologen Punct zweiter Ordnung; das heisst, einen Punct, der alle Eigenschaften solcher Puncte besitzt, in welchen sich, für den Fall reeller gemeinschaftlicher Tangenten, zwei Diagonalen der, den gegebenen Curven beiden zugleich umschriebenen, vierseitigen Figur schneiden. **)

---

*) Nach H. Poncelet „*axes d'homologie*". Vergl. *Prop. proj.* 298.

**) Die den Entwicklungen der 609. Nummer analogen Entwicklungen im dritten Abschnitte des ersten Bandes, können wir noch dahin vervollständigen, dass, in dem Falle, wo zwei Curven zweiter Ordnung (und zweiter Classe) sich in zwei reellen und zwei imaginären Puncten schneiden, und man zwei Paare imaginärer gemeinschaftlicher Chorden erhält, auch die beiden Durchschnittspuncte der zusammengehörigen imaginären Chorden imaginär sind, aber diejenige gerade Linie, welche diese beiden imaginären Durchschnittspuncte enthält, reell ist. —

Man sieht leicht ein, wie die Betrachtungsweisen der beiden letzten Nummern des Textes sich ins Uebergränste ausdehnen lassen, wenn wir, statt Curven zweiter Classe, Curven von beliebigen Classen betrachten. Ich beschränke mich hier darauf, nur den ersten Schritt zu diesem Ziele zu thun. Es seien:

$$\varphi(w, v) = 0, \qquad \psi(w, v) = 0,$$

irgend zwei Gleichungen des m. und n. Grades, in Beziehung auf die beiden veränderlichen Grössen w und v. Wenn wir zwischen diesen beiden Gleichungen nach einander v und w eliminiren, so erhalten wir zwei Gleichungen, die, wie bekannt, in Beziehung auf die jedesmalig übrigbleibende veränderliche Grösse, im Allgemeinen zum mn. Grade ansteigen. Wenn m oder n eine gerade Zahl ist, oder wenn m und n beide gerade Zahlen sind, so können alle gemeinschaftlichen Tangenten der beiden bezüglichen Curven der m. und n. Classe imaginär sein. Wenn m und n beide ungerade Zahlen sind, so haben die beiden Curven nothwendig eine reelle gemeinschaftliche Tangente. Alle übrigen gemeinschaftlichen Tangenten können imaginär sein. Die imaginären gemeinschaftlichen Tangenten ordnen sich indess paarweise so zusammen, dass ein solches Paar Coordinaten-Werthe von folgender Form hat:

$$\begin{cases} w = m+n\sqrt{-1}, \\ v = p+q\sqrt{-1}; \end{cases} \qquad \begin{cases} w' = m-n\sqrt{-1}, \\ v = p-q\sqrt{-1}; \end{cases}$$

und also ist, nach der Schlussweise der 609. Nummer, der Durchschnittspunct der beiden imaginären Tangenten eines solchen Paares ein reeller Punct, der alle Eigenschaften eines Durchschnittspunctes reeller gemeinschaftlicher Tangenten hat. Hiernach ergibt sich,

611. Wenn die beiden Gleichungen:

$$\begin{aligned} Aw^2+2Bvw+Cv^2+2Dnw+2Env+Fn^2 &= 0, \\ A'w^2+2B'vw+C'v^2+2D'uw+2E'uv+F'n^2 &= 0, \end{aligned} \qquad (1)$$

irgend zwei gegebene geometrische Oerter zweiter Classe darstellen, so erhalten wir die allgemeine Gleichung aller Oerter derselben Classe, welche mit den beiden gegebenen dieselben vier (reellen oder imaginären) gemeinschaftlichen Tangenten haben, wenn wir die beiden vorstehenden Gleichungen addiren, nachdem wir eine derselben, etwa die zweite, mit einem unbestimmten Coefficienten μ multiplicirt haben. Auf diese Weise kommt:

$$(A+\mu A')w^2+2(B+\mu B')vw+(C+\mu C')v^2+2(D+\mu D')uw+2(E+\mu E')uv+(F+\mu F')n^2 = 0.$$

Wenn diese Gleichung ein System von zwei reellen oder imaginären Puncten darstellen soll, so erhalten wir folgende Bedingungs-Gleichung (458):

$$\begin{aligned} &[(A+\mu A')(E+\mu E')-(B+\mu B')(D+\mu D')]^2-[(A+\mu A')(C+\mu C')-(B+\mu B')^2] \\ &\qquad [(A+\mu A')(F+\mu F')-(D+\mu D')^2] = 0, \end{aligned} \qquad (2)$$

die, wenn wir entwickeln, in folgende übergeht:

$$\begin{aligned} &[A'E'^2-2B'D'E'-A'C'F'+C'D'^2+B'^2F']\mu^3 \\ &+[AE'^2+2A'EE'-2BD'E'-2B'DE'-2B'D'E+CD'^2+2C'DD'+B'^2F+2BB'F'-A'CF-A'C'F-ACF']\mu^2 \\ &+[A'E^2+2AEE'-2BDE'-2BD'E-2B'DE+CD^2+2CDD'+B^2F'+2BB'F-ACF'-ACF-A'CF]\mu \\ &\qquad +[AE^2-2BDE-ACF+CD^2+BF^2] = 0. \end{aligned} \qquad (3)$$

Wir können also durch algebraische Verbindung der beiden gegebenen Gleichungen (1), im Allgemeinen, bei einer dreifachen Bestimmung des unbestimmten Coefficienten μ, zu der Gleichung eines Systemes zweier reeller oder imaginärer Puncte, d. h. zu

---

indem wir die Benennung der 610. Nummer auch auf den allgemeinen Fall ausdehnen, folgender Satz:

Zwei Curven m. und n. Classe haben, im Allgemeinen, je nachdem mn eine gerade oder ungerade Zahl ist, wenigstens $\frac{mn}{2}$ *oder* $\frac{mn-1}{2}$ *reelle homologe Puncte.*

Ohne in nähere Erörterungen einzugehen, können wir neben den vorstehenden Satz sogleich folgenden stellen:

Zwei Curven m. und n. Ordnung haben, im Allgemeinen, je nachdem mn eine gerade oder ungerade Zahl ist, wenigstens $\frac{mn}{2}$ *oder* $\frac{mn-1}{2}$ *reelle gerade Linien zu gemeinschaftlichen Chorden.*

Es ist klar, dass die vorstehenden Resultate, auf die, wie mir scheint, die neuen Behandlungsweisen der Geometrie sich hauptsächlich stützen, anders nichts sind, als die unmittelbarste geometrische Interpretation desjenigen Satzes, welcher die Grundlage der Theorie der algebraischen Gleichungen bildet, des Satzes nemlich, „dass jede ganze algebraische Function einer veränderlichen Grösse von einem beliebigen Grade sich in reelle Factoren des ersten oder zweiten Grades zerlegen lässt." Ich zweifle, ob man auf rein geometrischem Wege zu jenen allgemeinen Resultaten gelangen kann: wenn man es könnte, so erhielte man einen geometrischen Beweis von dem eben angeführten Satze, über die Zerlegung algebraischer Functionen. Denn jede algebraische Function, etwa F(x), können wir als das Resultat der Elimination von y zwischen den Gleichungen algebraischer Curven ansehen. Wir brauchen zu diesem Ende zum Beispiel nur folgende beide Gleichungen:

$$\begin{aligned} y &= F(x)+f(x), \\ y &= f(x)F-(x), \end{aligned}$$

in denen wir irgend eine beliebige algebraische Function von x durch f(x) bezeichnen, für die Gleichungen der beiden Curven zu nehmen.

der Gleichung eines Systemes zweier homologer Puncte oder einer homologen geraden Linie der beiden Curven (1). Die Gleichung (3) reducirt sich nur dann auf den zweiten Grad, wenn einer von folgenden beiden Ausdrücken:

$$A'E'^2-2B'D'E'+C'D'^2+B'F'^2-A'C'F',$$
$$AE^2-2BDE+CD^2+BF^2-ACF,$$

verschwindet, also nur in dem Falle, dass eine der beiden Gleichungen (1) schon ein System von zwei Puncten oder eine gerade Linie darstellt; sie reducirt sich auf den ersten Grad, wenn die vorstehenden Ausdrücke beide zugleich verschwinden. Wenn die beiden Gleichungen (1) zwei Curven darstellen, so gibt also die Gleichung (3) nothwendig einen reellen Werth für μ, dem ein System zweier homologer Puncte entspricht. Dass diese beiden homologen Puncte reell sind, folgt aus der 609. Nummer. Es folgt diess (459) auch daraus, dass nothwendig eine reelle Wurzel der Gleichung (3) dem folgenden Ausdrucke:

$$(A+\mu A')(C+\mu C')-(B+\mu B')^2,$$

einen negativen Werth gibt. Statt aber in die hierdurch angezeigten Entwicklungen einzugehen, wollen wir dasselbe Resultat noch auf einem andern Wege herleiten.

612. Wenn wir, ohne die Richtung der beiden Axen zu ändern, den Anfangspunct der Coordinaten in irgend einen Punct (y, x) verlegen, so erhalten wir statt (1) zwei Gleichungen von derselben Form, für welche wir folgende beide nehmen wollen:

$$a\,w^2+2b\,vw+c\,v^2+2d\,uw+2e\,uv+f\,u^2 = 0,$$
$$a'w^2+2b'vw+c'v^2+2d'uw+2e'uv+f'u^2 = 0.$$

Alsdann hat man nach der 455. Nummer, indem man $A = a$ und $A' = a'$ setzt:

$$c = C-2Bx+Ax^2, \qquad c' = C'-2B'x+A'x^2,$$
$$e = E-Dx-By+Axy, \qquad e' = E'-D'x-B'y+A'xy,$$
$$f = F-2Dy+Ay^2; \qquad f' = F'-2D'y+A'y^2.$$

Wenn wir die Coordinaten des neuen Anfangspunctes (y, x) so bestimmen, dass

$$\frac{f}{c} = \frac{f'}{c'}, \qquad \frac{e}{c} = \frac{e'}{c'}, \qquad (4)$$

so ist dieser Punct offenbar der Durchschnittspunct zweier (reeller oder imaginärer) gemeinschaftlicher Tangenten der beiden gegebenen Curven; denn die Richtungen der beiden von diesem Puncte an jede der beiden Curven gelegten Tangenten sind alsdann durch folgende Gleichung gegeben:

$$cv^2+2euv+fu^2 = 0.$$

Wir wollen annehmen, dass die zweite ursprüngliche Coordinaten-Axe durch die Mittelpuncte der beiden gegebenen Curven gehe. Alsdann ist $B = B' = 0$ und zur Bestimmung von y und x erhalten wir aus (4) folgende beide Gleichungen:

$$\frac{F-2Dy+Ay^2}{C+Ax^2} = \frac{F'-2D'y+A'y^2}{C'+A'x^2},$$
$$\frac{E-Dx+Axy}{C+Ax^2} = \frac{E'-D'x+A'xy}{C'+A'x^2}.$$

Wenn wir entwickeln, so kommt:

$$(CF-CF')-2(CD-CD')y+(CA-CA')y^2+(A'F-AF')x^2-2(AD-AD')x^2y = 0, \quad (5)$$
$$(CE-CE')-(CD-CD')x+(CA-CA')xy+(A'E-AE')x^2-(A'D-AD')x^3 = 0. \quad (6)$$

Die Durchschnittspuncte der durch die vorstehenden beiden Gleichungen, wenn wir x und y als veränderlich betrachten, dargestellten Curven sind also die Durchschnitts-

puncte je zweier gemeinschaftlicher Tangenten der beiden gegebenen Curven zweiter Classe. In der Gleichung (6) kommt y nur in der ersten Potenz vor. Nehmen wir aus dieser Gleichung den Werth von y, nemlich:

$$y = \frac{(A'D-AD')x^3-(A'E-AE')x^2+(C'D-CD')x-(C'E-CE')}{C'A-CA'},$$

und substituiren denselben in (5), so erhalten wir offenbar eine Gleichung von folgender Form:

$$Mx^6+Nx^5+Px^2+Q = o. \qquad (7)$$

Die sechs Wurzeln dieser Gleichung und die sechs entsprechenden Werthe von y, sind die Coordinaten der sechs Durchschnittspuncte je zweier der vier gemeinschaftlichen Tangenten. Die Form dieser Gleichung, in der keine mit ungeraden Potenzen von x behafteten Glieder vorkommen, wird dadurch bedingt, dass jene sechs Durchschnittspuncte, paarweise genommen, gleich weit von der zweiten Axe abstehen, oder, mit andern Worten, dass diejenige gerade Linie, welche die Mitte der drei Diagonalen der von den vier gemeinschaftlichen Tangenten gebildeten vollständigen vierseitigen Figur enthält, zur zweiten Axe genommen worden ist. Die Gleichung (7) gibt nothwendig einen Werth für x^2, der reell und überdiess positiv ist. Denn $\frac{Q}{M}$, wofür man leicht folgenden Ausdruck erhält:

$$-\left(\frac{C'E-CE'}{A'D-AD'}\right)^2,$$

ist immer negativ. Es sind also zwei Wurzeln der Gleichung (7) reell: die Gleichungen irgend zweier Oerter zweiter Classe lassen sich zu der Gleichung eines Systemes zweier reeller Puncte verbinden, oder, was dasselbe heisst, zwei zusammengehörige homologe Puncte der beiden Oerter sind immer reell.

Die beiden übrigen Werthe von x^2, welche die Gleichung (7) befriedigen, können:

1) beide reell und posisiv,
2) beide imaginär oder endlich
3) beide reell und negativ

sein. Diesen drei Fällen entsprechen die drei in der 609. Nummer schon unterschiedenen Fälle.

613. Aus der vorigen Nummer ergibt sich, dass wir, im Allgemeinen, wenn irgend zwei Oerter zweiter Classe gegeben sind, immer und wenigstens auf eine zwiefache Art, indem wir den Anfangspunct gehörig bestimmen, diese beiden Curven durch folgende Gleichungen darstellen können:

$$v^2+2Bvw+Fu^2+2Duw+2Euv+Aw^2 = o,$$
$$v^2+2B'vw+Fu^2+2D'uw+2Euv+A'w^2 = o.$$

Wir können ferner, indem wir die Richtung der beiden Coordinaten-Axen gehörig bestimmen, $E = o$ setzen, (wenn die beiden durch den neuen Anfangspunct gehenden Tangenten reell sind, so brauchen wir zu diesem Ende die ursprünglichen Coordinaten-Axen bloss so anzunehmen, dass dieselben mit denjenigen geraden Linien, welche die von diesen Tangenten gebildeten Scheitelwinkel halbiren, parallel sind) und alsdann den letzten beiden Gleichungen folgende Form geben:

$$(v-v')^2+F(u-u')^2 = M,$$
$$(v-v'')^2+F(u-u'')^2 = M', \qquad (8)$$

indem wir, der Kürze halber,

$$-B = v', \qquad -B' = v'',$$
$$-\frac{D}{F} = u'; \qquad -\frac{D'}{F} = u'',$$
$$\frac{D^2+FB^2-AF}{F} = M, \qquad \frac{D'^2+FB'^2-A'F}{F} = M',$$

setzen, und überdiess $w = 1$ nehmen. Die geometrische Bedeutung der Constanten in den beiden Gleichungen (8) ergibt sich auf dieselbe Weise als in der 560. und 561. Nummer. (v', u') und (v'', u'') sind die Pularen des Anfangspunctes, rücksichtlich der beiden, durch diese Gleichung dargestellten Curven. F ist, wie man sogleich einsieht, positiv oder negativ, je nachdem der Anfangspunct innerhalb oder ausserhalb der beiden Curven liegt, das heisst, je nachdem die bezüglichen gemeinschaftlichen Tangenten derselben imaginär oder reell sind.

Auf demselben Wege, als in der 567. Nummer, können wir nachweisen, dass die beiden Gleichungen (8) sich verbinden lassen, 1. zu den beiden Gleichungen zweier Systeme von zwei Puncten, wenn die bezüglichen Curven vier reelle gemeinschaftliche Tangenten haben; 2. zu den beiden Gleichungen zweier gerader Linien, wenn alle gemeinschaftliche Tangenten imaginär sind; 3. weder zu der Gleichung eines Puncten-Systems, noch einer geraden Linie, wenn zwei gemeinschaftliche Tangenten reell und zwei imaginär sind. Durch Abziehen der beiden Gleichungen (8) von einander erhalten wir die Gleichung des mit dem Anfangspuncte zusammengehörigen homologen Punctes.

Wir erhalten in den letzten Nummern eine Bestätigung der Resultate der 609. Nummer. Wir könnten hierbei auch an die Stelle der vorliegenden Nummer Entwicklungen setzen, die denen der 286. und 287. Nummer des ersten Bandes analog sind. Wir beschränken uns hier indess auf diese blosse Andeutung.

614. In dieser und den folgenden Nummern wollen wir einige einzelne Fälle besonders hervorheben.

Wenn die beiden gegebenen Curven sich **berühren**, so fallen zwei gemeinschaftliche Tangenten zusammen und die drei Systeme homologer Puncte derselben sind 1. das System des Berührungspunctes und des Durchschnittspunctes der beiden, die Curven in diesem Puncte nicht berührenden, gemeinschaftlichen Tangenten und 2. zwei identische Systeme, von denen jedes aus den beiden Durchschnittspuncten der gemeinschaftlichen Tangente im Berührungspuncte der Curven mit den beiden übrigen gemeinschaftlichen Tangenten besteht. In diesem Falle hat nothwendig die Gleichung (3) zwei **gleiche** Wurzeln. Um diess auf directem Wege zu zeigen, wollen wir den Berührungspunct der beiden Curven zum Anfangspuncte der Coordinaten, die gemeinschaftliche Tangente in demselben zur ersten Axe nehmen und demgemäss von folgenden beiden Gleichungen ausgehen:

$$\begin{aligned} A^2+2Bvw+Cv^2+2Duw &= 0, \\ A'^2+2B'vw+C'v^2+2D'uw &= 0, \end{aligned} \qquad (9)$$

wonach sich die Gleichung (2) oder (3) in folgende verwandelt:

$$(C+\mu C')(D+\mu D')^2 = 0, \qquad (10)$$

und wir sehen sogleich, dass diese Gleichung zwei gleiche Wurzeln hat, von denen jede gleich $\left(-\frac{D}{D'}\right)$ ist, und eine dritte Wurzel, die gleich ist $\left(-\frac{C}{C'}\right)$. Dieser dritten Wurzel entspricht folgende resultirende Gleichung:

Digitized by Google

$$w[(AC'-A'C)w+2(BC'-B'C)v+2(DC'-D'C)u] = 0,$$

und jeder der beiden gleichen Wurzeln folgende:

$$(AD'-A'D)w^2+2(BD'-BD')vw+(CD'-C'D)v^2 = 0.$$

Es hat die Gleichung (11) und also auch die entsprechende Gleichung (3) nur dann drei gleiche Wurzeln, wenn

$$\frac{C}{C'} = \frac{D}{D'},$$

das heisst, wenn die beiden gegebenen Curven sich dreipunctig osculiren (580). Die drei Systeme homologer Puncte sind alsdann, was man sogleich auch *a priori* sieht, identisch und jedes derselben besteht aus dem Osculationspuncte und dem Durchschnittspuncte der Tangente in demselben mit der, einzig noch übrigen, gemeinschaftlichen Tangente.

In dem Falle einer vierpunctigen Osculation fallen die beiden homologen Puncte jedes der drei identischen Systeme in dem Osculationspuncte zusammen.

615. Wir finden die vorstehenden Resultate bestätigt, wenn wir die Coordinaten der homologen Puncte der beiden gegebenen Curven suchen. Wenn wir zu diesem Ende von den beiden Gleichungen (9) der vorigen Nummer ausgehen, so können wir uns, im Allgemeinen, nicht mehr der Gleichungen (5) und (6) bedienen, sondern nur in dem besondern Falle, dass diejenige gerade Linie, welche die Mittelpuncte der beiden gegebenen Curven verbindet, zugleich auch durch den Berührungspunct der Curven geht. In diesem Falle verwandeln sich die beiden zuletzt genannten Gleichungen in folgende:

$$y[2(CD'-CD')-(C'A-CA')y+2(A'D-AD')x^2] = 0,$$
$$x[(CD'-CD')-(C'A-CA')y+(A'D-AD')x^2] = 0.$$

Jede dieser beiden Gleichungen stellt das System einer Coordinaten-Axe und einer solchen Parabel dar, deren Durchmesser der andern Axe parallel sind. Die beiden Coordinaten-Axen, denen die Factoren y und x in den vorstehenden beiden Gleichungen entsprechen, schneiden sich im Berührungspuncte der beiden gegebenen Curven, der zugehörige homologe Punct ist der einzige Punct, in welchem die der ersten Gleichung entsprechende Parabel von der zweiten Axe geschnitten wird. Die beiden Puncte, in welchen die, der zweiten Gleichung entsprechende, Parabel von der ersten Axe geschnitten wird, sind dieselben Puncte, in welchen die beiden Parabeln sich schneiden; denn wenn man die Gleichung der zweiten Parabel mit 2 multiplicirt und dann von der Gleichung der ersten Parabel abzieht, und den constanten Factor (C'A−CA') fortlässt, ergibt sich:

$$y = 0.$$

Aus diesen beiden, auf der gemeinschaftlichen Tangente der beiden gegebenen Curven liegenden, Durchschnittspuncte besteht jedes der beiden noch übrigen, identischen, Systeme homologer Puncte der beiden Curven.

Wenn wir in dem allgemeinern Falle uns der Gleichungen (5) und (6) bedienen wollen, müssen wir, statt von den Gleichungen (9), von folgenden beiden Gleichungen ausgehen:

$$\begin{aligned} Aw^2+2Bvw+Cv^2+2Duw+2Euv &= 0, \\ A'w^2+2B'vw+C'v^2+2D'uw+2E'uv &= 0, \end{aligned} \qquad (11)$$

und, um auszudrücken, dass die bezüglichen Curven die erste Axe in demselben Puncte berühren:

$$\frac{E}{C} = \frac{E'}{C'}, \qquad (12)$$

setzen. Die Gleichung (5) verwandelt sich alsdann wiederum in folgende:

$$y[2(C'D-CD')-(C'A-CA')y+2(A'D-AD')x^2] = 0,$$

und wenn wir aus dieser Gleichung die beiden Werthe von y nehmen, die den Factoren des ersten Theiles derselben entsprechen, und nach einander in (6) substituiren, so erhalten wir, zur Bestimmung der sechs Werthe von x, folgende beiden Gleichungen des dritten Grades:

$$\begin{aligned}(C'E-CE')-(C'D-CD')x+(A'E-AE')x^2-(A'D-AD')x^3 &= 0,\\ (C'E-CE')+(C'D-CD')x+(A'E-AE')x^2+(A'D-AD')x^3 &= 0.\end{aligned} \qquad (13)$$

Man überzeugt sich ohne Mühe, wenn man die Bedingungs-Gleichung (12) berücksichtigt, dass die vorstehenden beiden Gleichungen folgenden Factor des zweiten Grades:

$$(C'E-CE')+(A'E-AE')x^2,$$

gemeinschaftlich und folglich zwei Paare gleiche Wurzeln haben.

Für den Fall einer vierpunctigen Osculation reduciren sich, indem wir (580) $E = 0$, $B = 0$ und $C'D = CD'$ setzen, die Gleichungen (13) beide auf:

$$x^3 = 0.$$

615. Die Entwicklungen der beiden vorigen Nummern erleiden nur einfache Modificationen, wenn die beiden gegebenen Curven, statt sich zu berühren, eine gemeinschaftliche Asymptote und ausserdem also nur noch zwei gemeinschaftliche Tangenten haben. In diesem Falle sind offenbar die drei Systeme homologer Puncte 1) das System des Durchschnittspunctes der beiden gemeinschaftlichen Tangenten und eines nach der Richtung der gemeinschaftlichen Asymptote hin unendlich weit entfernt liegenden Punctes; 2) zwei identische Systeme, von denen jedes aus den beiden Durchschnittspuncten der beiden gemeinschaftlichen Tangenten mit der gemeinschaftlichen Asymptote besteht. Von den drei homologen geraden Linien fallen zwei in die gemeinschaftliche Asymptote zusammen und die dritte ist dieser Asymptote parallel und geht durch den Durchschnittspunct der beiden gemeinschaftlichen Tangenten.

Die Gleichungen der beiden Curven erhalten, indem wir die gemeinschaftliche Asymptote derselben zur zweiten Coordinaten-Axe nehmen, folgende Form:

$$\begin{aligned}A w^2+2D uw+2E vw+F u^2 &= 0,\\ A'w^2+2D'uw+2E'vw+F'u^2 &= 0,\end{aligned}$$

und hiernach reducirt sich die Gleichung (3) auf folgende:

$$(A+\mu A')(E+\mu E')^2 = 0.$$

Die beiden gleichen Wurzeln dieser Gleichung sind $\left(-\frac{E}{E'}\right)$, die dritte Wurzel ist $\left(-\frac{A}{A'}\right)$; jenen entspricht die resultirende Gleichung:

$$(AE'-A'E)w^2+2(DE'-D'E)uw+(FE'-F'E)u^2 = 0,$$

und dieser die Gleichung:

$$u[2(A'D-AD')w+2(A'E-AE')v+(A'F-AF')u] = 0.$$

Für den vorliegenden Fall gehen die Gleichungen (5) und (6) in folgende über:

$$\begin{aligned}x^2[(A'F-AF')-2(A'D-AD')y] &= 0,\\ x^2[(A'E-AE')-2(A'D-AD')x] &= 0,\end{aligned}$$

und versagen ihren Dienst zur vollständigen Bestimmung der Coordinaten der homologen Puncte der beiden gegebenen Hyperbeln. Sie zeigen indess, dass alle diese Puncte, ein einziger ausgenommen, auf der zweiten Coordinaten-Axe liegen. Den Coordinaten

dieses Punctes (des Durchschnittspunctes der beiden gemeinschaftlichen Tangenten) entsprechen die zweiten Factoren in den ersten Theilen der vorstehenden Gleichungen. Die Factoren x^2 dieser beiden Gleichungen, zusammengestellt, beziehen sich offenbar auf die beiden Paare zusammenfallender, auf der zweiten Axe liegender, homologer Puncte. Den noch übrigen, nach der Richtung der zweiten Axe hin, unendlich weit liegenden homologen Punct, erhalten wir, wenn wir einen Factor x aus der ersten Gleichung mit dem zweiten Factor der zweiten Gleichung zusammenstellen.

616. Wenn zwei gegebene Curven zweiter Classe unter einander einen doppelten Contact haben, so sind die drei Systeme homologer Puncte 1) das System der beiden (reellen oder imaginären) Berührungspuncte; 2) zwei identische Systeme zweier reeller in den Durchschnittspunct der beiden (reellen oder imaginären) gemeinschaftlichen Tangenten zusammenfallender Puncte.

Die letztgenannten beiden Systeme bestehen, wenn wir die Bezeichnung der 609. Nummer beibehalten, aus den Puncten (2) und (3), (8) und (9) und diese Puncte sind identisch dieselben, wenn wir $m' = m$, $n' = n$, $p' = p$ und $q' = q$ setzen. Den beiden Berührungspuncten entsprechen die Gleichungen (5) und (6); doch die Coefficienten in diesen Gleichungen können wir nur durch Differential-Ausdrücke darstellen. Setzen wir zu diesem Ende:

$$m' = m+dm, \qquad n' = n+dn, \qquad p' = p+dp, \qquad q' = q+dq,$$

so gehen diese Gleichungen in folgende über:

$$(dp+dq)w-(dm+dn)v+[(dm+dn)(p+q)-(dp+dq)(m+n)] = 0,$$
$$(dp-dq)w-(dm-dn)v+[(dm-dn)(p-q)-dp-dq)(m-n)] = 0.$$

Die drei homologen geraden Linien der beiden gegebenen Curven bestehen 1) aus der Berührungs-Chorde; 2) aus zwei reellen geraden Linien, welche beide durch den Durchschnittspunct der beiden gemeinschaftlichen Tangenten gehen. Die Berührungs-Chorde ist immer reell, auch wenn der doppelte Contact ein imaginärer ist, die Ausdrücke (y) geben für die Coordinaten derselben:

$$w' = \frac{(qdm-mdq-ndp)dm-(qdn-ndq-mdp)dn}{dndp-dmdq},$$
$$v' = \frac{(ndp-pdn-qdm)dp-(ndq-qdn-pdm)dq}{dndp-dmdq}.$$

Was die beiden übrigen homologen geraden Linien betrifft, so könnte es, da jede derselben durch zwei zusammenfallende Puncte geht, scheinen, als ob ihre Richtung jede beliebige sein könnte. Nichts desto weniger aber ist ihre Richtung eine vollkommen bestimmte. Aus den zweiten Gleichungen bei (4) und (10) erhält man nemlich für den vorliegenden Fall, mit Vernachlässigung der verschwindenden Grössen:

$$v = \frac{p(ndq-qdn)+q(qdm-ndp)}{ndq-qdn},$$
$$v'' = \frac{npdp-q(ndq-qdn)}{ndp-qdm}.$$

Da wir bisher über die beiden Coordinaten-Axen durchaus keine Bestimmung gemacht haben, so können wir die Richtung derselben nun so bestimmen, dass

$$v'' = \infty, \qquad v = 0.$$

Die erste dieser Bedingungen gibt:

$$ndp-qdm = o,$$

und hiernach die zweite derselben:

$$p = o.$$

Bei diesen Voraussetzungen erhält man:

$$v' = o.$$

Es ist also die eine homologe gerade Linie (w, v) der Berührungs-Chorde (w', v') parallel. Da man ferner, weil p verschwindet,

$$v'+v'' = o$$

erhält, so bilden die beiden gemeinschaftlichen Tangenten der beiden sich doppelt berührenden Oerter zweiter Classen, und diejenigen beiden homologen geraden Linien, denen wir die Coordinaten-Axen parallel genommen haben, und die durch den Durchschnitt jener gemeinschaftlichen Tangenten gehen, ein System von vier Harmonicalen (I., 36). Da die eine dieser homologen geraden Linien der Berührungs-Chorde parallel ist, so geht die andere durch die Mitte dieser Chorde und also durch den Durchschnitt der gemeinschaftlichen Tangenten und die Mittelpuncte der beiden Oerter.

617. Zwei Hyperbeln mit denselben Asymptoten haben in unendlicher Entfernung einen reellen doppelten Contact; zwei ähnliche, ähnlich liegende und concentrische Ellipsen haben in unendlicher Entfernung einen imaginären doppelten Contact. In beiden Fällen liegen zwei homologe Puncte unendlich weit, und die vier übrigen fallen in dem Mittelpuncte der Curve zusammen. Wir wollen diese Bemerkungen durch einige analytische Entwicklungen unterstützen.

Zwei Ellipsen, die denselben Punct zum Mittelpuncte haben, können wir immer durch folgende beide Gleichungen darstellen:

$$\begin{aligned} A w^2+C v^2+F u^2 &= o, \\ A'w^2+C'v^2+F'u^2 &= o, \end{aligned} \qquad (14)$$

indem wir diejenigen beiden Durchmesser, die für beide Curven zugeordnete sind, zu Coordinaten-Axen nehmen. *) Für den vorliegenden Fall verwandelt sich die Gleichung (2) in folgende:

$$(A+\mu A')(C+\mu C')(F+\mu F') = o. \qquad (15)$$

Die drei Wurzeln dieser Gleichung sind $\left(-\frac{A}{A'}\right)$, $\left(-\frac{C}{C'}\right)$, $\left(-\frac{F}{F'}\right)$ und die Glei-

*) Um die Richtungen derjenigen beiden Durchmesser, die zugleich für beide durch folgende Gleichungen dargestellte Oerter:

$$\begin{aligned} A w^2+C v^2+2E uv+F u^2 &= o, \\ A'w^2+C'v^2+2E'uv+F'u^2 &= o, \end{aligned}$$

zugeordnete sind, zu bestimmen, erhalten wir nach der 486. Nummer folgende beiden Gleichungen:

$$\begin{aligned} C v'v''+E(v'+v'')+F &= o, \\ C'v'v''+E'(v'+v'')+F' &= o. \end{aligned}$$

Hiernach sind v' und v'' Wurzeln folgender quadratischen Gleichung:

$$(C'E-CE')v^2+(C'F-CF')v+(E'F-EF') = o,$$

und diese Wurzeln sind immer reell, wenn eine der beiden gegebenen Curven, etwa die erste, eine Ellipse ist. Denn setzen wir, was erlaubt ist, E = o, so kommt:

$$\frac{E'F-EF'}{C'E-CE'} = -\frac{F}{C},$$

und dieser Ausdruck ist nothwendig negativ, wenn die erste gegebene Curve eine Ellipse ist.

chungen der drei entsprechenden Systemen von zwei Puncten:

$$\begin{aligned}(A'C-AC')v^2+(A'F-AF')u^2 &= 0,\\ (AC'-A'C)w^2+(CF-CF')u^2 &= 0,\\ (AF'-A'F)w^2+(CF'-C'F)v^2 &= 0.\end{aligned} \qquad (16)$$

Jede der beiden letzten Gleichungen drückt ein System von zwei Puncten aus, die auf einer der Coordinaten-Axen liegen. Diese beiden Paare homologer Puncte sind die (reellen oder imaginären) Winkelpuncte eines Parallelogrammes, die beiden entsprechenden homologen geraden Linien die (immer reellen) Diagonalen desselben, mithin diejenigen beiden Durchmesser der beiden gegebenen Ellipsen, die für beide zugeordnete sind. Das durch die erste der vorstehenden Gleichungen dargestellte Paar homologer Puncte liegt nach den Richtungen der Seiten des eben bezeichneten Parallelogrammes unendlich weit.

Um auszudrücken, dass die beiden Gleichungen (14) ähnliche Ellipsen darstellen, erhalten wir die Bedingungs-Gleichung:

$$CF' = C'F,$$

wonach die Gleichung (15) zwei gleiche Wurzeln erhält. Alsdann reduciren sich die beiden letzten der Gleichungen (16) auf

$$w^2 = 0, \qquad (17)$$

und die erste dieser Gleichungen reducirt sich auf

$$Cv^2+Fu^2 = 0. \qquad (18)$$

Die Gleichung (17) zeigt, dass vier homologe Puncte in den gemeinschaftlichen Mittelpunct der beiden gegebenen Ellipsen zusammenfallen, und die Gleichung (18), dass die beiden übrigen unendlich weit liegen und imaginär sind.

Da je zwei zugeordnete Durchmesser einer der beiden zuletzt betrachteten Ellipsen auch zugeordnete Durchmesser der andern sind, so kann man jedes System solcher zugeordneter Durchmesser als das System zweier homologer gerader Linien der beiden Curven betrachten, und jeden beliebigen Durchmesser als einzelne homologe gerade Linien. Die dritte homologe gerade Linie liegt unendlich weit und ihre Richtung ist hiernach eine durchaus unbestimmte.

618. Wir haben bis jetzt denjenigen Fall ganz unberücksichtigt gelassen, dass die gegebenen Oerter zweiter Classe beide Parabeln sind. Indem wir dieselben als Uebergangs-Curven von Ellipsen zu Hyperbeln betrachten, können wir die nachstehenden Resultate unmittelbar aus den vorhergehenden herleiten, wenn wir annehmen, dass zwei Parabeln nur drei gemeinschaftliche Tangenten haben, weil die vierte unendlich weit liegt. Diese Annahme rechtfertigt sich sogleich, wenn wir, indem wir $w = t$ setzen, von folgenden beiden allgemeinen Gleichungen ausgehen:

$$\begin{aligned}A+2Bv+Cv^2+2Du+2Euv+Fu^2 &= 0,\\ A'+2B'v+C'v^2+2D'u+2E'uv+F'u^2 &= 0.\end{aligned}$$

Denn in dem Falle, dass die beiden Coefficienten A und A' zugleich verschwinden und nur in diesem einzigen Falle werden diese beiden Gleichungen befriedigt, wenn wir zugleich

$$v = 0, \qquad u = 0$$

setzen. Eine Tangente liegt also unendlich weit, ihre Richtung ist unbestimmt, denn der Ausdruck für $\frac{v}{u}$ erscheint unter der unbestimmten, nicht reducirbaren, Form $\frac{0}{0}$. Die

Digitized by Google

Coordinaten-Werthe der drei übrigen gemeinschaftlichen Tangenten sind durch Gleichungen des dritten Grades gegeben: eine gemeinschaftliche Tangente irgend zweier gegebener Parabeln ist also nothwendig reell, die beiden übrigen sind entweder beide reell oder beide imaginär.

In dem Falle dreier reeller gemeinschaftlicher Tangenten erhält man drei reelle Systeme zweier homologer Puncte, von denen jedesmal einer der Durchschnittspunct zweier gemeinschaftlicher Tangenten ist und der andere, nach der Richtung der dritten gemeinschaftlichen Tangente hin, unendlich weit liegt. Indem wir von den unendlich weit liegenden Puncten abstrahiren, sind also die Winkelpuncte des von den drei gemeinschaftlichen Tangenten gebildeten Dreiecks die drei homologen Puncte. Die drei homologen geraden Linien der beiden Parabeln sind in dem vorliegenden Falle ebenfalls reell, und jede derselben geht durch einen Winkelpunct des von den gemeinschaftlichen Tangenten gebildeten Dreiecks und ist der diesem Winkelpuncte gegenüberliegenden Seite dieses Dreiecks parallel.

In dem Falle zweier imaginärer Tangenten der beiden gegebenen Parabeln gibt es nur einen einzigen reellen homologen Punct: den Durchschnittspunct dieser beiden imaginären Tangenten; und nur eine einzige reelle homologe gerade Linie: diejenige gerade Linie, welche durch diesen homologen Punct geht, und der einzigen reellen gemeinschaftlichen Tangente parallel ist.

619. Durch Verbindung der Gleichungen zweier gegebener Parabeln:

$$\left.\begin{aligned} 2B\,vw+C\,v^2+2D\,uw+2E\,uv+F\,u^2 &= 0,\\ 2B'vw+C'v^2+2D'uw+2E'uv+F'u^2 &= 0,\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

erhalten wir folgende allgemeine Gleichung des zweiten Grades:

$$2(B+\mu B')vw+(C+\mu C')v^2+2(D+\mu D')uw+2(E+\mu E')uv+(F+\mu F')u^2 = 0. \quad (2)$$

Diese Gleichung stellt, wie wir auch den unbestimmten Coefficienten μ bestimmen mögen, nur Parabeln dar, diejenigen besondern Fälle bloss abgerechnet, wo dieselben ein System von zwei Puncten darstellt, von denen alsdann einer unendlich weit liegt. Um auszudrücken, dass die letzte Gleichung ein solches Puncten-System (System homologer Puncte) darstelle, erhalten wir, nach der 466. Nummer, folgende Bedingungs-Gleichung, die in Beziehung auf μ bis zum dritten Grade steigt:

$$(C+\mu C')(D+\mu D')^2-2(B+\mu B')(D+\mu D')(E+\mu E')+(F+\mu F')(B+\mu B')^2 = 0.$$

Auf dieselbe Gleichung reducirt sich die Gleichung (3) der 611. Nummer, wenn wir in derselben A und A' gleich Null setzen.

Wenn wir für μ eine Wurzel der letzten Gleichung nehmen, so stellt die Gleichung (2), nach der eben angezogenen Nummer, das System solcher zwei Puncte dar, von denen einer folgender ist:

$$\left\{y = \tfrac{1}{2}\cdot\frac{F+\mu F'}{D+\mu D'}, \qquad x = \tfrac{1}{2}\cdot\frac{C+\mu C'}{B+\mu B'}\right\},$$

und der andere nach derjenigen Richtung hin unendlich weit liegt, die durch folgende Gleichung gegeben ist:

$$(B+\mu B')v+(D+\mu D')u = 0.$$

620. Um die Coordinaten der drei homologen Puncte irgend zweier gegebener Parabeln (1) zu bestimmen, können wir auch auf eine ähnliche Weise, wie in der 612. Nummer verfahren. Wenn wir die Bezeichnungsweise dieser Nummer beibehalten, und

Digitized by Google

bloss $A = A' = 0$ setzen, und den Anfangspunct der Coordinaten in einen homologen Punct der beiden Parabeln verlegen, so erhalten wir

$$\frac{e}{c} = \frac{e'}{c'}, \qquad \frac{e}{f} = \frac{e'}{f'},$$

das heisst, wenn wir substituiren und die Coordinaten jenes homologen Punctes y und x nennen:

$$\begin{aligned} \frac{E-Dx-By}{C-2Bx} &= \frac{E'-D'x-B'y}{C'-2B'x}, \\ \frac{E-Dx-By}{F-2Dy} &= \frac{E'-D'x-B'y}{F'-2D'y}. \end{aligned} \qquad (3)$$

Wenn wir entwickeln, so kommt:

$$\begin{aligned} 2(DB'-D'B)x^2-((DC'-D'C)+2(EB'-E'B))x-(BC'-B'C)y+(EC'-E'C) &= 0, \\ 2(BD'-B'D)y^2-((BF'-B'F)+2(ED'-E'D))y-(DF'-D'F)x+(EF'-E'F) &= 0, \end{aligned} \qquad (4)$$

und wenn wir diese beiden Gleichungen von einander abziehen, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} 2(BD'-B'D)[y^2+x^2]-(B(F'-C)-B'(F-C)+2(ED'-E'D))y-(D(F'-C')-D'(F-C)+ \\ 2(EB'-E'B))x+(E(F'-C')-E'(F-C)) = 0. \end{aligned} \qquad (5)$$

Wenn wir zwischen den beiden Gleichungen (4) nach einander x und y eliminiren, so erhalten wir zwei Gleichungen, die in Beziehung auf die übrigbleibende unbekannte Grösse bis zum vierten Grade steigen. Drei Wurzelpaare beziehen sich auf die drei homologen Puncte der beiden gegebenen Parabeln, das vierte Paar enthält fremde Wurzeln. Die geometrische Bedeutung dieser fremden Wurzeln ergibt sich leicht. Die Gleichungen (3) werden nemlich beide befriedigt, wenn wir zugleich:

$$\begin{aligned} e &= E-Dx-By = 0, \\ e' &= E'-D'x-B'y = 0, \end{aligned}$$

setzen. Die durch diese beiden Gleichungen bestimmten, immer reellen, Werthe von y und x beziehen sich offenbar auf keinen der drei homologen Puncte, sondern auf denjenigen Punct, in welchen wir den Anfangspunct der Coordinaten verlegen müssen, wenn aus den Gleichungen beider Parabeln, ohne dass wir die Richtung der Coordinaten-Axen ändern, die mit nv behafteten Glieder ausfallen sollen. Wenn wir rechtwinklige Coordinaten voraussetzen, so bilden (471) die beiden Tangenten, die sich, von diesem Puncte aus, an die eine Parabel legen lassen, mit den beiden durch denselben Punct gehenden Tangenten der andern Parabel gleiche Winkel. Bei dieser Voraussetzung stellt die Gleichung (5), wenn wir y und x als veränderliche Grössen betrachten, einen Kreis dar und dieser Kreis ist der geometrische Ort aller solcher entsprechender Puncte, die wir erhalten, wenn wir das rechtwinklige Coordinaten-System beliebig drehen.

Da es hiernach nothwendig ein Paar reeller zusammengehöriger Werthe von y und x gibt, welche den beiden Gleichungen (4) Genüge leisten, so gibt es ausserdem auch noch ein zweites Paar solcher reeller Werthe und diese sind die Coordinaten eines homologen Punctes der beiden gegebenen Parabeln, der also immer reell bleibt, während die beiden übrigen imaginär werden können.

Der durch die drei Durchschnittspuncte je zweier der drei gemeinschaftlichen Tangenten der beiden gegebenen Parabeln gehende, und durch diese drei Puncte vollkommen bestimmte Kreis geht durch den Brennpunct jeder der beiden Parabeln. Wenn wir, um diess zu zeigen, den Brennpunct einer derselben, etwa der ersten, zum Anfangs-

Digitized by Google

puncte rechtwinkliger Coordinaten nehmen, so erhalten wir (476):

$$E = 0, \qquad C = F;$$

und hiernach fällt aus der Gleichung (5), die den in Rede stehenden Kreis darstellt, das von y und x unabhängige Glied aus, und der bezügliche Kreis geht also durch den Anfangspunct der Coordinaten. Hiernach ergibt sich folgender bekannter Satz (341):

Die Brennpuncte aller derjenigen Parabeln, welche die drei Seiten eines gegebenen Dreiecks berühren, liegen auf dem Umfange eines Kreises, der durch die drei Winkelpuncte des Dreiecks geht. *)

Zugleich erhält man hier folgenden Satz:

Wenn irgend ein Dreieck gegeben ist und man legt von irgend einem Puncte des Umfanges des diesem Dreiecke umschriebenen Kreises Tangenten-Paare an solche Parabeln, welche die drei Seiten des gegebenen Dreiecks berühren, so bilden je zwei solcher Tangenten-Paare mit einander gleiche Winkel.

Wenn wir berücksichtigen, dass mit den Parabeln, welche die drei Seiten des gegebenen Dreiecks berühren, auch drei Systeme homologer Puncte, deren einer unendlich weit liegt, zusammengehören, und den letzten Satz auf zwei jener drei Systeme anwenden, so begegnen wir dem bekannten Satze, „dass Peripherie-Winkel, die auf demselben Bogen stehen, einander gleich sind."

Aus der Zusammenstellung einer Parabel mit einem der drei Systeme homologer Puncte ergibt sich eine Construction beliebig vieler Tangenten einer Parabel, wenn vier Tangenten derselben gegeben sind.

§. 9.

Verbindung der Gleichungen zweier Oerter zweiter Classe zu der Gleichung irgend eines neuen Ortes derselben Classe. Theorie der Transversalen.

621. Wenn irgend zwei gegebene Oerter zweiter Classe durch folgende beiden Gleichungen dargestellt werden:

$$\begin{aligned} A w^2+2B vw+C v^2+2D uw+2E uv+F u^2 &= 0, \\ A'w^2+2B'vw+C'v^2+2D'uw+2E'uv+F'u^2 &= 0, \end{aligned} \qquad (1)$$

so erhalten wir für die allgemeine Gleichung aller derjenigen Oerter derselben Classe, welche mit den beiden gegebenen dieselben vier gemeinschaftliche Tangenten haben, folgende:

$$(A+\mu A')w^2+2(B+\mu B')vw+(C+\mu C')v^2+2(D+\mu D')uw+2(E+\mu E')uv+(F+\mu F')u^2 = 0. \qquad (2)$$

---

*) Zu demselben Resultate kommen wir auch, nach der 536. Nummer, wenn wir zwischen den beiden Gleichungen der 480. Nummer.

$$y' = \frac{2BE-D(C-F)}{2(B^2+D^2)},$$

$$x' = \frac{2DE+B(C-F)}{2(B^2+D^2)},$$

B oder D eliminiren.

Wenn also:

$$A''w^2+2B''vwC+''v^2+2D''uw+2E''uv+F''u^2 = 0, \qquad (3)$$

die Gleichung irgend eines solchen Ortes ist, so ergeben sich, bei gehöriger Bestimmung des unbestimmten Coefficienten μ, folgende Gleichungen:

$$\frac{B+\mu B'}{A+A\mu'} = \frac{B''}{A''},$$
$$\frac{C+\mu C'}{A+\mu A'} = \frac{C''}{A''},$$
$$\frac{D+\mu D'}{A+\mu A'} = \frac{D''}{A''},$$
$$\frac{E+\mu E'}{A+\mu A'} = \frac{E''}{A''},$$
$$\frac{F+\mu F'}{A+\mu A'} = \frac{F''}{A''},$$

aus denen sich noch 10 andere herleiten lassen, indem wir je zwei derselben in einander dividiren.

622. Aus dem blossen Anblick der 15 Gleichungen, die auf diese Weise sich ergeben, lassen sich eine Reihe von Sätzen herleiten. Wir wollen zuerst einige dieser Gleichungen, einzeln für sich, betrachten.

Jede der beiden Gleichungen:

$$\frac{B+\mu B'}{A+\mu A'} = \frac{B''}{A''}, \qquad \frac{D+\mu D'}{A+\mu A'} = \frac{D''}{A''},$$

gibt folgenden bekannten Satz:

Die Mittelpuncte aller Oerter zweiter Classe, welche vier gegebene gerade Linien berühren, insbesondere die Mitten der drei Diagonalen der, von diesen geraden Linien gebildeten, vollständigen vierseitigen Figur, liegen in gerader Linie.

Wenn wir nemlich die erste oder zweite Coordinaten-Axe durch die Mittelpuncte der beiden Curven (1) legen, so ist

$$D = D' = 0, \qquad B = B' = 0,$$

und mithin auch

$$D'' = 0, \qquad B'' = 0.$$

623. Auf gleiche Weise gibt die Gleichung:

$$\frac{E+\mu E'}{A+\mu A'} = \frac{E''}{A''}, \qquad (4)$$

folgenden Satz (469):

Wenn man von irgend einem Puncte aus an jeden von drei, demselben Viereck eingeschriebenen, Oerter zweiter Classe zwei Tangenten legt, so bilden diese drei Tangenten-Paare eine Involution von sechs geraden Linien. *)

*) I. Solche Systeme von sechs geraden Linien und von sechs Puncten, die Involutionen bilden, verdienen ganz die besondere Aufmerksamkeit, welche einige Geometer denselben geschenkt haben. Ich erlaube mir hier einige Bemerkungen über die Art, wie man bei der Betrachtung derselben verfahren kann.

Digitized by Google

Dieser Satz enthält als besondern Fall den bereits schon in der 440. Nummer hergeleiteten Satz von einer vollständigen vierseitigen Figur. Wenn wir eine Curve mit zwei Puncten-Systemen zusammenstellen, so erhalten wir einen Satz vom umschriebenen Viereck und nach diesem Satze können wir, wenn fünf Tangenten einer Curve zweiter

---

Die nachstehenden Definitionen scheinen mir die zweckmässigsten:

Drei Paare von geraden Linien, von denen jedes mit zwei gegebenen geraden Linien vier Harmonicalen bildet, bilden unter sich eine Involution von sechs geraden Linien.

Drei Paare von Puncten, von denen jedes mit zwei gegebenen Puncten vier harmonische Theilungspuncte bildet, bilden unter sich eine Involution von sechs Puncten.

Es folgt unmittelbar aus den vorstehenden Definitionen, dass jede Transversale eine Involution von sechs geraden Linien in solchen Puncten schneidet, die eine Involution von sechs Puncten bilden, und, andererseits, dass man eine Involution von sechs geraden Linien erhält, wenn man, von einem beliebigen Puncte aus, sechs gerade Linien nach einer Involution von sechs Puncten zieht. Zugleich ist ersichtlich, dass, wenn wir eine Involution von sechs Puncten oder von sechs geraden Linien projiciren, gleichviel ob orthographisch oder perspectivisch, wir in der Projection wiederum eine Involution von sechs Puncten oder von sechs geraden Linien erhalten. Und endlich ist klar, dass, da die Pole von vier Harmonicalen, in Beziehung auf irgend einen gegebenen Kegelschnitt, vier harmonische Theilungspuncte, und die Polaren von vier harmonischen Theilungspuncten vier Harmonicalen sind, auch die Pole einer Involution von sechs geraden Linien eine Involution von sechs Puncten und die Polaren einer Involution von sechs Puncten eine Involution von sechs geraden Linien bilden.

Da von vier harmonischen Theilungspuncten zwei imaginär sein können, so können auch die Puncte einer Involution, paarweise genommen, imaginär werden. Wenn die beiden Puncte eines Puncten-Paares der Involution zusammenfallen, so geschieht diess in einem derjenigen beiden Puncte, die mit jedem Paare der Involution vier harmonische Theilungspuncte bilden. (Auch diese beiden Puncte können imaginär sein). Mit diesen beiden Puncten können zwei Puncten-Paare zusammenfallen. Alsdann erhalten wir also, statt der Involution, blass vier harmonische Theilungspuncte.

Beziehungen, welche den letzten ganz analog sind, ergeben sich für eine Involution von sechs geraden Linien. —

II. Nach der ersten Definition ergibt sich sogleich folgender Satz:

Wenn eine Involution von sechs geraden Linien gegeben ist, so kann man, im Allgemeinen, eine Transversale auf doppelte Weise so ziehen, dass zwischen je zwei Linien-Paaren der Involution gleiche Stücke derselben liegen.

Aus der zweiten Definition geht folgender Satz hervor (192):

Wenn eine Involution von sechs Puncten gegeben ist, so schneiden sich diejenigen drei Kreise, welche man über den Abständen der Puncte jedes Paares dieser sechs Puncte, als Durchmesser, beschreiben kann, in denselben beiden (reellen oder imaginären) Puncten. Diese Durchschnittspuncte sind zwei solche Puncte, die die Eigenschaften besitzen, dass, wenn man von einem derselben zwei gerade Linien nach jedem Puncten-Paare der Involution zieht, je zwei solcher drei Linien-Paare mit einander gleiche Winkel bilden.

Es sind die beiden in Rede stehenden Durchschnittspuncte reell oder imaginär, je nachdem diejenigen beiden Puncte, welche mit den beiden Puncten jedes Paares der Involution vier harmonische Theilungspuncte bilden, umgekehrt, imaginär oder reell sind. Die gemeinschaftliche Chorde jener drei Kreise halbirt diejenige gerade Linie, welche die letztgenannten beiden Puncte verbindet und steht auf derselben senkrecht. Diese beiden Puncte selbst sind zugeordnete Pole in Beziehung auf jeden der drei Kreise (369); sie sind die Chordalpuncte (363) je zweier derselben.

Eine unmittelbare Anwendung des letzten Satzes gibt folgenden Satz:

Wenn drei Paare von Kreisen, die dieselben beiden Mittelpuncte haben, gegeben sind, so haben diejenigen drei Kreise, welche über den Abständen der Durchschnittspuncte der innern und der äussern gemeinschaftlichen Tangenten der gegebenen Kreise der drei Paare, als Durchmesser, beschrieben werden können, eine gemeinschaftliche (ideale) Chorde.

Der Beweis dieses Satzes ergibt sich direct, wenn wir nach der Gleichung (8) der 186. Nummer die Gleichungen zweier solcher Kreise bilden. Auf diese Weise ergibt sich, indem

Classe gegeben sind, eine sechste Tangente construiren, indem wir zu fünf gegebenen geraden Linien einer Involution die sechste bestimmen.

Alle Resultate dieser Nummer gelten auch für solche Parabeln, welche die drei Seiten eines gegebenen Dreiecks berühren.

---

wir $h = \beta = n$ und $a+\alpha = o$ setzen:

$$y^2+x^2-2\frac{\varrho^2+r^2}{\varrho^2-r^2}ax = -a^2,$$

$$y^2+x^2-2\frac{\varrho'^2+r'^2}{\varrho'^2-r'^2}ax = -a^2;$$

mithin, wenn wir abziehen, und durch den constanten Factor des ersten Gliedes dividiren:

$$x = n,$$

eine Gleichung, die von der Grösse der Radien der verschiedenen Kreise unabhängig ist. Man kann diesen Beweis auch als den Beweis des letzten Satzes ansehen.

Aus dem vorletzten Satze ergibt sich eine leichte Construction des sechsten Punctes einer Involution, wenn fünf Puncte derselben gegeben sind; und hiernach also auch der sechsten geraden Linie einer Involution, wenn fünf gerade Linien derselben gegeben sind. —

III. Da die Summe der reciproken Abstände zweier zusammengehöriger harmonischer Theilungspuncte von einem der beiden übrigen Theilungspuncte dem doppelten reciproken Abstande der beiden letztgenannten Puncte von einander gleich ist, (Seite 100, Note) so ergibt sich ferner der folgende Satz:

Wenn sechs Puncte einer geraden Linie, die eine Involution bilden, gegeben sind, so gibt es, im Allgemeinen, zwei solche Puncte derselben geraden Linie, für deren jeden die Summe der beiden reciproken Abstände von den beiden Puncten jedes Paares der Involution derselben Grösse gleich ist.

IV. Das Product der Abstände zweier zusammengehöriger harmonischer Theilungspuncte von der Mitte der beiden übrigen Theilungspuncte ist gleich dem Quadrate des halben Abstandes dieser letztgenannten Puncte von einander.

Dieser Satz ergibt sich sogleich. Denn nennt man jene beiden Abstände p und q, und diesen halben Abstand h, so gibt die harmonische Proportion:

$$b+p : b-p = b+q : q-b,$$

und folglich kommt:

$$pq = b^2.$$

Wenn die beiden ersten harmonischen Theilungspuncte reell sind, so ist auch b reell; wenn jene Puncte imaginär sind, nimmt b die Form $\beta\sqrt{-1}$ an und b^2 ist negativ. Im ersten Falle sind p und q reell und haben dasselbe Zeichen, oder sind imaginär; im zweiten Falle sind p und q nothwendig reell und von entgegengesetztem Zeichen. So lange nur die beiden letzten Theilungspuncte reell sind, sind auch p und q reell.

Nach der zweiten Definition ergibt sich hiernach folgender Satz:

Wenn eine Involution von sechs Puncten gegeben ist, so gibt es immer einen siebenten Punct derselben geraden Linie, welcher die Eigenschaft besitzt, dass das Product der Abstände desselben von den beiden Puncten jedes Paares der Involution ein und derselben Grösse gleich ist.

Diesen siebenten Punct kann man den Mittelpunct der Involution nennen. Wenn ein Punct einer Involution unendlich weit liegt, so ist der zugehörige Punct der Mittelpunct derselben.

V. Wenn man einen der Scheitelwinkel ($= 2\vartheta$), welche zwei gegebene gerade Linien mit einander bilden, durch eine gerade Linie halbirt und irgend zwei andere gerade Linien zieht, welche als Harmonicalen zu den beiden gegebenen gehören, und mit der Halbirungs-Linie Winkel bilden, die man η und ξ nennt, so ist:

$$tang\eta \,.\, tang\xi = tang^2\vartheta,$$

Es folgt dieser Satz unmittelbar aus dem letzten Satze von vier harmonischen Theilungspuncten, wenn man eine Transversale zieht, die auf jener Halbirungs-Linie senkrecht steht, und die Durchschnitte derselben mit den vier Harmonicalen betrachtet. Hiernach gibt die erste Definition folgenden Satz:

Digitized by Google

Wenn wir annehmen, dass die beiden gegebenen Curven einen Mittelpunct haben, und

$$B = B' = o, \qquad D = D' = o$$

setzen, so haben alle in Rede stehenden Curven denselben Mittelpunct und sind

---

Wenn eine Involution von sechs geraden Linien gegeben ist, so gibt es immer zwei auf einander senkrecht stehende gerade Linien, deren jede die Eigenschaft besitzt, dass, wenn man die Winkel, welche die drei Linien-Paare der Involution mit derselben bilden, η und ξ, η' und ξ', η'' und ξ'' nennt:

$$tang\eta tang\xi = tang\eta' tang\xi' = tang\eta'' tang\xi''.$$

Diese beiden geradeo Linien kann man die Axen der gegebenen Involution von sechs geraden Linien nennen. Die beiden Axen bilden mit je zwei Linien-Paaren der Involution eine neue Involution.

Die letzte Gleichung gibt, in Uebereinstimmung mit II., insbesondere auch folgenden Satz:

Die Schenkel dreier rechter Winkel, die einen gemeinschaftlichen Scheitelpunct haben, bilden eine Involution von sechs geraden Linien. —

VI. Wenn die beiden Gleichungen

$$w+bn = o, \qquad w-bn = o,$$

irgend zwei Puncte darstellen, die auf der zweiten Axe zu beiden Seiten des Anfangspunctes gleich weit von demselben entfernt liegen, so stellen nach der 410. Nummer und der zweiten Definition, wenn μ, μ' und μ'' irgend drei beliebige Coefficienten bedeuten, folgende drei Gleichungen-Paare:

$$(1+\mu)w+(1-\mu)bn = o, \quad (1+\mu')w+(1-\mu')bu = o, \quad (1+\mu'')w+(1-\mu'')bn = o,$$
$$(1-\mu)w+(1+\mu)bu = o, \quad (1-\mu')w+(1+\mu')bu = o, \quad (1-\mu'')w+(1+\mu'')bn = o,$$

eine Involution von sechs Puncten dar, bezogen auf ihren Mittelpunct, als Anfangspunct der Coordinaten. Diese Gleichungen zeigen wiederum, dass das Product der Abstände eines beliebigen Puncten-Paares der Involution vom Mittelpuncte derselben gleich b^2 ist. Ferner erhält man, wenn man die drei Puncten-Paare, wie sie den vorstehenden drei Gleichungen-Paren entsprechen, V und U, V' und U', V'' und U'' nennt:

$$\frac{V''U}{V''U'} = \frac{(\mu''+\mu)(1-\mu')}{(\mu''+\mu')(1-\mu)},$$
$$\frac{V'U''}{V'U} = \frac{(\mu''+\mu')(1-\mu)}{(\mu'+\mu)(1-\mu'')},$$
$$\frac{VU'}{VU''} = \frac{(\mu'+\mu)(1-\mu'')}{(\mu''+\mu)(1-\mu')},$$

und indem man diese drei Gleichungen in einander multiplicirt, kommt, wenn man zugleich auf die Vorzeichen Rücksicht nimmt:

$$\frac{V''U.V'U''.VU'}{U''V.U'V''.UV'} = -1. \qquad (a)$$

Da man V mit U, V' mit U' und V'' mit U'' beliebig vertauschen kann, so ergeben sich aus der vorstehenden Gleichung noch folgende drei:

$$\frac{V''V.V'U''.UU'}{U''U.U'V''.VV'} = -1, \quad \frac{V''U.U'U''.VV'}{U''V.V'V''.UU'} = -1, \quad \frac{U''U.V'V''.VU'}{V''V.U'U''.UV'} = -1. \qquad (b)$$

Wenn wir nach einander die Gleichung (a) in jede der Gleichungen (b) dividiren, so gelangen wir zu folgenden drei Gleichungen:

$$\frac{VV''.VU'}{VV''.VU''} = \frac{UU''.UV''}{UU'.UV'}, \quad \frac{V'V.V'U}{V'V''.V'U''} = \frac{U'U.U'V}{U'U''.U'V''}, \quad \frac{V''V.V''U'}{V''V.V''U} = \frac{U''U.U''V'}{U''U.U''V}. \qquad (c)$$

Die sieben Gleichungen (a), (b) und (c) entsprechen den schon in der 439. Nummer erwähnten, von H. Brianchon aufgestellten, Gleichungen. —

VII. Wenn die beiden Gleichungen:

$$y = tang\alpha.x, \qquad y = -tang\alpha.x,$$

irgend zwei durch den Anfangspunct der Coordinaten (von denen wir annehmen, dass sie rechtwinklige seien) gehende gerade Linien darstellen, welche zu beiden Seiten der ersten Axe liegen und mit derselben gleiche Winkel bilden, so erhalten, nach der ersten Defini-

demselben Parallelogramm eingeschrieben. Unter dieser Voraussetzung enthält die Gleichung (4) folgenden Satz: (497)

Alle Curven zweiter Classe, die demselben Parallelogramm eingeschrieben sind, haben beide dieselben zwei geraden Linien zu zugeordneten Durchmessern.

Diese beiden zugeordneten Durchmesser sind offenbar die beiden Diagonalen des Parallelogramms. Denn wenn wir von einer Curve zu einem Systeme von zwei Puncten übergehen, so fällt von irgend zweien zugeordneten Durchmessern einer immer in die, diese beiden Puncte verbindende, gerade Linie. Es folgt hieraus ferner folgender Satz:

Von allen in ein gegebenes Parallelogramm beschriebenen Ellipsen nähert sich diejenige dem Kreise am meisten, deren gleiche zugeordnete Durchmesser die beiden Diagonalen des gegebenen Parallelogramms sind und deren Axen also die von diesen Diagonalen gebildeten Scheitelwinkel halbiren. —

625. Etwas allgemeiner, als die Beweisführung in den letzten beiden Nummern, ist die nachstehende Betrachungsweise:

Die Gleichung

$$\frac{B+\mu B'}{A+\mu A'} = \frac{B''}{A''},$$

die wir beispielsweise nehmen wollen, reducirt sich, wenn wir

$$\frac{B}{A} = \frac{B'}{A'}$$

setzen, auf folgende:

$$\frac{B}{A} = \frac{B'}{A'} = \frac{B''}{A''}.$$

Wir kommen also zu folgendem allgemeinern Resultate:

Wenn in der Gleichung einer gegebenen Curve zweiter Classe der Quotient irgend zweier Coefficienten gleich ist dem Quotienten der entsprechenden Coefficienten in der Gleichung einer zweiten solchen gegebenen Curve, so erhält man denselben Quotienten auch dann, wenn man, statt einer der beiden gegebenen Curven, irgend eine dritte betrachtet, welche mit diesen dieselben vier gemeinschaftlichen Tangenten hat.

Es ergeben sich hier 15 verschiedene Fälle, von denen wir einige besonders hervorheben wollen.

---

tion und nach IV., wenn μ, μ' und μ'' beliebig zu bestimmende Coefficienten sind, für irgend eine beliebige Involution von sechs geraden Linien, Ov und Ou, Ov' und Ou', Ov'' und Ou'', deren Axen die beiden Coordinaten-Axen sind, folgende Gleichungen:

$$(1+\mu)y = (1-\mu)ax, \quad (1+\mu')y = (1-\mu')ax, \quad (1+\mu'')y = (1-\mu'')ax,$$
$$(1-\mu)y = (1+\mu)ax, \quad (1-\mu')y = (1+\mu')ax, \quad (1-\mu'')y = (1+\mu'')ax.$$

Hiernach erhält man, nach leichten Reductionen:

$$\frac{tang\,v''Ou}{tang\,v''Ou'} = \frac{(\mu''+\mu)(1-\mu'\mu'')}{(\mu''+\mu')(1-\mu\mu'')},$$
$$\frac{tang\,v'Ou''}{tang\,v'Ou} = \frac{(\mu''+\mu')(1-\mu\mu')}{(\mu'+\mu)(1-\mu'\mu'')},$$
$$\frac{tang\,vOu'}{tang\,vOu''} = \frac{(\mu'+\mu)(1-\mu\mu'')}{(\mu''+\mu)(1-\mu\mu')},$$

und, indem man diese drei Gleichungen mit einander multiplicirt, kommt:

$$\frac{tang\,v''Ou\;tang\,v'Ou''.tang\,vOu'}{tang\,u''Ov.tang\,u'Ov''.tang\,uOv'} = -1. \qquad (d)$$

Aus dieser Gleichung ergeben sich unmittelbar noch sechs andere, die den Gleichungen (b) und (c) entsprechen. —

Digitized by Google

626. Aus jeder von folgenden drei Gleichungen:

$$\frac{B+\mu B'}{A+\mu A'} = \frac{B''}{A''}, \qquad \frac{D+\mu D''}{A+\mu A''} = \frac{D''}{A''}, \qquad \frac{D+\mu D'}{B+\mu B'} = \frac{D''}{B''},$$

ergibt sich hiernach der Satz der 623. Nummer.

Auf ähnliche Weise folgt aus jeder von folgenden sechs Gleichungen:

$$\begin{aligned} &\frac{C+\mu C'}{B+\mu B'} = \frac{C''}{B''}, \qquad \frac{E+\mu E'}{B+\mu B'} = \frac{E''}{B''}, \qquad \frac{E+\mu E'}{C+\mu C'} = \frac{E''}{C''}, \\ &\frac{E+\mu E'}{D+\mu D'} = \frac{E''}{D''}, \qquad \frac{F+\mu F''}{D+\mu D'} = \frac{F''}{D''}, \qquad \frac{F+\mu F'}{E+\mu E'} = \frac{F''}{E''}, \end{aligned} \tag{5}$$

nachstehender bekannter Satz: (525)

Der geometrische Ort für die Pole einer beliebigen Transversalen, in Beziehung auf alle Ellipsen oder Hyperbeln, welche demselben Viereck eingeschrieben sind, oder in Beziehung auf alle Parabeln, welche die drei Seiten desselben Dreiecks berühren, ist eine gerade Linie.

Aus diesem Satze folgt der zu Anfang dieser Nummer angezogene (durch Gränz-Betrachtungen in der Construction) indem man die beliebige Transversale sich unendlich weit entfernt denkt. In der analytischen Entwicklung vertauschen sich, beim Uebergang von einem Satze zum andern, bloss die zusammen zu stellenden Coefficienten der allgemeinen Gleichung.

Wenn man, statt drei Curven, die drei Paare gegenüberstehender Winkelpuncte einer vollständigen vierseitigen Figur zusammenstellt, so erhält man den Satz der 435. Nummer (526). Die in diesem Satze bestimmte gerade Linie geht also durch den Pol der beliebigen Transversalen, in Beziehung auf jede der vierseitigen Figur eingeschriebene Curve zweiter Classe. Wenn fünf gerade Linien gegeben sind, so erhält man fünf gegebene vierseitige Figuren und mithin auch, einer beliebigen Transversalen entsprechend, fünf gerade Linien, welche durch ein und denselben Punct gehen, durch den Pol dieser Transversalen, in Beziehung auf diejenige Curve zweiter Classe, welche von den fünf gegebenen geraden Linien berührt wird. Diesen Pol können wir also, ohne dass die Curve selbst gegeben ist, durch den Durchschnitt irgend zweier von jenen fünf durch denselben Punct gehenden geraden Linien construiren.

627. Den Satz der 624. Nummer erhalten wir unmittelbar aus folgenden beiden Gleichungen, welche schon unter den Gleichungen (5) vorkommen:

$$\frac{E+\mu E'}{C+\mu C'} = \frac{E''}{C''}, \qquad \frac{E+\mu E'}{F+\mu F''} = \frac{E''}{F''}, \tag{6}$$

und ferner auch aus folgender:

$$\frac{F+\mu F''}{C+\mu C'} = \frac{F''}{C''}. \tag{7}$$

Wenn wir nemlich, was die letzte Gleichung anbetrifft, vom Anfangspuncte der Coordinaten, für den wir jeden beliebigen Punct nehmen können, zwei Tangenten an jede der beiden gegebenen Curven legen, ferner der zweiten Axe, der wir eine beliebige Richtung geben können, irgend eine gerade Linie parallel ziehen, die den ao die erste Curve gelegten Tangenten in den beiden Puncten n und v, und den an die zweite Curve gelegten Tangenten in n' und v' begegnet, und dann die erste Axe durch einen solchen Punct P dieser geraden Linie legen, der dadurch, und zwar auf einzige Weise, bestimmt ist, dass

$$Pu.Pv = Pu'.Pv',$$

so ist offenbar:

$$\frac{F}{C} = \frac{F'}{C'},$$

und also nach (7):

$$\frac{F}{C} = \frac{F'}{C'} = \frac{F''}{C''},$$

und mithin auch:

$$Pu.Pv = Pu'.Pv' = Pu''.Pv'', \qquad (s)$$

wenn wir die entsprechenden Durchschnitte der durch den Anfangspunct an die dritte Curve gelegten Tangenten u'' und v'' nennen. Es führt also die Gleichung (7) wieder zu dem Satze der 624. Nummer, indem wir die in der Note zu dieser Nummer unter V. entwickelte Eigenschaft einer Involution von sechs geraden Linien berücksichtigen. Ein besonderer Fall ist derjenige, wo, bei der Voraussetzung rechtwinkliger Coordinaten-Axen:

$$\frac{F}{C} = \frac{F'}{C'} = \frac{F''}{C''} = -1.$$

Diess führt zu Resultaten, bei denen wir später ausführlicher verweilen werden.

628. Der Satz der 624. Nummer, und namentlich die Umschreibung desselben in der Gleichung (8) der vorigen Nummer, besteht auch dann noch, wenn wir annehmen, dass alle Tangenten, statt durch denselben Punct zu gehen, unter einander parallel sind. Es folgt diess einerseits aus Gränz-Betrachtungen in der Construction, und andrerseits, wenn wir eine der beiden Gleichungen:

$$\frac{C+\mu C'}{A+\mu A'} = \frac{C''}{A''}, \qquad \frac{F+\mu F'}{A+\mu A'} = \frac{F''}{A''},$$

behandeln, wie in der vorigen Nummer die Gleichung (7).

Die Discussion des in Rede stehenden Falles führt zu mehrern speciellen Sätzen, Fig. 17. von denen wir einige hervorheben wollen. Wir wollen zu diesem Ende, wie in der 17. Figur, eine Curve mit zwei Puncten-Paaren, A und C, B und D, zusammenstellen, und eine beliebige Transversale MN betrachten, welche von den sechs Parallelen in den Puncten u und v, u' und v', u'' und v'' geschnitten werde. Es ist alsdann, nach der Gleichung (a) der Note zur 624. Nummer:

$$\frac{V''U}{VU''} = \frac{V'U}{V'U''} \cdot \frac{UV''}{UV},$$

und hieraus folgt:

$$\frac{V''U}{VU''} = \frac{HB}{HA} \cdot \frac{EC}{ED}.$$

Der erste Theil dieser Gleichung ist das Verhältniss der beiden Viereckseiten BC und AD, wenn man dieselben auf die Transversale MN nach der Richtung der parallelen Tangenten EG und FH projicirt; er ist also das Verhältniss dieser Seiten selbst, wenn dieselben parallel sind.

Die zweite der Gleichungen (c) gibt:

$$\frac{FD}{FC} \cdot \frac{HB}{HA} = \frac{GB}{GA} \cdot \frac{ED}{EC}.$$

Wenn die gegebene Curve eine Parabel ist, so liegt eine der beiden parallelen Tangenten, etwa FH, unendlich weit. Alsdann ist, nach der Note zur 624. Nummer (IV), U' der Mittelpunct der Involution und also:

$$UU.U'V = U'U''.UV':$$

Digitized by Google

Die Producte der Abstände je zweier gegenüberliegender Winkelpuncte einer beliebigen, um eine gegebene Parabel beschriebenen, vierseitigen Figur von einer beliebigen festen Tangente sind einander gleich.

Indem man einer Seite des umschriebenen Vierecks andere Lagen gibt, und die drei übrigen Seiten unverändert lässt, ergibt sich sogleich folgender Satz:

Das Verhältniss der Abstände der beiden Durchschnittspuncte einer beweglichen Tangente mit zwei festen Tangenten einer gegebenen Parabel von einer dritten festen Tangente ist constant.

Hiernach lassen sich leicht, wenn vier Tangenten einer Parabel gegeben sind, beliebig viele Tangenten derselben bestimmen. —

629. Man sieht auf den ersten Blick, wie alle die vorstehenden Resultate unter einander in der genauesten Beziehung stehen, und alle auf eine einfache Weise aus einem derselben, dem Satze der 624. Nummer, werden hervorgehen müssen.

Zu denselben Resultaten kommen wir auch noch durch Elimination von μ. Wenn wir z. B. $A = A' = A'' = 1$ setzen, und dann zwischen den beiden Gleichungen:

$$\frac{B+\mu B'}{1+\mu} = B'', \qquad \frac{D+\mu D'}{1+\mu} = D'',$$

μ eliminiren, so kommt:

$$B''(D'-D)+B'(D-D'')+B(D''-D') = 0.$$

Diese Gleichung ist, in Beziehung auf B'' und D'', vom ersten Grade und stellt also, wenn wir diese Grössen als veränderlich, als x und y, betrachten, eine gerade Linie dar und diese gerade Linie geht durch die beiden Puncte (D', B') und (D, B). Auf diese Weise erhalten wir also den Satz der 623. Nummer.

In die übrigen analogen Entwicklungen geben wir hier nicht ein, sondern thun gleich einen Schritt weiter.

630. Wenn in der allgemeinen Gleichung zweiten Grades (2), welche aus der Verbindung der beiden Gleichungen zweier gegebener Oerter zweiter Classe (1) hervorgeht, zwischen zweien Quotienten irgend zweier Coefficienten-Paare irgend eine Bedingungs-Gleichung gegeben ist, so haben diese beiden Quotienten bestimmte, zusammengehörige Werthe. Die Anzahl dieser Werthe ist im Allgemeinen gleich dem Grade der Bedingungs-Gleichung, oder doppelt so gross.

Diese Behauptungen ergeben sich unmittelbar. So haben wir zum Beispiel:

$$\frac{B+\mu B'}{A+\mu A'} = \frac{B''}{A''}, \qquad \frac{D+\mu D'}{A+\mu A'} = \frac{D''}{A''},$$

und wenn wir zu diesen beiden Gleichungen noch irgend eine Bedingungs-Gleichung, von irgend einem n. Grade, in Beziehung auf $\frac{B''}{A''}$ und $\frac{D''}{A''}$, die wir allgemein durch

$$\varphi\left(\frac{D''}{A''}, \frac{B''}{A''}\right) = 0 \qquad (9)$$

bezeichnen wollen, hinzufügen, so sind $\frac{D''}{A''}$ und $\frac{B''}{A''}$ vollkommen bestimmt, und zwar erhalten wir für diese beiden Grössen im Allgemeinen n Paare von Werthen. Es sind diess die Coordinaten-Werthe der Durchschnittspuncte derjenigen geraden Linie, welche der geometrische Ort für die Mittelpuncte aller derjenigen Oerter zweiter Classe ist, die mit den beiden gegebenen (1) dieselben gemeinschaftlichen Tangenten haben,

Digitized by Google

mit der durch (9) (wenn wir $\frac{D''}{A''}$ und $\frac{B''}{A''}$ als veränderlich, als y und x, betrachten) dargestellten Curve n. Ordnung. Ganz analoge Fälle ergeben sich offenbar

$$\frac{6.5.4}{1.2.3} = 20.$$

Wir haben ferner auch:

$$\frac{B+\mu B'}{A+\mu A'} = \frac{B''}{A''}, \qquad \frac{F+\mu F'}{D+\mu D'} = \frac{F''}{D''},$$

und wenn wir zwischen diesen beiden Gleichungen μ eliminiren, so kommt:

$$(D'A-DA')\frac{B''}{A''}\cdot\frac{F''}{D''}+(A'F-AF')\frac{B''}{A''}+(DBD'-B)\frac{F''}{D''}+(F'B-FB') = 0,$$

eine Gleichung, die nicht mehr, wie in den vorigen 20 Fällen, sich, in Beziehung auf die Quotienten $\frac{B''}{A''}$ und $\frac{F''}{D''}$, auf den ersten Grad reducirt. Wenn also zwischen denselben beiden Quotienten noch eine Bedingungs-Gleichung irgend eines n. Grades gegeben ist, so erhalten wir für diese Quotienten eine 2n fache Bestimmung. Es ist gut, zu bemerken, dass in dem vorliegenden Falle eine Bedingungs-Gleichung des m. Grades, in Beziehung auf $\frac{B''}{A''}$ und des m'. Grades, in Beziehung auf $\frac{F''}{D''}$, bis zum (m+m'). Grade, in Beziehung (etwa) auf $\frac{A''}{C''}$, $\frac{B''}{C''}$, $\frac{D''}{C''}$ und $\frac{F''}{C''}$, ansteigt.

Auf ähnliche Weise ergibt sich, dass, wenn zwischen drei, vier oder fünf Quotienten beliebiger Coeffienten-Paare der allgemeinen resultirenden Gleichung (2) eine gegebene Bedingungs-Gleichung Statt findet, diese drei, vier oder fünf Quotienten vollkommen bestimmt sind. Die Zahl der möglichen verschiedenen Bestimmungen ist, wenn ein und derselbe Coefficient als Nenner in allen Quotienten vorkommt (ein Fall, auf den wir uns hier beschränken wollen) gleich dem Grade der gegebenen Bedingungs-Gleichung.

Es ist zum Beispiel:

$$tang^2\eta = \frac{4[(A''E''-B''D'')^2-(A''C''-B''^2)(A''F''-D''^2)]sin^2\vartheta}{[(A''C''-B''^2)+2(A''E''-B''D'')cos\vartheta+(A''F''-D''^2)]^2},$$

eine Bedingungs-Gleichung des vierten Grades (etwa) zwischen den fünf Coefficienten $\frac{B''}{A''}$, $\frac{C''}{A''}$, $\frac{D''}{A''}$, $\frac{E''}{A''}$ und $\frac{F''}{A''}$. Es gibt daher im Allgemeinen (490) vier verschiedene Hyperbeln, deren Asymptoten einen gegebenen Winkel η mit einander bilden und mit zwei gegebenen Curven zweiter Classe dieselben vier (reellen oder imaginären) gemeinschaftlichen Tangenten haben, das heisst, demselben Viereck eingeschrieben sind. Es gibt aber insbesondere nur zwei gleichseitige Hyperbeln, die vier gegebene gerade Linien berühren, weil die vorstehende Bedingungs-Gleichung für diesen Fall auf folgende sich reducirt:

$$(A''C''-B''^2)+2(A''E''-B''D'')cos\vartheta+(A''F''-D''^2) = 0.$$

Diese Gleichung reducirt sich wiederum, wenn wir $B'' = D'' = 0$ setzen, auf folgende:

$$C''+2E''cos\vartheta+F'' = 0,$$

auf eine Gleichung des ersten Grades in Beziehung auf die beiden Quotienten $\frac{E''}{C''}$ und $\frac{F''}{C''}$. Es gibt also nur eine einzige gleichseitige Hyperbel, welche die vier Seiten eines Parallelogramms berührt.

Um noch ein Beispiel zu haben, wollen wir folgende Bedingungs-Gleichung nehmen:

$$\frac{E''^2-C'F''}{(C''+F'')^2} = \frac{D''^2}{B''^2},$$

welche, bei der Voraussetzung rechtwinklicher Coordinaten-Axen, ausdrückt, dass der durch den Anfangspunct der Coordinaten gehende Durchmesser der resultirenden Curve mit der ersten Coordinaten-Axe einen Winkel bildet, der demjenigen gleich ist, welchen die durch den Anfangspunct gehenden Tangenten der Curve mit einander bilden. Da diese Bedingungs-Gleichung bis zum vierten Grade steigt, so gibt es im Allgemeinen vier Curven, welche, von einem gegebenen Puncte aus, unter einem Winkel gesehen werden, der demjenigen gleich ist, welchen der durch den gegebenen Punct gehende Druchmesser der Curve mit einer gegebenen geraden Linie bildet.

Auf ähnliche Weise ergibt sich (490), dass es im Allgemeinen sechs Curven zweiter Classe gibt, die von einem gegebenen Puncte aus unter einem solchen Winkel gesehen werden, der dem Asymptoten-Winkel der Curve oder dessen Nebenwinkel gleich ist.

631. Wenn wir auf das zu Anfange der vorigen Nummer angeführte Beispiel nochmals zurückblicken, so finden wir, dass $\frac{B''}{A''}$ und $\frac{D''}{A''}$ unabhängig sind von den Coefficienten C, E, F und C', E', F' der beiden Gleichungen (1). Statt der durch diese beiden Gleichungen dargestellten Curven hätten wir also auch irgend zwei andere Curven nehmen können, in deren Gleichungen die entsprechenden sechs Coefficienten beliebige andere Werthe haben. Indem wir diese Bemerkung auf alle Fälle ausdehnen, erhalten wir folgenden Satz:

Wenn zwischen zwei, drei oder vier Quotienten beliebiger Coefficienten der resultirenden Gleichung (2) *eine gegebene Bedingungs-Gleichung Statt findet, so bestimmen sich diese Quotienten auf dieselbe Weise, wie wir auch die Werthe derjenigen Coefficienten der beiden Gleichungen* (1), *welche den in jenen Quotienten nicht vorkommenden Coefficienten der resultirenden Gleichung* (2) *entsprechen, anders bestimmen mögen.*

Einzelne Fälle dieses Satzes wollen wir beispielsweise hervorheben und geometrisch deuten.

632. Die beiden Gleichungen (1) stellen, wenn wir in denselben nur die sechs Coefficienten C, E, F und C', E', F' als gegeben betrachten, die übrigen sechs Coefficienten aber unbestimmt lassen, solche zwei beliebige Oerter zweiter Classe dar, die zwei Paare fester, durch den Anfangspunct der Coordinaten gehender gerader Linien berühren. Für solche Oerter zweiter Classe können wir insbesondere auch zwei beliebige Systeme von zwei Puncten nehmen, die auf vier festen, durch den Anfangspunct gehenden, geraden Linien liegen. Die durch die resultirende Gleichung (3) darstellbaren Curven sind also solchen beliebigen Vierecken eingeschrieben, deren Winkelpuncte auf jenen vier festen geraden Linien sich befinden.

Die Gleichung

$$E''^2 - C''F'' = 0$$

drückt aus, dass die bezügliche Curve durch den Anfangspunct der Coordinaten geht, und zeigt zugleich, dass es, im Allgemeinen, zwei Curven zweiter Classe gibt, die vier gegebene gerade Linien berühren und überdiess durch einen gegebenen Punct gehen. Hiernach ergibt sich folgender Satz:

Alle Curven zweiter Classe, welche durch einen gegebenen Punct gehen, und solchen beliebigen Vierecken eingeschrieben sind, deren vier Winkelpuncte auf vier gegebenen, durch den gegebenen Punct gehenden, geraden Linien liegen, berühren in dem gegebenen Puncte eine von zwei festen geraden Linien.

Bei der Voraussetzung rechtwinkliger Coordinaten-Axen erhält man ohne Mühe:

$$tang^2\zeta = \frac{E''^2 - C''F''}{(C''+F'')^2},$$

wenn ζ derjenige Winkel ist, unter welchem die bezügliche resultirende Curve vom Anfangspuncte der Coordinaten aus gesehen wird. Es gibt also im Allgemeinen zwei demselben Viereck eingeschriebene Curven, welche, von einem gegebenen Puncte aus, unter einem gegebenen Winkel gesehen werden. Es gibt nur eine solche Curve, wenn der gegebene Winkel ein rechter ist, denn, wenn $\zeta = \frac{1}{2}\pi$, gibt die letzte Gleichung: $C+F = o$. Hiernach erhalten wir folgenden Satz:

Alle Curven zweiter Classe, welche von einem gegebenen Puncte aus unter einem gegebenen Winkel (oder dessen Nebenwinkel) gesehen werden, und solchen beliebigen Vierecken eingeschrieben sind, deren vier Winkelpuncte auf vier gegebenen, durch den gegebenen Punct gehenden, geraden Linien liegen, berühren zwei feste, durch denselben Punct gehende, gerade Linien.

Wenn der gegebene Winkel kein rechter ist, so erhalten wir für diese beiden festen geraden Linien eine zwiefache Bestimmung.

633. Bei der Voraussetzung rechtwinkliger Coordinaten ist der Ausdruck

$$\frac{C''+F''}{A''} - \frac{B''^2+D''^2}{A''^2}$$

gleich dem doppelten Quadrate der Hälfte einer der beiden gleichen zugeordneten Durchmesser der, durch die resultirende Gleichung dargestellten, Curve zweiter Classe (Ellipse) (512). Wenn wir daher den vorstehenden Ausdruck einer gegebenen Constanten K^2 gleich setzen, so ist die Grösse der gleichen zugeordneten Durchmesser der durch die resultirende Gleichung dargestellten Curve gegeben, und zwar durch eine Gleichung des zweiten Grades zwischen den vier Coefficienten $\frac{B''}{A''}$, $\frac{C''}{A''}$, $\frac{D''}{A''}$ und $\frac{F''}{A''}$. Die Bestimmung dieser Quotienten ist von E und E' durchaus unabhängig. Hiernach ergibt sich folgender Satz (534):

Wenn irgend zwei Rechtecke mit parallelen Seiten gegeben sind und man beschreibt in jedes derselben irgend eine beliebige Curve zweiter Classe, so sind diejenigen Ellipsen, welche mit solchen zwei Curven zweiter Classe dieselben gemeinschaftlichen Tangenten haben und deren gleiche zugeordnete Durchmesser, der Grösse nach, gegeben sind, alle einem von zwei vollkommen bestimmten Rechtecken eingeschrieben, deren Seiten den Seiten der beiden gegebenen parallel und deren Diagonalen den, der Grösse nach, gegebenen gleichen zugeordneten Durchmessern gleich sind.

Wenn wir $K^2 = o$ setzen, so sind alle resultirende Curven gleichseitige Hyperbeln; in dem vorstehenden Satze ändert sich alsdann weiter nichts, als dass zwei Seiten der denselben umschriebenen Rechtecke imaginär werden.

634. Wir haben (511), um noch ein letztes Beispiel zu betrachten:

$$\Omega^2 = \frac{C''}{A''} \cdot \frac{D''^2}{A''^2},$$

wenn wir den Inhalt der resultirenden Curve Ωx nennen, und annehmen, dass die beiden gegebenen Curven die erste Coordinaten-Axe im Anfangspuncte berühren, wonach F, E, F', E' = o und also auch F'', E'' = o. (Vergl. die 653. Nummer). Betrachten wir jenen Inhalt als gegeben, so ist die vorstehende Gleichung eine Bedingungs-Gleichung

digitized by Google

des dritten Grades zwischen den beiden Quotienten $\frac{C'''}{A'''}$ und $\frac{D'''}{A'''}$. Die Bestimmung dieser Quotienten ist von den Coefficienten B und B' in den beiden Gleichungen (1) unabhängig. Hiernach ergibt sich auf dieselbe Weise, als bisher, folgender Satz:

Wenn zwei Curven zweiter Classe eine gegebene gerade Linie in einem gegebenen Punete berühren, so gibt es ein, beiden Curven umschriebenes, Dreieck und in dieses Dreieck kann man im Allgemeinen drei Curven zweiter Classe von gegebenem Inhalte beschreiben, welche die eine Seite desselben, die gegebene gerade Linie, in dem gegebenen Puncte berühren. Wenn man, statt jeder der beiden ersten Curven, irgend eine andere nimmt, welche dieselbe im gegebenen Puncte osculirt, und mit ihr eine zweite gemeinschaftliche Tangente hat, die der gegebenen parallel ist (531), *so erhält man ein neues umschriebenes Dreieck und drei neue diesem Dreieck eingeschriebene Curven zweiter Classe von dem gegebenen Inhalte. Auf diesem Wege kommt man zu drei Gruppen sich osculirender Curven, welchen Parallel-Trapezen eingeschrieben sind, deren beide parallele Seiten, von welchen die eine überdiess in demselben Puncte berührt wird, in dieselben beiden geraden Linien fallen.*

635. An das Vorstehende schliessen sich unmittelbar auch noch die nachstehenden Entwicklungen an.

Wenn wir folgende lineare Bedingungs-Gleichung:

$$C'z'^2-2E'z'+F' = 0, \qquad (1)$$

in der z' irgend eine gegebene Grösse bedeutet, zu Grunde legen, so gibt es ausser der gegebenen Grösse z' noch eine zweite Grösse z'', welche, wenn wir $\frac{E'}{C'}$ und $\frac{F'}{C'}$ als bekannt ansehen, für z' substituirt, die letzte Gleichung befriedigt, und man erhält alsdann:

$$\frac{E'}{C'} = z'+z'', \qquad \frac{F'}{C'} = z'z''.$$

Es ist durch die Gleichung (1) eine, durch den Anfangspunct gehende, eine fünfte, Tangente der resultirenden Curve gegeben und aus der linearen Form der obigen Bedingungs-Gleichung folgt, dass es nur eine einzige solche resultirende Curve gibt. Die zweite durch den Anfangspunct gehende Tangente, deren Richtung z'' entspricht, ist eine einzige und vollkommen bestimmte.

Auf ähnliche Weise, wie bisher, ergibt sich, dass diese zweite durch den Anfangspunct der Coordinaten gehende Tangente für alle resultirenden Curven dieselbe bleibt, wenn wir die beiden gegebenen Curven mit andern vertauschen, welche dieselben, durch den Anfangspunct gehenden, geraden Linien berühren. Es folgt dieser Satz auch unmittelbar aus dem Satze der 623. Nummer und, umgekehrt, dieser Satz ergibt sich sogleich aus jenem.

Wenn wir insbesondere voraussetzen, dass die resultirende Gleichung ein System von zwei Puncten, (y', x') und (y'', x''), darstelle, so erhält dieselbe folgende Form;

$$w^2+(x'+x'')vw+x'x''v^2+(y'+y'')uw+(x'y''+x''y')uv+y'y''u^2 = 0,$$

und man hat:

$$z' = \frac{y'}{x'}, \qquad z'' = \frac{y''}{x''}.$$

Wenn wir ferner annehmen, dass die erste gegebene Curve unveränderlich dieselbe bleibt, an die Stelle der zweiten aber wiederum gehörig bestimmte Puncten-Systeme treten, so gelangen wir zu folgendem Satze;

Wenn irgend eine Curve zweiter Classe gegeben ist, und man beschreibt um dieselbe beliebige Vierecke, deren drei Winkelpuncte auf drei gegebenen, durch einen gegebenen Punct gehenden geraden Linien liegen, so liegen die vierten Winkelpuncte auf einer vierten, ebenfalls durch den gegebenen Punct gehenden, geraden Linie. *)

Wenn wir zwei solcher umschriebenen Vierecke betrachten, welche einen Winkelpunct gemein haben, so folgt aus dem vorstehenden Satze unmittelbar der Satz von BRIANCHON: „dass die drei Diagonalen eines um eine Curve zweiter Classe beschriebenen Sechsecks sich in demselben Puncte schneiden."

636. Wir wollen diesen Paragraphen mit einigen Entwicklungen beschliessen, welche aus einer sehr einfachen Schlussweise sich ergeben und zuerst diese Schlussweise selbst allgemein aufstellen.

Wenn wir die Gleichung eines geometrischen Ortes zweiter Classe zwischen den Coordinaten u, v und w, der Kürze halber, durch

$$U = 0 \qquad (1)$$

darstellen und

$$V = 0 \qquad (2)$$

eine solche Gleichung zwischen denselben veränderlichen Grössen bedeutet, in welcher (was wir in Beziehung auf das Folgende hier gleich voraussetzen) die Coefficienten der gegebenen Gleichung (1) nur auf lineare Weise vorkommen, so können wir, wenn eine zweite Curve zweiter Classe durch die Gleichung

$$U' = 0 \qquad (3)$$

gegeben ist, eine Gleichung

$$V' = 0 \qquad (4)$$

so bilden, dass in V' die Constanten von U' gerade auf dieselbe Weise vorkommen, als in V die Constanten von U. Die Gleichungen (2) und (4) stellen alsdann offenbar zwei Curven ein und derselben beliebigen Classe dar, von welchen die erste mit der ersten gegebenen Curve (1) in derselben geometrischen Beziehung steht, als die zweite mit der zweiten gegebenen Curve (3). Wenn irgend eine dritte Curve zweiter Classe

$$U'' = 0 \qquad (5)$$

gegeben ist, so entspricht derselben eine neue Curve:

$$V'' = 0. \qquad (6)$$

Wenn wir nun

$$U + \mu U' = U'' \qquad (7)$$

setzen, das heisst, wenn wir annehmen, dass die drei gegebenen Curven dieselben vier gemeinschaftlichen Tangenten haben, oder, mit andern Worten, derselben vierseitigen Figur eingeschrieben sind, so ergibt sich auch, was sogleich in die Augen springt:

$$V + \mu V' = V'';$$

das heisst, auch die drei Curven (2), (4) und (6) haben, paarweise genommen, dieselben gemeinschaftlichen Tangenten, deren Anzahl nach der besondern Natur dieser Curven und namentlich nach dem Grade ihrer Gleichungen sich bestimmt.

---

*) Dieser Satz ist nur ein einzelner und besonderer aus einer Reihe von Sätzen und Constructionen, über die H. PONCELET sich in den letzten Capiteln seines öfter schon angeführten Werkes ausführlich verbreitet. (*Prop. proj. Sect.* IV. *Chap.* II., III. p. 290 — 368). Dieselben Resultate fliessen ebenfalls aus allgemeinen und einfachen analytischen Betrachtungsweisen; doch diese gehören nicht hierher, weil sie sich an Gleichungen von höhern Graden anknüpfen.

Digitized by Google

Wenn ferner

$$W = 0 \qquad (8)$$

irgend eine Gleichung zwischen den Punct-Coordinaten x, y und z bedeutet, deren Coefficienten durch die Coefficienten der gegebenen Gleichung (1) sich auf lineare Weise ausdrücken lassen, und

$$W' = 0, \qquad W'' = 0 \qquad (9)$$

solche, in Beziehung auf (3) und (5), ähnlich gebildete Gleichungen bedeuten, und endlich wiederum die Gleichung (7) Statt findet, so ergibt sich

$$W+\mu W' = W'';$$

das heisst, wenn die drei gegebenen Curven derselben vierseitigen Figur eingeschrieben sind, so schneiden sich die drei Curven (8) und (9) in denselben Puncten, deren Anzahl von der Natur dieser Curven abhängt.

637. Wir gehen zur Anwendung des Vorstehenden auf einige besondere Fälle über. Wenn wir die Gleichung:

$$Aw^2+2Bvw+Cv^2+2Dnw+2Euv+Fn^2 = 0, \qquad (1)$$

zu Grunde legen, so erhalten wir:

$$(Aw'+Bv'+Du')w+(Bw'+Cv'+Eu')v+(Dw'+Ev'+Fu')n = 0,$$

für die Gleichung des Poles irgend einer gegebenen geraden Linie (w', v', u') (548) und:

$$Aw+Bv+Du = 0,$$

für die Gleichung des Mittelpunctes der gegebenen Curve. Hiernach gelangen wir, da in den beiden letzten Gleichungen die Constanten der Gleichung (1) nur in der ersten Potenz verkommen, sogleich die Sätze der 626. und 622. Nummer, dass die Pole einer beliebigen geraden Linie, in Beziehung auf alle Oerter zweiter Classe, die derselben vierseitigen Figur eingeschrieben sind, und insbesondere auch alle Mittelpuncte solcher Curven, in gerader Linie liegen. Und diese Sätze sind zugleich auch für die besondern Fälle, dass die Seiten der vierseitigen Figur alle oder zum Theil zusammenfallen oder imaginär werden, bewiesen, und auch für Puncten-Systeme, die sich mit jenen Curven zusammenstellen.

638. Dieselben Sätze, von denen der letztere als besonderer Fall des erstern anzusehen ist, ergeben sich auch auf folgende Weise, die in der Allgemeinheit der Bezeichnungsart (welche eine unmittelbare Uebertragung auf Curven beliebiger Classen gestattet) den Vorzug verdient. Aus der Gleichung:

$$U+\mu U' = U'',$$

folgt durch Differentiation:

$$\frac{dU}{dw}+\mu\frac{dU'}{dw} = \frac{dU''}{dw},$$

worin der obige Satz, in Beziehung auf die Mittelpuncte, und

$$\frac{dU}{dv}+\mu\frac{dU'}{dv} = \frac{dU''}{dv}, \qquad \frac{dU}{du}+\mu\frac{dU'}{du} = \frac{dU''}{du},$$

worin der Satz, in Beziehung auf die Pole einer der beiden, beliebig anzunehmenden, Coordinaten-Axen, enthalten ist (549). Wollen wir die Coordinaten-Axen als gegeben betrachten, und den Satz direct, in Beziehung auf die Pole einer beliebigen geraden Linie (w', v', u'), beweisen, so brauchen wir nur folgende Gleichung zu bilden:

$$\left\{\frac{dU}{dw}w'+\frac{dU}{dv}v'+\frac{dU}{du}u'\right\}+\mu\left\{\frac{dU'}{dw}w'+\frac{dU'}{dv}v'+\frac{dU'}{du}u'\right\} = \left\{\frac{dU''}{dw}w'+\frac{dU''}{dv}v'+\frac{dU''}{du}u'\right\},$$

Digitized by Google

die wir erhalten, wenn wir die letzten drei Gleichungen addiren, nachdem wir zuvor die erste mit w', die zweite mit v' und die dritte mit u' multiplicirt haben.

F. 19. 18. 639. Wenn wir wiederum von der Gleichung (1) der 637. Nummer ausgehen, so stellt, bei der Voraussetzung rechtwinkliger Coordinaten-Axen, nach der 483. Nummer folgende Gleichung:

$$A(y^2+x^2)-2Dy-2Bx+(F+C) = 0, \qquad (2)$$

den geometrischen Ort derjenigen Puncte dar, von welchen aus die durch (1) dargestellte Curve zweiter Classe unter rechten Winkeln gesehen wird. Dieser Ort ist derjenige Kreis, dessen Mittelpunct der Mittelpunct der Curve ist und dessen Radius gleich ist der Quadrat-Wurzel aus der Quadrat-Summe der beiden halben Axen der Curve, also für den Fall der Ellipse, gleich derjenigen Chorde, welche die Endpuncte der beiden Axen derselben verbindet. Da in der Gleichung (2) die Coefficienten der Gleichung (1) nur auf lineare Weise vorkommen, und zwei Kreise sich im Allgemeinen in zwei Puncten schneiden, so ergibt sich folgender Satz:

Alle Oerter zweiter Classe, welche einer gegebenen vierseitigen Figur eingeschrieben sind, werden, im Allgemeinen, von zwei festen Puncten aus, unter rechten Winkeln gesehen.

Wenn wir die drei Puncten-Systeme, die zu diesen Oertern gehören, betrachten, so folgt:

Diejenigen drei Kreise, die man über den drei Diagonalen einer gegebenen vollständigen vierseitigen Figur, als Durchmesser, beschreiben kann, gehen durch dieselben beiden Puncte.

Hiernach können wir jene beiden festen Puncte, die wir Q und Q' nennen wollen, leicht construiren. Sie liegen zu beiden Seiten der geraden Linie (LN), welche die Mittelpuncte aller eingeschriebenen Curven zweiter Classe enthält, gleichweit von ihr entfernt und auf einer solchen geraden Linie, welche auf LN senkrecht steht. Wenn die drei letztbezeichneten Kreise sich nicht in reellen Puncten schneiden, so haben sie wenigstens eine reelle gerade Linie zur (idealen) gemeinschaftlichen Chorde.

Die Construction folgender Aufgabe:

In eine gegebene vierseitige Figur eine Curve zweiter Classe zu beschreiben, die von einem gegebenen Puncte, P, aus unter einem rechten Winkel gesehen wird,

kommt, wenn wir zuerst den Mittelpunct der Curve bestimmen, darauf hinaus, den Mittelpunct desjenigen Kreises zu finden, der durch den gegebenen Punct P und durch die beiden festen Puncte Q und Q' geht. Wir können diesen Mittelpunct auch dann bestimmen, wenn die beiden Puncte Q und Q' imaginär werden (120).

In eine gegebene vierseitige Figur eine gleichseitige Hyperbel zu beschreiben.

Da für den Fall einer gleichseitigen Hyperbel der Kreis (2) auf einen Punct, den Mittelpunct derselben, sich reducirt, so erhalten wir die Mittelpuncte derjenigen beiden Hyperbeln, welche, im Allgemeinen, der Aufgabe Genüge leisten, wenn wir die Chordal-Puncte (363, 124) derjenigen beiden Kreise suchen, welche über irgend zwei Diagonalen der gegebenen vierseitigen Figur, als Durchmesser, beschrieben werden können. Wenn jene Hyperbeln reell sein sollen, so müssen die Durchschnittspuncte dieser beiden Kreise imaginär sein.

640. Wenn wir, wie in der vorigen Nummer, Curven zweiter Classe, die vier gegebene gerade Linien berühren, dadurch bestimmen, dass wir die Mittelpuncte derselben

Digitized by Google

construiren, so tritt uns die Frage entgegen, was für eine Art von Curven zweiter Classe den gegebenen oder durch Construction gefundenen Mittelpuncten entspricht. Ich nehme um so lieber Erörterungen hierüber mit einiger Ausführlichkeit auf, als wir auch noch in dem folgenden Paragraphen öfter auf dieselben zurückzukommen Veranlassung finden werden.

In der 18. Figur seien die vier stärker gezogenen geraden Linien irgend vier gegebene, welche eine vollständige vierseitige Figur bilden, in der die Mitten der drei Diagonalen M, M' und M'' sind. Durch diese drei Mitten geht diejenige gerade Linie LN, welche der geometrische Ort für die Mittelpuncte derjenigen Oerter zweiter Classe ist, welche von den vier gegebenen geraden Linien berührt werden. Da keine dieser Curven, so lange die gegebenen geraden Linien reell bleiben, imaginär werden kann, so ist jeder Punct der geraden Linie LN nothwendig der Mittelpunct eines reellen Ortes zweiter Classe (nicht der reelle Mittelpunct einer imaginären Curve). Aber ist die Curve, die einem beliebig auf LN angenommenen Puncte entspricht, eine Ellipse oder Hyperbel, und welche Lage hat dieselbe in Beziehung auf die vier gegebenen geraden Linien? Fig. 18.

Aus der 521. Nummer folgt zunächst, dass die Puncte M, M' und M'' jedesmal Uebergänge von Ellipsen zu Hyperbeln anzeigen.

Man überzeugt sich sogleich aus dem Anblick der 18. Figur, dass vom Puncte M'', der Mitte der dritten Diagonalen, aus, nach N hin, die Mittelpuncte solcher Ellipsen liegen, welche die beiden Seiten FD und FE selbst, die beiden Seiten AD und AE aber in ihren Verlängerungen berühren, und dass diese Ellipsen sich einer, nach N hin sich öffnenden, Parabel immer mehr nähern, je weiter der Mittelpunct sich von M'' entfernt. Zwischen M'' und M' liegen die Mittelpuncte eingeschriebener Hyperbeln. Von M' bis M erstrecken sich die Mittelpuncte solcher Ellipsen, die dem Viereck ABFC (im engern Sinne des Wortes) eingeschrieben sind. Von M nach L hin endlich liegen wiederum die Mittelpuncte von eingeschriebenen Hyperbeln.

Wir wollen ferner die Durchschnittspuncte von LN mit den vier gegebenen geraden Linien durch G, H, I und K bezeichnen, und zunächst Puncte von G aus nach L hin zu Mittelpuncten nehmen. Man sieht leicht ein, dass alsdann ein und derselbe Zweig jeder der bezüglichen Hyperbeln von den vier gegebenen geraden Linien berührt wird, und zwar von FD und FE selbst, von AD und AE in ihren Verlängerungen. Dieser Zweig nähert sich der von den vier gegebenen geraden Linien berührten Parabel immer mehr, während der Mittelpunct, von G aus, immer weiter rückt, und also auch der andere Zweig, der innerhalb des Winkels RAG fällt, sich immer weiter entfernt. Wenn wir den Mittelpunct im Puncte G annehmen, so ist die eine gegebene gerade Linie AB Asymptote der bezüglichen Hyperbel. Wenn der Mittelpunct von G aus nach H hin fortrückt, so berührt ein Zweig der bezüglichen Hyperbel die drei gegebenen geraden Linien FE, FT und ES, ähnlich wie eben, und der andere Zweig die vierte gegebene gerade Linie AU auf derselben Seite, nach welcher hin der Punct R liegt. Wenn wir den Mittelpunct im Puncte H annehmen, so ist AE Asymptote. Wenn der Mittelpunct zwischen H und M fällt, so fallen die beiden Zweige der bezüglichen Hyperbel in die beiden Winkel RAU und DFE und berühren die Schenkel dieser Winkel.

Wir sehen ferner leicht ein, dass, wenn wir den Mittelpunct zwischen M'' und K annehmen, AD und FD den einen, AE und FE den andern Zweig der bezüglichen Hyperbel berühren, und zwar so, dass jener Zweig innerhalb des Winkels ADT, und

Digitized by Google

dieser innerhalb des Winkels AEV liegt. Wenn wir den Punct K zum Mittelpunct nehmen, so wird DC Asymptote. Wenn der Mittelpunct zwischen K und I angenommen wird, so berührt ein Zweig der bezüglichen Hyperbel die drei Seiten FE, FT und ES, der andere berührt AD auf derjenigen Seite, nach welcher hin der Punct R liegt. Wenn der Mittelpunct mit I zusammenfällt, so ist BE Asymptote. Wenn endlich der Mittelpunct zwischen I und M' fällt, so berührt ein Zweig der bezüglichen Hyperbel FT und ES und liegt innerhalb des Winkels TCS, der andere Zweig berührt AD und BF und liegt innerhalb des Winkels ABW.

Wir erhalten also, indem wir zusammenfassen:

1) ein nach einer Seite hin unbegränztes Segment, GL, für den Ort der Mittelpuncte solcher Hyperbeln, deren ein und derselbe Zweig von den vier gegebenen geraden Linien berührt wird;
2) zwei Segmente, GH und IK, welche die Mittelpuncte solcher Hyperbeln enthalten, deren ein Zweig eine bestimmte gegebene gerade Linie, nemlich diejenige, welche das eben genannte Segment GL begränzt, berührt, und deren anderer Zweig die drei übrigen gegebenen geraden Linien berührt;
3) drei Segmente, HM, MI und KM'', welche die Mittelpuncte solcher Hyperbeln enthalten, deren ein Zweig irgend zwei der vier gegebenen geraden Linien und deren anderer Zweig die beiden übrigen berührt; (Die drei Segmente beziehen sich auf die drei möglichen Combinationen von vier geraden Linien zu zwei und zwei.)
4) ein Segment, MM', Ort der Mittelpuncte derjenigen Ellipsen, welche dem von den gegebenen geraden Linien gebildeten Viereck, ohne einspringende Winkel, im engern Sinne des Wortes, eingeschrieben sind;
5) endlich ein nach einer Seite hin unbegränztes Segment, M''N, Ort für die Mittelpuncte derjenigen Ellipsen, welche die Seiten jenes Vierecks in ihren Verlängerungen berühren.

Wir bemerken beiläufig, dass immer durch ein Puncten-System hindurch eine Ellipse in eine solche Hyperbel übergeht, deren beide Zweige die vier gegebenen geraden Linien, paarweise genommen, berühren.

Die letzten Resultate erhalten nur leichte Modificationen in dem Falle, dass eine Diagonale der von den vier gegebenen geraden Linien gebildeten vierseitigen Figur von einer zweiten Diagonalen halbirt wird. Diese zweite Diagonale halbirt alsdann auch die dritte Diagonale und ist der geometrische Ort für die Mittelpuncte der eingeschriebenen Oerter zweiter Classe. Die unter 2) bezeichneten beiden Segmente verschwinden also, oder reduciren sich vielmehr auf zwei Puncte. Jeder dieser beiden Puncte ist der Mittelpunct einer solchen Curve zweiter Classe, welche die beiden in demselben sich schneidenden gegebenen geraden Linien zu Asymptoten hat und die beiden übrigen berührt.

Fig. 19. 641. Wenn zwei Seiten eines einer Curve zweiter Classe umschriebenen Vierecks in ein und dieselbe gerade Linie zusammenfallen, so erhalten wir, statt des Vierecks, ein umschriebenes Dreieck und auf einer Seite desselben den Berührungspunct. Wenn ein solches Dreieck ADC und auf einer Seite desselben der Berührungspunct F gegeben ist, so erhält man den geometrischen Ort für die Mittelpuncte aller eingeschriebenen Curven zweiter Classe, wenn man AF zieht und die beiden Mitten von AF und CD, die Puncte M und M', durch eine gerade Linie LN verbindet. Wenn man sich die 19. Figur aus der 18. dadurch entstanden denkt, dass BE um den Punct F so lange sich dreht, bis B

Digitized by Google

und D, C und E zusammenfallen, so sieht man, wie alsdann die drei Segmente M'I, IK und KM'' verschwinden. Den übrig bleibenden fünf Segmenten entsprechen, wenn wir von L nach N vorwärts gehen, der Ordnung nach, die Mittelpuncte 1. von Hyperbeln, deren ein Zweig AD und AC, in ihren Verlängerungen, und DC in F berührt; 2. von Hyperbeln, deren ein Zweig DC in F und CS und deren anderer Zweig AD berührt; 3. von Hyperbeln, deren ein Zweig die Schenkel des Winkels RAG, und deren anderer Zweig DC in F berührt; 4. von Ellipsen, die dem Dreiecke eingeschrieben sind und 5. endlich von Ellipsen, welche DC in F und AD und AC in ihren Verlängerungen berühren.

Wenn alle Curven zweiter Classe die drei Seiten eines gegebenen Dreiecks ADC, und zwar die eine derselben, AC, in einem gegebenen Puncte E ihrer Verlängerung, berühren, so erhalten wir, ähnlich wie eben, den geometrischen Ort für die Mittelpuncte solcher Curven, indem wir durch die beiden Mitten von AC und DE, durch die Puncte M' und M'', die gerade Linie LN legen. Wir können uns die bezügliche 20. Figur aus der 18. dadurch entstanden denken, dass die gerade Linie EB in der letztgenannten Figur sich so lange um den Punct E dreht, bis sie mit EA zusammenfällt. Alsdann vereinigen sich die vier Puncte H, M, M' und I in dem Puncte M der 20. Figur. Wir erhalten also hier wiederum, indem wir vom Puncte L zum Puncte N fortschreiten, fünf Segmente. Diesen entsprechen, der Ordnung nach, die Mittelpuncte 1. von Hyperbeln, deren ein und derselbe Zweig die drei gegebenen Seiten des Dreiecks, und zwar CD selbst, die beiden übrigen aber in ihren Verlängerungen berührt, und deren anderer Zweig innerhalb des Winkels RAG liegt; 2. von Hyperbeln, deren ein Zweig die Seite DA in ihrer Verlängerung, über A hinaus, berührt, und deren anderer Zweig innerhalb des Winkels DCE liegt und die Schenkel desselben berührt; 3. von Hyperbeln, deren ein Zweig die Seite AD selbst, und deren anderer Zweig die Seiten AC und DC in ihren Verlängerungen, über C hinaus, berührt; 4. von Hyperbeln, deren ein Zweig innerhalb des Winkels ADT liegt und die Schenkel desselben berührt, und deren anderer Zweig AE in E berührt und unterhalb dieser geraden Linie sich erstreckt; 5. von Ellipsen, welche die Seite DC selbst und die beiden Seiten AD und AC in ihren Verlängerungen berühren.

Wenn wir zu Curven übergehen, welche sich in demselben Puncte dreipunctig osculiren, und überdiess eine gegebene gerade Linie berühren, so reduciren sich jene fünf Segmente auf drei. (Indem wir z. B. in der 19. Figur AC und DC zusammenfallen lassen, verschwinden die beiden Segmente HM und MM'). Zweien dieser drei Segmente entsprechen immer Hyperbeln und einem Ellipsen.

Wenn endlich alle Curven sich in demselben Puncte vierpunctig osculiren, so liegen auf der einen Seite dieses Punctes die Mittelpuncte der Ellipsen, auf der andern Seite die Mittelpuncte der Hyperbeln. Von den ursprünglichen acht Segmenten sind nur die beiden äussersten geblieben.

642. Die Resultate der 639. Nummer bestehen auch, nur mit Modificationen, die sich von selbst darbieten, wenn die vier gegebenen geraden Linien alle oder zum Theil zusammenfallen. Wir wollen hier beispielsweise die Construction folgender Aufgabe geben:

Digitized by Google

Eine gleichseitige Hyperbel zu beschreiben, welche irgend eine gegebene Ellipse oder Hyperbel in einem gegebenen Puncte vierpunctig osculirt.

Die drei Kreise, welche, in dem Falle der 18. Figur, sich in Q und Q' schneiden, reduciren sich im vorliegenden Falle offenbar auf den gegebenen Osculationspunct. Beschreibt man daher aus dem Mittelpuncte der gegebenen Curve, als Mittelpuncte, und mit einem Radius, dessen Quadrat der Summe der Quadrate der beiden halben Axen der Curve gleich ist, einen Kreis, so ist der Mittelpunct der verlangten Hyperbel der zugeordnete Pol des gegebenen Osculationspunctes, in Beziehung auf den eben bestimmten Kreis. Die Aufgabe gestattet nur eine, immer reelle, Auflösung und auch in dem Falle, dass dieser Kreis imaginär wird, wenn nemlich die gegebene Curve eine Hyperbel und ihr Asymptoten-Winkel grösser als $\frac{1}{2}\pi$ ist, bietet sich sogleich eine Construction jenes zugeordneten Poles dar (124, 130). Wenn die gegebene Curve selbst eine gleichseitige Hyperbel ist, so fällt mit derselben die gesuchte gleichseitige Hyperbel zusammen. —

643. Wenn fünf gerade Linien gegeben sind, so bestimmen dieselben fünf verschiedene vierseitige Figuren, und da nur eine einzige Curve zweiter Classe von fünf gegebenen geraden Linien berührt wird, so erhält man unmittelbar fünf Puncten-Paare, die auf dem Umfange ein und desselben Kreises liegen, desjenigen Kreises nemlich, auf welchem sich irgend zwei, auf einander senkrechte, Tangenten jener Curve schneiden. Wenn die gegebenen geraden Linien theilweise zusammenfallen, so ergeben sich einfache Modificationen. Wir erhalten zum Beispiel folgenden Satz, wenn wir zugleich auf den letzten Satz der 292. Nummer Rücksicht nehmen.

Wenn ein Dreieck ABC und drei gerade Linien AD, BE und CF, welche von den drei Winkelpuncten des Dreiecks nach den gegenüberliegenden Seiten gehen und in demselben Puncte sich schneiden, gegeben sind, und man beschreibt Kreise über den Dreiecks-Seiten BC, AC und AB, und über den gegebenen geraden Linien, so schneiden sich diese Kreise, paarweise genommen, in dreimal zwei Puncten, die auf dem Umfange eines neuen Kreises liegen. Wenn man ferner über den Seiten, FE, FD und DE, des dem gegebenen Dreieck eingeschriebenen Dreiecks DEF drei neue Kreise beschreibt, so sind die Winkelpuncte des gegebenen Dreiecks A, B und C Chordalpuncte dieser drei Kreise und desjenigen Kreises, auf welchem jene dreimal zwei Durchschnittspuncte liegen.

644. Für den Fall der Parabel reducirt sich die Gleichung (2) der 639. Nummer auf:

$$2Dy+2Bx = F+C, \qquad (3)$$

und stellt die Directrix derselben dar (483). Also:

Die Directricen aller Parabeln, welche drei gegebene gerade Linien berühren, gehen durch einen festen Punct.

Mit den Parabeln, welche die drei Seiten eines gegebenen Dreiecks berühren, gehören auch drei Systeme von zwei Puncten, von welchen einer ein Winkelpunct des gegebenen Dreiecks ist, und der andere, nach der Richtung der gegenüberstehenden Seite hin, unendlich weit liegt, zusammen. Die Directrix eines solchen Puncten-Systems ist das vom Winkelpuncte des Dreiecks auf die gegenüberliegende Seite gefällte Perpendikel. Es folgt diess aus Gränz-Betrachtungen in der Construction, oder auch aus der Glei-

Digitized by Google

chung (3), wenn man dieselbe für ein solches Puncten-System, bezogen auf ein schickliches Coordinaten-System, umformt. Also:

Die drei von den Winkelpuncten eines gegebenen Dreiecks auf die gegenüberliegenden Seiten desselben gefällten Perpendikel schneiden sich in ein und demselben Puncte. Durch diesen Punct gehen die Directricen aller Parabeln, welche die drei Seiten des gegebenen Dreiecks berühren.

Da vier gegebene gerade Linien vier verschiedene Dreiecke bestimmen, und nur eine einzige Parabel berühren, so ergibt sich folgender Satz:

Die vier Kreuzungspuncte der von den Winkelpuncten auf die gegenüberliegenden Seiten gefällten Perpendikel in solchen vier Dreiecken, welche von vier gegebenen geraden Linien gebildet werden, liegen in gerader Linie. Diese gerade Linie ist die Directrix derjenigen Parabel, welche die vier gegebenen geraden Linien berührt.

Hiernach können wir leicht die Directrix einer Parabel construiren, wenn vier Tangenten derselben gegeben sind. Wir erhalten dieselbe aber auch noch auf einem andern Wege. Denn wenn wir uns auf die 18. Figur beziehen, in welcher AD, AE, DC und BE die vier gegebenen geraden Linien sind, so ist QQ' die in Rede stehende Directrix. Fig. 18

Wenn die Directrix bekannt ist, so erhalten wir unmittelbar noch vier neue Tangenten, welche auf den gegebenen in ihren Durchschnitten mit der Directrix senkrecht stehen. Wir erhalten ferner auch vier gerade Linien, welche alle durch den Brennpunct gehen. Zwei derselben sind in der 18. Figur Zf und Wf, welche dadurch bestimmt sind, dass die Winkel

$$Q'ZC = fZC, \qquad QWB = fWB.$$

Eine Parabel zu beschreiben, die eine gegebene Curve zweiter Classe in einem gegebenen Puncte vierpunctig osculirt.

Man erhält die Directrix der verlangten Parabel, wenn man einen Kreis beschreibt, dessen Mittelpunct der Mittelpunct der gegebenen Curve ist, und dessen Radius einer solchen Chorde dieser Curve gleich ist, welche einen Scheitel ihrer grossen Axe mit einem Scheitel ihrer kleinen Axe verbindet, und dann die Chordale dieses Kreises und des gegebenen Osculationspunctes sucht (102). Wenn man die beiden halben Axen der gegebenen Curve A und B, und denjenigen halben Durchmesser derselben, der durch den Osculationspunct geht, C nennt, so erhält man für den Abstand der Directrix von dem Mittelpuncte der gegebenen Curve sogleich folgenden Ausdruck:

$$\frac{A^2+B^2+C^2}{2C}.$$

Es reducirt sich dieser Ausdruck für den Fall der gleichseitigen Hyperbel auf $\frac{1}{2}C$. Die Directrix derjenigen Parabel also, welche eine gegebene gleichseitige Hyperbel in einem gegebenen Puncte vierpunctig osculirt, halbirt den durch diesen Punct gehenden Halbdurchmesser und steht auf demselben senkrecht. Hiernach ergibt sich auch die Construction folgender Aufgabe:

Eine gleichseitige Hyperbel zu beschreiben, die eine gegebene Parabel in einem gegebenen Puncte vierpunctig osculirt.

Wenn wir den Mittelpunct der Hyperbel direct suchen, so ergibt sich ebenfalls sogleich, dass er eben so weit von der Directrix der gegebenen Parabel entfernt ist, als der gegebene Osculationspunct, und dass die gerade Linie, welche diese beiden Puncte verbindet, auf der Directrix senkrecht steht. Denn diese Directrix ist die Chordale

solcher Kreise, deren beide Chordalpuncte jene beiden Puncte sind. Zugleich ergibt sich folgender Satz:

Die Mittelpuncte aller gleichseitigen Hyperbeln, welche eine gegebene Parabel berühren, liegen auf einer zweiten Parabel, die mit der gegebenen denselben Parameter und dieselbe Directrix hat, sich aber nach entgegengesetzter Seite hin öffnet.

645. Nach der 481. Nummer stellt die Gleichung:

$$By+Dx-E = 0, \qquad (4)$$

wenn wir wiederum annehmen, dass die bezügliche Curve eine Parabel ist, diejenige gerade Linie dar, welche die Berührungspuncte auf den beiden, den Coordinaten-Axen parallelen, Tangenten verbindet. Diese gerade Linie geht, bei der Voraussetzung rechtwinkliger Coordinaten, durch den Brennpunct der Parabel, und ist also durch diesen Brennpunct und den Berührungspunct auf der, einer Axe, etwa der ersten, parallelen Tangente vollkommen bestimmt. Folgende Gleichung:

$$2(Dy-Bx)+C-F = 0, \qquad (5)$$

stellt unter denselben Voraussetzungen eine andere gerade Linie dar, welche auf der bestimmten im Brennpuncte senkrecht steht (482). Da die Richtung der ersten Axe jede beliebige sein kann und in den vorstehenden beiden Gleichungen (4) und (5) die Coefficienten aus der Gleichung der bezüglichen Parabel nur auf lineare Weise vorkommen, so gelangen wir zu folgenden Sätzen:

Wenn man an solche Parabeln, welche die drei Seiten eines gegebenen Dreiecks berühren, Tangenten legt, die einer gegebenen geraden Linie parallel sind, so gehen diejenigen geraden Linien, welche in den verschiedenen Parabeln den Berührungspunct auf der, jener gegebenen geraden Linie parallelen, Tangente mit dem Brennpuncte verbinden, durch ein und denselben Punct. Ferner gehen auch diejenigen geraden Linien, welche auf den eben bezeichneten in den bezüglichen Brennpuncten senkrecht stehen, durch ein und denselben Punct.

Um die beiden festen Puncte, in welchen sich die geraden Linien (4) und (5) schneiden, und die wir Q und Q′ nennen wollen, zu construiren, wollen wir das System eines Winkelpunctes des gegebenen Dreiecks und eines nach der Richtung der gegenüberliegenden Seite hin unendlich weit liegenden Punctes durch die Gleichung:

$$w(Bv+Du) = 0,$$

darstellen und dieses Puncten-System, als mit jenen Parabeln zusammengehörend, betrachten. Der Gleichung (4) entspricht alsdann folgende:

$$By+Dx = 0,$$

woraus man sieht, dass die bezügliche gerade Linie durch jenen Winkelpunct des gegebenen Dreiecks geht und mit der ersten Coordinaten-Axe dieselben Winkel, als die gegenüberliegende Seite des Dreiecks, bildet, ohne derselben parallel zu sein. Die bezügliche gerade Linie (5):

$$Dy-Bx = 0,$$

steht auf der eben bestimmten geraden Linie senkrecht im Anfangspuncte der Coordinaten. Also:

Wenn irgend ein Dreieck gegeben ist, und überdiess eine gerade Linie (der Richtung nach) und man legt durch jeden Winkelpunct des Dreiecks eine solche gerade Linie, die von der gegebenen unter denselben Winkeln geschnitten wird, als die dem Winkelpuncte des gegebenen Dreiecks gegenüberliegende Seite, so erhält man drei

Digitized by Google

gerade Linien, welche durch ein und denselben Punct R gehen. Man erhält noch drei andere, durch denselben Punct R' gehende gerade Linien, wenn man auf den drei eben bezeichneten in den drei Winkelpuncten des gegebenen Dreiecks drei Perpendikel errichtet.

Wenn die gegebene gerade Linie senkrecht auf derjenigen steht, welche den Scheitel-Winkel eines gegebenen, einer Parabel umschriebenen, Dreiecks halbirt, so ist offenbar der Scheitelpunct dieses Winkels der Punct R. Wenn also das gegebene Dreieck ein gleichschenkliges ist, so ist jene gerade Linie der Basis desselben parallel. Der Berührungspunct auf der Basis, der gegenüberliegende Winkelpunct und der Brennpunct der Parabel liegen also in gerader Linie. Betrachten wir, statt des gleichschenkligen Dreiecks, ein gleichseitiges, so erhalten wir insbesondere den nachstehenden bekannten Satz:

Wenn irgend eine Parabel die drei Seiten eines gleichseitigen Dreiecks berührt, so schneiden sich diejenigen drei geraden Linien, welche die Winkelpuncte des Dreiecks mit den Berührungspuncten auf den gegenüberliegenden Seiten desselben verbinden, in dem Brennpuncte der Parabel.

Wenn wir die Richtung der gegebenen geraden Linie um einen rechten Winkel verändern, so vertauschen sich offenbar die beiden Puncte R und R' unter einander. Der geometrische Ort für die Puncte R und R', wenn wir der gegebenen geraden Linie nach einander alle möglichen Richtungen geben, ist also ein und derselbe, er enthält die drei Winkelpuncte des umschriebenen Dreiecks und ist kein anderer als der diesem Dreiecke umschriebene Kreis. Wenn man nemlich von irgend einem Puncte S des in Rede stehenden Ortes drei gerade Linien nach den drei Winkelpuncten des Dreiecks zieht, so resultirt ein Viereck mit seinen beiden Diagonalen, und wenn man die Winkel, welche die gegenüberliegenden Seiten des Vierecks, gehörig verlängert, und die beiden Diagonalen desselben mit einander bilden, durch gerade Linien halbirt, so erhält man sechs solcher Linien, von denen drei auf den drei übrigen senkrecht stehen und unter einander parallel sind. Durch diese zwei mal drei Parallellinien sind solche Richtungen bestimmt, zu welchen der Punct S als Punct R und R' gehört. Die eben erwähnte Eigenschaft des Punctes S kommt demselben aber nur dann zu, wenn derselbe, mit den drei Winkelpuncten des Dreiecks, auf dem Umfange ein und desselben Kreises liegt: eine Folgerung, welche sich unmittelbar aus der 293. Nummer ergibt.

Der geometrische Ort für die Puncte R und R' ist zugleich also auch der geometrische Ort für die Brennpuncte aller eingeschriebenen Parabeln (620). Wenn der Brennpunct einer Parabel und zwei Tangenten derselben gegeben sind, so kann man hiernach leicht beliebig viele Tangenten derselben bestimmen. Man begegnet hierbei folgendem Satze:

Wenn zwei gerade Linien und ein Punct gegeben sind, und man beschreibt beliebige Kreise, welche durch diesen Punct und durch den Durchschnitt jener beiden geraden Linien gehen, und dieselben überdiess also noch in irgend zwei Puncten schneiden, so umhüllen diejenigen geraden Linien, die durch diese jedesmaligen beiden Durchschnitte gehen, ein und dieselbe Parabel, welche die beiden gegebenen geraden Linien berührt und den gegebenen Punct zum Brennpuncte hat.

Wir würden uns zu weit von unserm eigentlichen Gegenstande entfernen, wenn wir die vorstehenden Erörterungen hier nicht abbrächen. —

§. 10.

Construction verschiedener Aufgaben.

646. *In ein gegebenes Parallelogramm eine Ellipse zu beschreiben, welche mit einem gegebenen Kreise gleichen Inhalt hat.*

Nach der 534. Nummer können wir, indem wir die Coordinaten-Axen den Seiten des gegebenen Parallelogramms parallel nehmen, alle diesem Parallelogramme eingeschriebene Curven zweiter Classe durch folgende Gleichung darstellen:

$$Aw^2+2Bvw+Cv^2+2Duw+2Euv+Fu^2 = o, \qquad (1)$$

wenn wir in dieser Gleichung den Coefficienten E unbestimmt lassen. Wir können ferner A = 1 und, indem wir den Mittelpunct des gegebenen Parallelogramms zum Anfangspuncte der Coordinaten nehmen, B = D = o setzen. Alsdann ist C gleich dem, mit negativem Zeichen genommenen, Quadrate der Hälfte einer derjenigen beiden Seiten des Parallelogrammes, welche der ersten Coordinaten-Axe parallel sind und F gleich dem, mit negativem Zeichen genommenen, Quadrate der Hälfte einer der beiden übrigen Seiten.

Die Grösse der, der ersten und zweiten Coordinaten-Axe parallelen, Seiten des gegebenen Parallelogrammes wollen wir s und t, die Winkel desselben ϑ und $(\pi-\vartheta)$ und endlich den Radius desjenigen Kreises, mit welchem die demselben eingeschriebene Curve (1) gleichen Inhalt haben soll, r nennen. Alsdann ergibt sich nach der 511. Nummer:

$$r^4 = (CF-E^2)\sin^2\vartheta, \qquad (2)$$

mithin:

$$E^2 = CF-\frac{r^4}{\sin^2\vartheta} = \frac{s^2t^2\sin^2\vartheta-r^4}{\sin^2\vartheta} = \frac{\Delta^2-r^4}{\sin^2\vartheta} = \frac{(\Delta+r^2)(\Delta-r^2)}{\sin^2\vartheta},$$

wenn wir den Inhalt des gegebenen Parallelogrammes, der Kürze halber, 4Δ nennen. Wir erhalten also für E zwei gleiche und entgegengesetzte Werthe. Diesen beiden Werthen von E entsprechen zwei verschiedene Ellipsen; in jeder derselben können wir sogleich zwei Paar zugeordneter Durchmesser bestimmen, und wenn diese bekannt sind, die beiden Axen derselben. Derjenige Durchmesser nemlich, dessen zugeordneter in die zweite Coordinaten-Axe fällt, schneidet in denjenigen Punct der auf der positiven Seite der x liegenden, jener Axe parallelen, Seite des gegebenen Parallelogramms ein, dessen Ordinate gleich ist:

$$s.\frac{E}{C} = -\frac{E}{s}.$$

Derjenige Durchmesser ferner, dessen zugeordneter in die erste Coordinaten-Axe fällt, schneidet die nach der positiven Seite der y liegende Seite des gegebenen Parallelogramms in demjenigen Puncte, dessen Abscisse gleich ist:

$$t.\frac{E}{F} = -\frac{E}{t}.$$

Aus der 498. Nummer endlich und aus der Note zur 623. Nummer folgt, „dass irgend drei Paare zugeordneter Durchmesser einer Curve zweiter Classe, eine Involution von sechs geraden Linien bilden.“ Die Bestimmung der Richtung der beiden Axen der Curve, wenn zwei Paare zugeordneter Durchmesser derselben der Richtung nach gegeben sind, kommt also darauf hinaus, wenn vier durch denselben Punct gehende gerade Linien gegeben sind, zwei andere solche gerade Linien zu finden, die auf einander senkrecht stehen und mit jenen eine Involution bilden. (Vergl. die oben angezogene Note IV).

Digitized by Google

Aus dem Vorstehenden ziehen wir zugleich die Folgerung, dass in den beiden, den Bedingungen der Aufgabe entsprechenden Ellipsen diejenigen beiden Durchmesser, deren zugeordnete einer Seite des gegebenen Parallelogramms parallel sind, diese Seite (wie jede der übrigen Seiten des Parallelogramms) in solchen zwei Puncten schneiden, die gleich weit von den auf dieser Seite liegenden Winkelpuncten abstehen.

Die letzte Aufgabe hat nur dann reelle Auflösungen, wenn

$$r^2 < \Delta,$$

das heisst, wenn der Inhalt eines dem gegebenen Kreise umschriebenen Quadrates kleiner ist, als der Inhalt des gegebenen Parallelogramms.

In ein gegebenes Parallelogramm diejenige Ellipse zu beschreiben, welche den grösstmöglichsten Inhalt hat.

Dem grössten Werthe von r^4, der sich ergibt, wenn wir nach einander für E in (2) verschiedene Werthe substituiren, entspricht:

$$E = 0.$$

Zwei zugeordnete Durchmesser der verlangten Ellipse sind den Seiten des gegebenen Parallelogramms parallel. Der Inhalt jener grössten Ellipse verhält sich zum Inhalte dieses Parallelogramms wie $\pi : 4$.

647. *In ein gegebenes Parallel-Trapez eine Ellipse zu beschreiben, deren Inhalt dem Inhalte eines gegebenen Kreises gleich ist.*

Wenn wir denjenigen Punct, in welchen sich die beiden nicht parallelen Seiten des gegebenen Parallel-Trapezes schneiden, zum Anfangspuncte der Coordinaten, und die erste Axe parallel mit den beiden übrigen Seiten nehmen, so können wir alle dem Parallel-Trapeze eingeschriebene Curven zweiter Classe durch folgende Gleichung darstellen:

$$Aw^2+2Bvw+Cv^2+2Duw+2Euv+Fu^2 = 0,$$

indem wir in dieser Gleichung alle Coefficienten, B ausgenommen, als ein für alle Mal gegeben betrachten (534). Wenn der Inhalt einer solchen Curve gleich ist dem Inhalte eines Kreises, dessen Radius gegeben und gleich r ist, so kommt, indem wir, der Kürze halber, $A = 1$ setzen (511):

$$r^4 = [-FB^2+2EDB+(CF-E^2-CD^2)]\sin^2\vartheta.$$

Diese Gleichung ist, in Beziehung auf B, vom zweiten Grade; es gibt also, im Allgemeinen, zwei Ellipsen von gegebenem Inhalte, welche die Seiten des gegebenen Parallel-Trapezes berühren. Die Bestimmung der beiden Werthe von B können wir noch dadurch erleichtern, dass wir E gleich Null setzen, das heisst, die zweite Coordinaten-Axe, über deren Richtung durchaus keine Voraussetzung Statt findet, so legen, dass sie zur ersten Axe und den beiden nicht parallelen Seiten des gegebenen Parallel-Trapezes, als vierte Harmonicale, gehört, und also die beiden unter sich und mit der ersten Axe parallelen Seiten halbirt. Alsdann geht die letzte Gleichung in folgende über:

$$r^4 = -[FB^2-C(F-D^2)]\sin^2\vartheta,$$

und wird also, in Beziehung auf B, eine rein quadratische. Indem wir uns auf die 21. Figur beziehen, und $OY'' = y''$, $OY' = y'$, $RS = 2m$, $PQ = 2n$ setzen, erhalten wir:

$$D = \tfrac{1}{2}[y'+y''], \qquad F = y'y'',$$

$$\frac{F}{C} = -\left(\frac{m}{\overline{y''}}\right)^2 = -\left(\frac{n}{\overline{y'}}\right)^2, \qquad C = -mn,$$

und mithin

$$y'y''B^2 = \tfrac{1}{4}y'y''(n-m)^2 - \frac{r^4}{\sin^2\vartheta}. \qquad (6)$$

Hiernach ergehen sich leicht die beiden Werthe von B, nnd somit die Mittelpnncte der verlangten Ellipsen. Sollen diese Ellipsen reell sein, so muss, wenn, wie in der 21. Figur, y' und y'' im Zeichen übereinstimmen, folgende Bedingung Statt finden:

$$r^4 < \tfrac{1}{4}y'y''(n-m)^2\sin^2\vartheta.$$

Der Inhalt der grösstmöglichsten Ellipse ist hiernach gleich:

$$\tfrac{1}{2}n\sqrt{y'y''}.(n-m)\sin\vartheta = \tfrac{1}{2}n\sqrt{mn}.(y'-y'')\sin\vartheta, \qquad (7)$$

nnd dieser grössten Ellipse entspricht:

$$B = 0.$$

Auf diese Weise gelangen wir zu den nachstehenden Sätzen:

Der Mittelpunct derjenigen Ellipse, welche einem gegebenen Parallel-Trapez eingeschrieben ist und den grösstmöglichsten Inhalt hat, ist der Durchschnittspunct derjenigen beiden geraden Linien, welche die Mitten der beiden Paare gegenüberliegender Seiten verbinden.

Solche eingeschriebene Ellipsen, deren Mittelpuncte gleich weit von dem Mittelpuncte dieser grössten Ellipse entfernt liegen, haben gleichen Inhalt.

Aus dem letzten der beiden vorstehenden Sätze folgt, da für die beiden Diagonalen, als Oerter zweiter Classe betrachtet, der Ausdruck, den wir gleich r^4 gesetzt haben, verschwindet, dass wir den Mittelpunct der eingeschriebenen Ellipse von grösstmöglichstem Inhalte auch dadurch erhalten, dass wir die Mitten der beiden Diagonalen durch eine gerade Linie verbinden nnd diese gerade Linie halbiren. Für die Mitten dieser Diagonalen erhalten wir $B(= x) = \pm\tfrac{1}{2}(n-m)$, indem wir in (6) $r = 0$ setzen. Uebersehreitet der Werth von B diese Gränzen, so wird r^2 imaginär, und wir erhalten keine Ellipsen mehr, sondern Hyperbeln. In diesen Hyperbeln ist alsdann $r^2\sqrt{-1}$ gleich dem Inhalte irgend eines beliebigen Dreiecks, das durch eine beliebige Tangente von dem Asymptoten-Winkel abgeschnitten wird (532).

Fig. 22. Wann y' und y'' nicht dasselbe Zeichen haben, so kann das gegebene Parallel-Trapez kein gewöhnliches sein, sondern die beiden nicht parallelen Seiten müssen sich, wie in der 22. Figur, nothwendig schneiden. Alsdann wird, für $B = 0$, der Inhalt der bezüglichen Curve zweiter Classe imaginär, diese Curve ist eine Hyperbel und zwar diejenige, in welcher ein, durch eine beliebige Tangente von dem Asymptoten-Winkel abgeschnittenes Dreieck den grösstmöglichsten Inhalt hat. Der Inhalt dieses Dreiecks nimmt ab, bis er für $B = \pm(n-m)$ verschwindet. Wenn B diese Gränzen überschreitet, so sind die entsprechenden Curven Ellipsen, deren Inhalt von Null bis ins Unendliche wachsen kann.

Fig. 21. Der Inhalt des gegebenen Parallel-Trapezes (Fig. 21) ist gleich $(y'-y'')(n+m)\sin\vartheta$, und mithin verhält sich derselbe zum Inhalte der grössten eingeschriebenen Ellipse (6) wie

$$2(n+m) : \quad n\sqrt{mn}.$$

648. *Eine Ellipse zu beschreiben, die irgend vier gegebene gerade Linien berührt, und mit einem gegebenen Kreise gleichen Inhalt hat.*

Wenn wir den Durchschnittspnnct von irgend zwei der vier gegebenen geraden Linien zum Anfangspnncte der Coordinaten nehmen, die erste Coordinaten-Axe zugleich durch den Durchschnittspunct der beiden übrigen gegebenen geraden Linien, dessen

Digitized by Google

Abstand von dem ersten Durchschnittspuncte wir 2a nennen wollen, legen, und die Richtung der zweiten Coordinaten-Axe so bestimmen, dass dieselbe mit derjenigen geraden Linie, welche der geometrische Ort für die Mittelpuncte aller, die vier gegebenen geraden Linien berührenden, Oerter zweiter Classe ist, so können wir alle diese Curven durch folgende Gleichung: Fig. 23.

$$Aw^2+2Bvw+Cv^2+2Duw+2Euv+Fu^2 = 0, \qquad (1)$$

darstellen, wenn die beiden, übrigens beliebig anzunehmenden, Coefficienten, A und B, folgender Bedingungs-Gleichung Genüge leisten:

$$B = aA, \qquad (2)$$

und die übrigen Coefficienten, oder vielmehr die Quotienten je zweier derselben, ein für alle Mal gegeben sind (538). Wenn wir den Radius des gegebenen Kreises wiederum durch r bezeichnen und der Inhalt des Kreises dem Inhalte der Curve (1) gleich sein soll, so erhalten wir (511):

$$\frac{(CD^2+AE^2-2EBD-ACF+FB^2)\sin^2\vartheta}{A^3} = -r^4,$$

oder, indem wir für B seinen Werth substituiren:

$$\frac{(CD^2+A(E^2-2DEa-CF)+A^2Fa^2)\sin^2\vartheta}{A^3} = -r^4. \qquad (3)$$

Da $\frac{D}{A}$ die Ordinate des Mittelpunctes der bezüglichen Curve ist, so bedeutet, wenn wir, was erlaubt ist, D = 1 setzen, A der reciproke Werth dieser Ordinate, die wir y nennen wollen. Hiernach verwandelt sich die letzte Gleichung in folgende:

$$Cy^3+(E^2-2Ea-CF)y^2+Fa^2y+\frac{r^4}{\sin^2\vartheta} = 0, \qquad (4)$$

Wenn wir in dieser Gleichung r = 0 setzen, so kommt:

$$Cy^3+(E^2-2Ea-CF)y^2+Fa^2y = 0;$$

eine Gleichung, deren drei Wurzeln die Ordinaten-Werthe der Mitten (M, M′ und M″) der drei Diagonalen der, von den vier gegebenen geraden Linien gebildeten, vollständigen vierseitigen Figur gehen. Bezeichnen wir diese drei Wurzeln, von welchen die eine, als Folge unserer besondern Coordinaten-Bestimmung, gleich Null ist, durch η, η' und η'', so können wir der Gleichung (4) folgende Form geben:

$$C(y-\eta)(y-\eta')(y-\eta'')+\frac{r^4}{\sin^2\vartheta} = 0. \qquad (5)$$

Diese letzte Gleichung bleibt identisch dieselbe, wenn wir die Ordinaten y, η, η' und η'' auf der, die Mittelpuncte aller eingeschriebenen Curven zweiter Classe enthaltenden, geraden Linie, von irgend einem andern Puncte als ihrem Durchschnitte mit der ersten Coordinaten-Axe, etwa vom Puncte N an, rechnen. In dieser Gleichung, durch deren Wurzeln die Mittelpuncte derjenigen Ellipsen, welche den Bedingungen der Aufgabe Genüge leisten, gegeben sind, können wir die Werthe für η, η' und η'' unmittelbar aus der Construction nehmen und es bleibt nur noch C zu bestimmen übrig, während in der Gleichung (4) auch noch E und F zu bestimmen übrig bleiben. Zu diesen Bestimmungen kommen wir ohne Mühe. Denn nach der 538. Nummer geben folgende beide Gleichungen:

$$Cv^2+2Ev+F = 0,$$
$$Cv^2+2(E-2Da)v+F = 0,$$

die Richtungen der, durch den Anfangspunct und den Punct W gehenden, gegebenen

geraden Linien. Bezeichnen wir diese Richtungen durch v' und v'', v''' und v'''', so ist:

$$\frac{v'+v''}{2} = \frac{E}{C}, \qquad \frac{v'''+v''''}{2} = \frac{E-2Da}{C},$$

folglich:

$$\frac{v'+v''}{2} + \frac{v'''+v''''}{2} = 2a\frac{D}{C},$$

oder wenn wir uns auf die Figur beziehen:

$$\frac{M''I+M''H+M''K+M''G}{2a} = 2a\frac{D}{C},$$

und endlich:

$$\frac{M''\mu}{a^2} = \frac{\delta}{a^2} = \frac{D}{C},$$

indem wir den Schwerpunct gleicher Gewichte, die wir in den Durchschnittspuncten der geraden Linie LN mit den vier gegebenen geraden Linien uns angebracht denken, μ nennen und $M''\mu = \delta$ setzen. Es ist ferner:

$$\frac{F}{C} = v'v'' = v'''v'''' = \frac{\varepsilon}{a^2},$$

woraus wir beiläufig sehen, dass

$$M''I.M''H = M''K.M''G = \varepsilon,$$

und endlich:

$$\frac{E}{C} = \frac{v'+v''}{2} = \frac{M''I+M''H}{2a} = \frac{\zeta}{2a}.$$

Wenn wir also, wie in den Gleichungen (4) und (5), D gleich Eins setzen, so kommt:

$$C = \frac{a^2}{\delta}, \qquad 2E = \frac{\zeta a}{\delta}, \qquad F = \frac{\varepsilon}{\delta}.$$

Die letzte der eben genannten beiden Gleichungen verwandelt sich, indem wir für C den vorstehenden Werth substituiren, in folgende:

$$a^2 sin^2\vartheta(y-\eta)(y-\eta')(y-\eta'')+r^4\delta = 0. \qquad (6)$$

Es zeigt diese Gleichung, dass es, im Allgemeinen, drei verschiedene Ellipsen gibt, welche den Bedingungen der obigen Aufgabe Genüge leisten. Man sieht sogleich *a priori*, dass in dem Falle, dass diese Ellipsen alle drei reell sind, die Mittelpuncte zweier derselben zwischen M' und M liegen, und dass der Mittelpunct der dritten von M'' aus nach N hin liegt. Es folgt diess auch aus der letzten Gleichung, welche, wenn wir $\eta'' = 0$ setzen, in folgende übergeht:

$$y^3-(\eta+\eta')y^2+\eta\eta' y+\frac{r^4\delta}{a^2 sin^2\vartheta} = 0.$$

Da alsdann nemlich in der Construction der 23. Figur η, η' und δ positiv sind, so ändern sich in dieser Gleichung von einem Gliede zum folgenden zweimal die Zeichen. Nach einem bekannten Satze sind also, wenn alle Wurzeln reell sind, zwei derselben positiv, und da der Ausdruck:

$$y(y-\eta)(y-\eta'),$$

nothwendig negativ ist, so folgt, dass die positiven Werthe von y beide zwischen η und η' fallen müssen. Da den beiden Puncten M' und M Ellipsen entsprechen, deren Inhalt gleich Null ist, so liegt zwischen M' und M der Mittelpunct einer Ellipse, deren Inhalt ein *maximum* ist. Wenn $r^4\pi$ grösser als dieses *maximum* ist, so werden die beiden positiven Wurzeln der letzten Gleichung imaginär und von den verlangten Ellipsen ist nur eine einzige reell, nemlich diejenige, deren Mittelpunct von M' aus nach N hin liegt.

Digitized by Google

Wenn wir, statt einer Ellipse von gegebenem Inhalte, eine Hyperbel verlangen, in welcher von dem Asymptoten-Winkel durch irgend eine beliebige Tangente ein Dreieck von gegebenem Inhalte, Δ, abgeschnitten wird, so brauchen wir zur Bestimmung des Mittelpunctes einer solchen Hyperbel in den Gleichungen der vorliegenden Nummer bloss $(-r^2)$ mit Δ^2 zu vertauschen. Es gibt also auch, im Allgemeinen, drei solcher Hyperbeln. Die Mittelpuncte zweier derselben liegen zwischen M'' und M', der Mittelpunct der dritten fällt über M hinaus nach L hin. Diejenige Hyperbel, auf die sich ein *maximum* von Δ bezieht, hat einen Punct zwischen M'' und M' zu ihrem Mittelpuncte.

Die Summe der drei Wurzeln der Gleichungen (4) oder (6) und die Summe der Producte je zweier derselben ist von dem gegebenen Inhalte $r^2\pi$ durchaus unabhängig. Die erste dieser beiden Bemerkungen gibt, wenn man zugleich berücksichtigt, dass der Schwerpunct der Fläche einer Ellipse in den Mittelpunct derselben fällt, folgenden Satz.

Die Schwerpuncte der Flächen dreier Ellipsen, welche vier gegebene gerade Linien berühren, und beliebigen, aber gleichen Inhalt haben, ist ein fester Punct, der zugleich auch der Schwerpunct der Mitten der drei Diagonalen der, von den vier gegebenen geraden Linien gebildeten, vierseitigen Figur ist.

649. *In ein gegebenes Viereck diejenige Ellipse zu beschreiben, deren Inhalt der grösstmöglichste ist.* *)

Wenn wir die Gleichung (6), in Beziehung auf die Grössen r und y, welche sich gegenseitig bestimmen, differentiiren und $dr = 0$ setzen, so ergibt sich zur Bestimmung des Mittelpunctes der verlangten Ellipse folgende Gleichung:

$$y^2 - \tfrac{2}{3}(\eta+\eta'+\eta'')y + \tfrac{1}{3}(\eta\eta'+\eta\eta''+\eta'\eta'') = 0. \qquad (7)$$

Wenn wir $\eta+\eta'+\eta'' = 0$ setzen, das heisst, die Abstände auf der geraden Linie NL von demjenigen Puncte an rechnen, welcher der Schwerpunct der Mitten der drei Diagonalen ist und von dem am Ende der vorigen Nummer die Rede war, so sind die Wurzeln der letzten Gleichung folgende:

$$y = \pm\sqrt{-\left[\frac{\eta\eta'+\eta\eta''+\eta'\eta''}{3}\right]} = \pm\sqrt{\left[\frac{\eta^2+\eta\eta'+\eta'^2}{3}\right]}.$$

Der zweite der beiden vorstehenden Ausdrücke für y zeigt, dass diese Wurzeln immer reell bleiben, so lange die vier gegebenen grraden Linien, und demnach η, η' und η'', reell sind. Wenn wir ferner annehmen, dass, wie in der 23. Figur, $\eta > \eta'$ und $\eta' > \eta''$ so folgt, dass der positive Werth von y nothwendig kleiner ist als η und grösser als η', und also auf einen Punct zwischen M' und M sich bezieht. Hieraus und aus den Bemerkungen der vorigen Nummer ist ersichtlich, dass der positive Werth von y dem Mittelpuncte der verlangten Ellipse entspricht, der negative Werth hingegen derjenigen Hyperbel, in welchem von dem Asymptoten-Winkel durch eine beliebige Tangente ein Dreieck abgeschnitten wird, dessen Inhalt der möglichst grösseste ist.

*) Drei Behandlungen dieser Aufgabe befinden sich in VON ZACH'S Monatlicher Correspondenz.

Bestimmung der grössten Ellipse, welche die vier Seiten eines gegebenen Viereeks berührt. Von H. Prof. GAUSS. 1810 August S. 112 — 121. Bestimmung der grössten in ein Viereck, so wie auch in ein Dreieck, zu beschreibenden Ellipse. Von H. Prof. PFAFF in Halle. Sept. S. 223 — 226. In ein gegebenes unregelmässiges Viereck ABCD diejenige Ellipse zu beschreiben, die den möglichst grössten Flächenraum enthält. Von H. Dr. MOLLWEIDE. S. 227 — 234.

Wenn wir die Abstände auf NL von dem Mittelpuncte der eben bestimmten Ellipse oder Hyperbel an rechnen, wodurch eine Wurzel der Gleichung (7) Null wird, so kommt:

$$\eta\eta'+\eta\eta''+\eta'\eta'' = 0,$$

oder, indem wir durch $\eta\eta'\eta''$ dividiren:

$$\frac{1}{\eta''}+\frac{1}{\eta'}+\frac{1}{\eta} = 0:$$

eine Gleichung, welche eine characteristische Eigenschaft dieser Mittelpuncte ausdrückt.

650. Um die Gleichung (5) zu bilden, brauchen wir bloss die Form des Ausdruckes für r^4 und überdiess den Coefficienten C zu kennen; um die Gleichung (7) zu bilden, brauchen wir auch nicht einmal C zu kennen, sondern es ist hinreichend zu wissen, dass r^4 durch eine ganze Function des dritten Grades von y gegeben ist, und dass diese Function für drei bekannte Werthe von y, die aus der Figur sich unmittelbar ergeben, verschwindet. Wir können überhaupt das *maximum* oder *minimum* einer Function einer veränderlichen Grösse bestimmen, wenn wir wissen, dass diese Function eine algebraische ist, und alle diejenigen Werthe der veränderlichen Grösse kennen, für welche die Function verschwindet und unendlich wird. Wenn die Function, wie im vorliegenden Falle, eine ganze ist, so wird dieselbe für keinen endlichen Werth der veränderlichen Grösse unendlich, und zur Bestimmung des *maximum* oder *minimum* derselben brauchen wir nur diejenigen (reellen oder imaginären) Werthe der veränderlichen Grösse zu kennen, für welche die Function verschwindet und die Zahl dieser Werthe wird durch den Grad der Function angezeigt. Zugleich ist vorauszusehen, dass, im Allgemeinen, die Construction desjenigen Werthes der veränderlichen Grösse, für welchen die Function *maximum* oder *minimum* wird, sich leichter construiren lassen werde, wenn wir von denjenigen Werthen der veränderlichen Grössen, als bekannt, ausgehen, für welche die Function verschwindet oder unendlich wird, als von einer Constanten-Bestimmung, die nur in einer entfernteren Beziehung zur jedesmaligen Aufgabe steht.

Auf diese Bemerkung gründet sich die, als ein Muster der analytischen Behandlungsweise gepriesene, oben angeführte GAUSSische Construction der Aufgabe der vorigen Nummer. In der neuen Bestimmung der Curven durch ihre Tangenten erhalten wir den Ausdruck für r^4 auf die möglichst einfache Weise, und um darzuthun, dass dieser Ausdruck für $y = \eta$, $y = \eta'$ und $y = \eta''$ verschwindet, bedarf es hier durchaus keiner Gränz-Betrachtungen, die nothwendig werden beim Gebrauche von Punct-Coordinaten, weil wir durch diese eine Ellipse, die auf eine gerade Linie sich reducirt hat, auf keine Weise durch eine Gleichung des zweiten Grades ausdrücken können.

651. Wenn von den vier gegebenen geraden Linien zwei zusammenfallen, und wir also solche Curven zweiter Classe betrachten, welche einem gegebenen Dreiecke eingeschrieben sind, und eine Seite desselben in einem gegebenen Punkte berühren, so können wir alle diese Curven, gerade wie bisher, noch durch die allgemeine Gleichung (1) darstellen, indem wir die letztgenannte Seite zur ersten Axe, einen anliegenden Winkelpunct zum Anfangspuncte nehmen, und die zweite Axe derjenigen geraden Linie parallel legen, welche durch die Mitte dieser Seite (die wir gleich (2a) setzen) und die Mitte derjenigen geraden Linie geht, welche den gegebenen Berührungspunkt mit dem gegenüberliegenden Winkelpuncte des Dreiecks verbindet. Wir erhalten alsdann nach der 608. Nummer:

$$F = o, \qquad \frac{E}{D} = x,$$

indem wir dorch x die Abscisse des Berührungspunctes bezeichnen, wonach die Gleichong (4) in folgende übergeht:

$$Cy^2+(x^2-2ax)y^2+\frac{r^4}{sin^2\vartheta} = o. \qquad (8)$$

Wenn der gegebene Berührungspunct aof der Dreiecksseite selbst liegt, so fallen (641) die beiden Puncte M'' nnd M' znsammen, nnd zwei solcher eingeschriebenen Hyperbeln, in welchen von dem Asymptoten-Winkel dorch eine beliebige Tangente ein Dreieck von gegebenem Inhalte abgeschnitten wird, sind offenbar imaginär, und es gibt kein *maximum* dieses Inhaltes, oder, mit andern Worten, dieses *maximum* wird gleich Null, indem die bezügliche Hyperbel in zwei Puncte, oder, was dasselbe heisst, in die zwiefache Verlängerong derjenigen Seite des Dreiecks übergeht, welche in die erste Axe fällt. Wenn hingegen der gegebene Berührongspunct auf der Verlängerong der Dreiecksseite liegt, so fallen die beiden Puncte M' und M znsammen und von den drei Ellipsen von gegebenem Inhalte, die, im Allgemeinen, vier gegebene gerade Linie berühren, werden zwei notbwendig imaginär, so lange der gegebene Inbalt nicht gleich Null ist; es gibt kein *maximum* dieses Inbaltes.

Dasselbe folgt aus der letzten Gleichnng. Wir können derselben, indem wir

$$-\frac{x^2-2ax}{C} = \eta$$

setzen, folgende einfachere Form geben:

$$Cy^2(y-\eta)sin^2\vartheta+r^4 = o. \qquad (9)$$

η bedeotet hier offenbar den Abstand der Mitte der in die erste Axe fallenden Dreiecksseite von der Mitte derjenigen geraden Linie; welche den Berührungspunct auf dieser Seite mit dem gegenüberliegenden Winkelpuncte verbindet. Wenn wir die letzte Gleichong, in Beziehung auf r ond y, differentiiren, nnd dr = o setzen, so ergibt sich, in Uebereinstimmung mit (7):

$$y(y-\tfrac{2}{3}\eta) = o.$$

Dem Factor y entspricht die in die erste Coordinaten-Axe fallende Dreiecksseite, oder ibre zwiefache Verlängerung, dem andern Factor $(y-\frac{2}{3}\eta)$ entspricht eine grösste Ellipse, wenn der gegebene Berübrungspunct auf dieser Seite selbst liegt, oder eine Hyperbel, in welcher von dem Asymptoten-Winkel durch eine beliebige Tangente ein Dreieck, dessen Inhalt ein *maximum* ist, abgeschnitten wird, wenn der gegebene Berührungspunct auf der Verlängerung dieser Seite liegt.

Wenn das gegebene Dreieck unverändert dasselbe bleibt, der gegebene Berührungspunct aber aof der Basis desselben oder ihrer Verlängerung (der ersten Coordinaten-Axe) fortrückt, so ändert sich η offenbar so, dass $\eta sin\vartheta$ constant und gleich der halben Höbe des gegebenen Dreiecks bleibt. Nennen wir diese Höhe h, so erhalten wir für das in Rede stebende *maximum*:

$$y sin\vartheta = \tfrac{1}{3}h.$$

Der geometrische Ort für den Mittelpunct der eben bestimmten Ellipse oder Hyperbel, für jede verschiedene Lage des Berührungspunctes auf der Basis des gegebenen Dreiecks, ist also eine, dorch den Schwerpunct des Dreiecks gehende, der Basis parallele, gerade Linie

Aus der Gleichung (9) ergibt sich, wenn wir

$$y^2 sin^2\vartheta = {}^1/_0 h^2, \qquad C(y-\eta) = -{}^1/_3 C\eta = {}^1/_3(x^2-2ax),$$

setzen:

$$r^4 = {}^1/_{27}(2ax-x^2)h^2 = {}^1/_{27}(2a-x)xh^2. \qquad (10)$$

Der Inhalt der grössten eingeschriebenen Ellipse hängt also nur von der Höhe des gegebenen Dreiecks und dem Producte der, durch den gegebenen Berührungspunct auf der Basis desselben bestimmten, beiden Segmenten ab. Wenn man diesen Berührungspunct mit dem gegenüberliegenden Winkelpuncte verbindet, so erhält man zwei Dreiecke, deren Inhalt ${}^1/_2 xh = \Delta'$ und ${}^1/_2(2a-x)h = \Delta''$. Hiernach kommt:

$$r^4 = {}^4/_{27}\Delta'\Delta''.$$

Der Ausdruck für r^4 (10) ist, als Function von x, wiederum eines *maximum* fähig. Diesem entspricht

$$x = a,$$

woraus hervorgeht, dass die grösste Ellipse, welche überhaupt in das gegebene Dreieck beschrieben werden kann, die in die erste Axe fallende Seite desselben, und folglich auch die beiden übrigen Seiten, in ihren Mitten berührt. Der Mittelpunct dieser Ellipse ist also der Schwerpunct des gegebenen Dreiecks. Wenn man den Inhalt dieses Dreiecks Δ''' nennt, so ist:

$$3\sqrt{3}.r^2 = 2\Delta'''.$$

Wir hätten auch, um die grösste Ellipse, welche in das gegebene Dreieck sich beschreiben lässt, zu bestimmen, $y sin\vartheta = z$ (wo alsdann z der Abstand des Mittelpunctes einer eingeschriebenen Ellipse von der ersten Axe bedeutet) setzen, wonach die Gleichung (8), da

$$C = \frac{2ax-x^2}{\eta} = 2.\frac{2ax-x^2}{h}.sin\vartheta,$$

in folgende übergeht:

$$(2ax-x^2)\left(\frac{z^2}{h}-z^2\right)+r^4 = 0,$$

und dann diese Gleichung, zuerst in Beziehung auf x, und zuletzt in Beziehung auf z differentiiren können. Auf diese Weise ergibt sich zuvörderst der Satz, dass von allen denjenigen eingeschriebenen Ellipsen, deren Mittelpuncte auf einer der Basis des gegebenen Dreiecks parallelen geraden Linie liegen, diejenige Ellipse den grössesten Inhalt hat, welche die Basis in ihrer Mitte berührt.

652. Wir können aus der Gleichung (8) auch noch andere Constructionen der grössten Ellipse, welche vier gegebene gerade Linien berührt, ableiten. Denn setzen wir in dieser Gleichung $\frac{C}{A} = z$, und nennen diejenigen drei Werthe von z, welche sich auf die drei Diagonalen der von den vier gegebenen geraden Linien gebildeten vierseitigen Figur beziehen, ζ, ζ' und ζ'', so kommt:

$$\left(\frac{D}{C}\right)^2(z-\zeta)(z-\zeta')(z-\zeta'')+\frac{r^4}{sin^2\vartheta} = 0.$$

Oder wenn wir $\frac{F}{A} = v$ setzen und die jenen drei Diagonalen entsprechenden Werthe von v durch v, v' und v'' unterscheiden, so ist:

$$\frac{C}{F}\left(\frac{D}{F}\right)^2(v-v)(v-v')(v-v'')+\frac{r^4}{sin^2\vartheta} = 0;$$

und endlich, wenn wir $\frac{E}{A} = w$ setzen, und diejenigen Werthe von w, welche sich auf

die drei Diagonalen beziehen, ω, ω' und ω'' nennen:

$$\frac{C}{E}\left(\frac{D}{E}\right)^2(w-\omega)(w-\omega')(w-\omega'')+\frac{r^4}{\sin^2\vartheta}=0.$$

Bei der Bestimmung des *maximum* fallen aus jeder der drei vorstehenden Gleichungen die Coefficienten der allgemeinen Gleichung der Oerter zweiter Classe aus, und wir sehen, dass, für dieses *maximum*, w dieselbe Function von ω, ω und ω'' ist, als ν von v, v' und v'', als z von ζ, ζ' und ζ'' und als y von η, η' und η''. So können wir zum Beispiel, wenn wir die grösste Ellipse bestimmen wollen, welche einem gegebenen Dreiecke eingeschrieben ist und eine Seite desselben, in einem gegebenen Puncte berührt, $\omega'=\omega''=0$, $\zeta'=\zeta''=0$ und $\eta'=\eta''=0$ setzen, und erhalten alsdann für diese grösste Ellipse:

$$y=\tfrac{1}{3}\eta, \qquad z=\tfrac{2}{3}\zeta, \qquad w=\tfrac{2}{3}\omega. —$$

653. Für solche Curven zweiter Classe, welche die erste Axe im Anfangspuncte der Coordinaten berühren, reducirt sich der Ausdruck:

$$\frac{(AC-B^2)(AF-D^2)-(AE-BD)^2}{A^4},$$

indem wir $F=E=0$ setzen, auf:

$$\frac{CD^2}{A^3}. \qquad (10)$$

Wenn die Curven sich auf der ersten Axe dreipunctig oder vierpunctig osculiren, so ist der Quotient $\frac{C}{D}$ constant (581). Wenn also der Inhalt einer osculirenden Ellipse gegeben und gleich $r^2\pi$ ist und wir jenen constanten Quotienten γ nennen, so kommt:

$$\left(\frac{D}{A}\right)^3=-\frac{r^4}{\gamma\sin^2\vartheta}.$$

Diese Gleichung giht für $\left(\frac{D}{A}\right)$, also für die Abscisse des Mittelpunctes der osculirenden Ellipse immer nur einen einzigen reellen Werth. Dasselbe findet Statt, wenn wir im zweiten Theile dieser Gleichung das Zeichen ändern, und also statt einer Ellipse eine Hyperbel erhalten. In beiden Fällen gibt es kein *maximum*. Dieselben Folgerungen hätten wir auch unmittelbar aus der 648. Nummer ziehen können.

Wir bemerken beiläufig, dass der Ausdruck (10) constant bleibt, so lange die Quotienten $\frac{A}{C}$ und $\frac{D}{C}$ dieselben Werthe behalten und sumit erhalten wir folgende Sätze (631):

Alle Ellipsen, welche dieselben beiden, unter sich parallelen, geraden Linien berühren und auf einer derselben sich dreipunctig osculiren, haben gleichen Flächeninhalt. In allen Hyperbeln, welche unter sich und mit jenen Ellipsen auf der einen geraden Linie einen dreipunctigen Contact haben, und die andere gerade Linie berühren, wird von dem Asymptoten-Winkel, durch eine beliebige Tangente, ein Dreieck von constantem Inhalte abgeschnitten und dieser Inhalt ist dem Producte der beiden halben Axen einer jener Ellipsen gleich.

654. *Eine Parabel zu beschreiben, welche die drei Seiten eines gegebenen Dreiecks berührt und deren Parameter ein maximum ist.*

Der vierte Theil (P) des Parameters einer durch die allgemeine Gleichung:

$$2Bvw+Cv^2+2Duw+2Euv+Fu^2=0, \qquad (1)$$

dargestellten Parabel ist, bei der Voraussetzung rechtwinkliger Coordinaten-Axen, durch

folgende Gleichung bestimmt (506);

$$\frac{(CD^2-2BDE+FB^2)^2}{(B^2+D^2)^3} = 4P^2. \qquad (2)$$

Wenn wir einen Winkelpunct des gegebenen Dreiecks zum Anfangspuncte der Coordinaten nehmen und die erste Axe der diesem Winkelpuncte gegenüberliegenden Seite parallel legen, so können wir in der allgemeinen Gleichung (1) aller eingeschriebenen Parabeln alle Coefficienten, B ausgenommen, als ein für alle Mal gegeben betrachten (536).

Wenn wir in dem Ausdrucke für $4P^2$ Nenner und Zähler durch C^6 dividiren und dann $\frac{B}{C} = \frac{1}{2x}$ setzen, so kommt nach einer einfachen Reduction:

$$\frac{\left\{4\frac{D^2}{C^2}x^3-4\frac{D}{C}\cdot\frac{E}{C}x^2+\frac{F}{C}x\right\}^2}{\left\{4\frac{D^2}{C^2}x^2+1\right\}^3} = P^2.$$

Es bedeutet hier x dasjenige Segment, welches von einer der zweiten Axe parallelen Tangente auf der ersten Axe abgeschnitten wird; denn wenn wir in der Gleichung (1) $u = o$ setzen, so kommt $\frac{w}{v} = \frac{C}{2B} = x$. Mit denjenigen Parabeln, welche die Seiten des gegebenen Dreiecks berühren, ordnen sich drei Puncten-Systeme zusammen (618). Jedes derselben besteht aus einem Winkelpuncte des Dreiecks und einem Puncte, der, nach der Richtung der gegenüberliegenden Seite hin, unendlich weit liegt. In Beziehung auf diese drei Systeme erhalten wir offenbar für x die Abscissen der drei Winkelpuncte des gegebenen Dreiecks. Eine dieser Abscissen ist, bei unserer Coordinaten-Annahme, gleich Null; die beiden andern wollen wir ξ' und ξ'' nennen. Hiernach erhalten wir aus der letzten Gleichung folgende:

$$16\left(\frac{D}{C}\right)^4\cdot\frac{[x(x-\xi')(x-\xi'')]^2}{\left(4\frac{D^2}{C^2}x^2+1\right)^3} = \tfrac{1}{4}\left(\frac{C}{D}\right)^2\cdot\frac{[x(x-\xi')(x-\xi'')^2]}{\left(x^2+\tfrac{1}{4}\frac{C^2}{D^2}\right)^3} = P^2.$$

Wir haben ferner:

$$\frac{C}{2D} = \frac{F}{2D}\cdot\frac{C}{F} = \frac{\xi'\xi''}{\eta'} = \lambda,$$

indem wir durch η' die Ordinate eines der beiden, nicht in den Anfangspunct fallenden, Winkelpuncte des gegebenen Dreiecks bezeichnen. Hiernach kommt endlich:

$$\lambda^2\frac{[x(x-\xi')(x-\xi'')]^2}{(x^2+\lambda^2)^3} = P^2.$$

Diese Gleichung zeigt, dass es im Allgemeinen **sechs** verschiedene Parabeln gibt, welche die drei Seiten eines gegebenen Dreiecks berühren, und deren Parameter eine gegebene Grösse hat. Für diejenigen Parabeln, in welchen dieser Parameter ein *maximum* ist, erhalten wir, auf dem bekannten Wege, folgende Gleichung:

$$(\xi'+\xi'')x^3+(3\lambda^2-2\xi'\xi'')x^2-2\lambda^2(\xi'+\xi'')x+\lambda^2\xi'\xi'' = o. \qquad (3)$$

Diese Gleichung zeigt, dass es, im Allgemeinen, **drei** verschiedene solcher *maxima* gibt.

Der um das gegebene Dreieck, ABC, beschriebene Kreis ist der geometrische Ort für die Brennpuncte aller Parabeln, welche die drei Seiten des Dreiecks berühren. Wenn wir den Brennpunct in einem Winkelpuncte des gegebenen Dreiecks annehmen, so

Digitized by Google

erhalten wir, statt der Parabel, ein Puncten-System, und der bezügliche Parameter ist gleich Null. Wenn der Brennpunct auf dem umschriebenen Kreise von einem Winkelpuncte des Dreiecks, etwa von B, nach einem andern, C, fortrückt, so wächst anfänglich der Parameter der bezüglichen Parabel, erreicht dann sein *maximum*, und nimmt endlich wieder ab, bis er im Puncte C wieder ganz verschwindet. Wir sehen hieraus, dass den drei Wurzeln der letzten Gleichung wirklich drei *maxima* entsprechen, und dass diese *maxima* nothwendig alle drei reell sind, so lange das gegebene Dreieck reell bleibt. Zugleich ist auf diesem Wege ersichtlich, dass es, im Allgemeinen, sechs verschiedene Parabeln gibt, welche dem gegebenen Dreiecke eingeschrieben sind und einen Parameter von gegebener Länge haben. Jede Seite des Dreiecks und die Verlängerungen der jedesmalig beiden übrigen Seiten werden von zwei Parabeln von gegebenem Parameter, und von einer Parabel, deren Parameter ein *maximum* ist, berührt.

Die Wurzeln der Gleichung (3) lassen sich nur in besondern Fällen durch Constructionen der Elementar-Geometrie bestimmen. Einem solchen Falle entspricht die Bedingungs-Gleichung:

$$\xi'+\xi''=0,$$

welche anzeigt, dass das gegebene Dreieck zwei gleiche Schenkel hat. Alsdann reducirt sich die Gleichung (3), indem eine ihrer Wurzeln unendlich wird, auf folgende:

$$[3\xi'^2+2\eta'^2]x^2=\xi'^4. \qquad (4)$$

Der unendlich werdende Werth von x zeigt eine Parabel an, deren Axe der zweiten Coordinaten-Axe parallel ist, und man sieht sogleich, dass im vorliegenden Falle beide Axen zusammenfallen. Die beiden andern Werthe von x, welche die letzte Gleichung gibt, sind leicht zu construiren.

Die Gleichung (3) reducirt sich ferner auch in demjenigen Falle, dass zwei Seiten des gegebenen Dreiecks, AC und BC, zusammenfallen, und demnach alle Parabeln zwei gerade Linien AN und AC und die eine derselben, AC, in einem gegebenen Puncte, C, berühren. Der Ort für die Brennpuncte aller solcher Parabeln ist ein Kreis, der die gegebene gerade Linie AN in ihrem Durchschnittspuncte A mit AC berührt, und zugleich durch den gegebenen Berührungspunct C auf AC geht. Wir können hieraus leicht *a priori* entnehmen, dass eines der in Rede stehenden *maxima* von P Null wird, und dass diesem *maximum* x = 0 entspricht, wenn wir der obigen Coordinaten-Bestimmung gemäss den Durchschnittspunct der beiden gegebenen geraden Linien, A, zum Anfangspuncte und diejenige gegebene gerade Linie, auf welcher zugleich der Berührungspunct gegeben ist, AC, zur ersten Axe nehmen. Hiernach erhält man: Fig. 2.

$$\xi'=0, \quad \eta'=0, \quad \frac{\eta'}{\xi'}=tang\varphi, \quad \xi''=AC, \quad \lambda=\xi''cotg\varphi,$$

indem man den Winkel, welche die beiden gegebenen geraden Linien mit einander bilden, durch φ bezeichnet. Alsdann geht die Gleichung (3) in folgende leicht zu construirende Gleichung des zweiten Grades über:

$$x^2+3\xi''cotg^2\varphi\, x-\xi''^2cotg^2\varphi=0. \qquad (5)$$

Wenn der Winkel φ, welchen die beiden gegebenen geraden Linien mit einander bilden, ein rechter ist, so sind die Wurzeln der letzten Gleichung beide gleich Null; was weiter nichts heisst, als dass die zweite Coordinaten-Axe, also die gegebene gerade Linie AN, eine Tangente der verlangten Parabel ist. In diesem speciellen Falle kommen wir also auf dem oben eingeschlagenen Wege nicht zur Bestimmung dieser Parabel,

Wir gelangen indess leicht hierzu, wenn wir zur Gleichung (2) zurückgehen und in dieser Gleichung, unserer Coordinaten-Annahme gemäss, F = o und C = o setzen. Auf diese Weise kommt:

$$\frac{B^2D^2E^2}{(B^2+D^2)^3} = P^2,$$

und für das *maximum* von P, als Function von B betrachtet:

$$D^2-2B^2 = o,$$

wonach wir, wenn wir den Winkel, welche die Durchmesser der verlangten Parabel mit der ersten Axe bilden, α nennen, folgende Gleichung erhalten:

$$tang\alpha = \pm\sqrt{2}.$$

Wenn alle in Rede stehenden Parabeln sich dreipunctig osculiren, so ist $\xi'' = o$ und $\varphi = o$. Von den beiden Wurzeln der Gleichung (5) ist alsdann die eine Null und die andere unendlich; denn das Product derselben, $[= -(\xi''cotg\varphi)^2]$, erscheint unter der unbestimmten, nicht reducirbaren, Form $o.\infty$, während die Summe derselben $[= -3(\xi''cotg\varphi)cotg\varphi]$ unendlich wird. Wir finden diese Behauptung bestätigt, wenn wir wiederum zur Gleichung (2) zurückgehen, und in dieser Gleichung F = o und E = o setzen. Alsdann kommt nemlich:

$$\frac{C^2D^4}{(B^2+D^2)^3} = 4P^2,$$

und man sieht sogleich, dass B = o dem *maximum* von P entspricht. Es stehen also die Durchmesser der bezüglichen Parabel auf der ersten Coordinaten-Axe, der Tangente im Osculationspuncte, senkrecht. Von allen Parabeln, welche eine gegebene (beliebige) Curve in einem gegebenen Puncte osculiren, hat diejenige den grössten Parameter, deren Axe durch den gegebenen Osculationspunct geht.

Hierhin gehört auch der Fall, dass alle Parabeln, statt drei gegebene gerade Linien zu berühren, einen gegebenen Punct zum Brennpuncte haben und überdiess eine gegebene gerade Linie berühren. Wenn wir den gegebenen Brennpunct zum Anfangspuncte nehmen, und die erste Axe parallel mit der gegebenen geraden Linie legen, so verwandelt sich die Gleichung (2), indem wir E = o und F = C nehmen, in folgende:

$$\frac{C^2}{B^2+D^2} = 4P^2,$$

und hiernach kommt, wenn wir, der bisherigen Bezeichnung entsprechend, den Abstand des gegebenen Punctes von der gegebenen geraden Linie η' nennen:

$$\frac{1}{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{\eta'^2}} = P^2.$$

Diese Gleichung zeigt, dass es unter den Parabeln, die wir betrachten, nur zwei von gegebenem Parameter gibt. Diese sind leicht zu construiren, denn die letzte Gleichung gibt

$$x = \pm\frac{\eta'}{\sqrt{(\eta'^2-P^2)}}.$$

Dem *maximum* von P entspricht B = o oder $x = \infty$, das heisst, diejenige Parabel hat den grössten Parameter, deren Durchmesser auf der gegebenen geraden Linie senkrecht stehen.

655. Wenn wir in dem Ausdrucke für $4P^2$ (2) Nenner und Zähler durch B^4 dividiren, und dann $\frac{D}{B} = -v$ setzen, so kommt:

Digitized by Google

$$4P^2 = \frac{\left(\frac{C}{B}v^2+2\frac{E}{B}v+\frac{F}{B}\right)^2}{(1+v^2)^2} = \frac{C^2}{B^2}\frac{[v(v-v')(v-v'')]^2}{(1+v^2)^2},$$

indem wir die Wurzeln der Gleichung

$$Cv^2+2Ev+F = 0$$

v' und v'' nennen. $(-v)$ bedeutet die trigonometrische Tangente derjenigen Winkel, welche die Durchmesser der bezüglichen Parabel mit der ersten Axe bilden; die Seiten des gegebenen Dreiecks bilden mit dieser Axe Winkel, deren trigonometrische Tangenten o, $(-v')$ und $(-v'')$ sind. Für $v = o$, $v = v'$ und $v = v''$ verschwindet P; es wird P *maximum*, wenn wir v durch folgende Gleichung, die der Gleichung (3) ganz analog gebildet ist, bestimmen:

$$(v'+v'')v^3+(3-2v'v'')v^2-2(v'+v'')v+v'v'' = o. \qquad (6)$$

656. Da der geometrische Ort für die Brennpuncte solcher Parabeln, welche die drei Seiten eines gegebenen Dreiecks berühren, der diesem Dreieck umschriebene Kreis ist, so liegt der Gedanke nahe, zur Bestimmung derjenigen Parabel, deren Parameter ein *maximum* ist, noch einen zweiten geometrischen Ort für den Brennpunct zu suchen. Wenn wir zu diesem Ende zu der 480. Nummer zurückgehen und $\left(-\frac{y'}{x'}\right) = w$ setzen, so kommt:

$$w = -\frac{2BE-D(C-F)}{2DE+B(C-F)} = \frac{2E+(C-F)v}{2Ev-(C-F)},$$

und hiernach:

$$v = \frac{2E+(C-F)w}{2Ew-(C-F)}.$$

Wenn wir diesen Werth für v in die letzte Gleichung der vorigen Nummer substituiren, so erhalten wir eine Gleichung des dritten Grades in w, welche drei durch den Anfangspunct der Coordinaten gehende gerade Linien darstellt. Diese drei gerade Linien schneiden den, dem gegebenen Dreiecke umschriebenen, Kreis, ausser in dem Anfangspuncte, noch in drei Puncten: den Brennpuncten der gesuchten Parabeln. In dem oben schon betrachteten Falle, dass das gegebene Dreieck ein gleichschenkliges ist, gibt die letzte Gleichung, indem wir

$$2E = -(v'+v'') = o,$$

setzen:

$$v = -w;$$

das heisst, wenn man durch die Spitze eines gleichschenklichen Dreiecks, welches einer gegebenen Parabel so umschrieben ist, dass diese einen der beiden gleichen Schenkel selbst, den andern Schenkel aber und die Basis in ihren Verlängerungen berührt, zwei gerade Linien zieht, von welchen die eine durch den Brennpunct der Parabel geht und die andere der Axe derselben parallel ist, so bilden diese beiden geraden Linien mit der Basis des gegebenen Dreiecks ein zweites gleichschenkliges Dreieck. Wenn man hiernach durch den Anfangspunct der Coordinaten zwei gerade Linien legt, deren Richtung durch die Wurzeln der Gleichung:

$$(3+2v'^2)v^2-v'^2 = o, \qquad (7)$$

auf welche im vorliegenden Falle die Gleichung (6) sich reducirt, gegeben ist, so geht jede derselben durch den Brennpunct einer der zu construirenden Parabeln und die jedesmalig übrigbleibende ist den Durchmessern derselben Parabel parallel.

Digitized by Google

In dem vorliegenden Falle können wir auch die beiden Brennpuncte der verlangten Parabeln durch die Durchschnitte des dem gegebenen Dreiecke umschriebenen Kreises und einer, der Basis desselben parallelen, geraden Linie construiren. Für die Gleichung dieser geraden Linie erhalten wir, wenn wir wieder zur 480. Nummer zurückgehen:

$$y = -\frac{D(C-F)}{2(B^2+D^2)},$$

und wir brauchen alsdann nur noch aus dieser Gleichung, vermittelst der Gleichung (4) oder (7), B zu eliminiren. Nach einigen Reductionen erhält man:

$$\left.\begin{aligned} y &= -\frac{\frac{1}{\lambda}(1+v'^2)}{\frac{1}{\lambda^2}+\frac{1}{x^2}} \\ y &= -\frac{\lambda-\eta'}{1+\frac{1}{v^2}} \end{aligned}\right\} = \tfrac{1}{2}\eta'.$$

Hiernach ergibt sich eine sehr leichte Construction jener beiden Brennpuncte. Der Brennpunct der dritten Parabel liegt auf der zweiten Coordinaten-Axe. —

657. *In ein gegebenes Parallelogramm diejenige Ellipse zu beschreiben, welche einem Kreise am meisten sich annähert.*

Wenn wir, wie in der ersten Nummer dieses Paragraphen, den Mittelpunct des Parallelogramms zum Anfangspuncte der Coordinaten nehmen und die Axen parallel mit den gegenüberliegenden Seiten desselben legen, so ist

$$Aw^2+Cv^2+2Euv+Fu^2 = 0 \qquad (1)$$

die allgemeine Gleichung aller dem gegebenen Parallelogramme eingeschriebenen Curven zweiter Classe. Alle Coefficienten dieser Gleichung sind als gegeben zu betrachten, mit Ausnahme des Coefficienten E, der von einer Curve zur andern sich ändert, und alle möglichen Werthe erhalten kann.

Wenn wir einen derjenigen Winkel, welche die beiden gleichen zugeordneten Durchmesser einer Ellipse mit einander bilden, ξ nennen, so ist bekanntlich $tang\frac{1}{2}\xi$ gleich dem Verhältniss der beiden Axen der Ellipse. Dieses Verhältniss nähert sich um so mehr der Einheit, je näher der Winkel ξ einem rechten kommt, und je grösser also $sin^2\xi$ wird. Indem wir die allgemeine Gleichung (1) zu Grunde legen und A=0 setzen, ist (512):

$$sin^2\xi = 4\frac{(CF-E^2)sin^2\vartheta}{(C+2Ecos\vartheta+F)^2}. \qquad (2)$$

Wir sehen hieraus, dass sich, im Allgemeinen, zwei verschiedene Ellipsen von gegebenem Axen-Verhältniss in das gegebene Parallelogramm beschreiben lassen. Für die verlangte Ellipse, in welcher das Axen-Verhältniss der Einheit so nahe kommt als möglich, ergibt sich, auf dem bekannten Wege, zur Bestimmung von E folgende Gleichung:

$$E = -2.\frac{CF}{C+F}.cos\vartheta. \qquad (3)$$

Wenn wir wie in der 646. Nummer construiren, so erhalten wir ohne Mühe diejenigen beiden Durchmesser, deren zugeordnete in die beiden Coordinaten-Axen fallen, und dann die beiden Axen der gesuchten Ellipse.

Die Gleichung (2) geht, wenn wir in dieselbe für E den eben gefundenen Werth substituiren, nach einigen leichten Reductionen in folgende über:

$$\sin^2\xi = \frac{4CF\sin^2\vartheta}{(C-F)^2+4CF\sin^2\vartheta} = \frac{4\Delta^2}{(s^2-t^2)^2+4\Delta^2}, \qquad (4)$$

wenn wir, was den letzten Ausdruck betrifft, den Inhalt des gegebenen Parallelogramms 4Δ und die Seiten desselben $(2s)$ und $(2t)$ nennen. Wir sehen hieraus beiläufig, dass nur, wenn das Parallelogramm gleiche Seiten hat, ein Kreis in dasselbe sich beschreiben lässt. Für das Quadrat der Hälfte eines der beiden gleichen zugeordneten Durchmesser ergibt sich (512)

$$\frac{1}{2}[C+2E\cos\vartheta+F] = \frac{(C-F)^2+4CF\sin^2\vartheta}{2(C+F)} = \frac{(s^2-t^2)^2+4\Delta^2}{2(s^2+t^2)}$$

und für den Inhalt der Ellipse:

$$\frac{\Delta\sqrt{[(s^2-t^2)^2+4\Delta^2]}\pi}{s^2+t^2},$$

Es ist offenbar, dass derjenige Werth, welchen die Gleichung (4) für $\sin^2\xi$ gibt, ein *maximum* und kein *minimum* ist. Denn die Gleichung (3) gibt für E einen einzigen Werth, und $\sin^2\xi$ kann dadurch, dass die eingeschriebene Ellipse sich immer mehr einer der beiden Diagonalen des gegebenen Parallelogramms annähert, auf zwiefache Weise beliebig klein werden. Diese Diagonalen bilden den Uebergang von eingeschriebenen Ellipsen zu eingeschriebenen Hyperbeln; sie sind als solche Ellipsen anzusehen, in welchen einer der, von den beiden gleichen zugeordneten Durchmessern gebildeten, Winkel gleich Null ist, oder als solche Hyperbeln, in welchem der Asymptoten-Winkel verschwindet. Nennen wir in irgend einer eingeschriebenen Hyperbel den Asymptoten-Winkel ζ, so ist (490)

$$\tang^2\zeta = -4\frac{(CF-E^2)}{(C+2E\cos\vartheta+F)^2}. \qquad (5)$$

Es ist dieser Ausdruck weder eines *maximum* noch eines *minimum* fähig, denn einem solchen würde wiederum die Gleichung (3) entsprechen, und diese gibt

$$CF-E^2 = \frac{CF}{(C+F)}[(C-F)^2+4CF\sin^2\vartheta] > 0,$$

wonach die bezügliche Curve keine Hyperbel sein kann (489). Dieselbe Folgerung hätten wir auch aus der Gleichung (4) ziehen können, welche für ξ immer einen reellen Werth, und folglich für ζ immer einen imaginären Werth gibt. *) Es existiren also Hyperbeln von jedem möglichen Axen-Verhältniss und insbesondere gibt es also auch eine gleichseitige Hyperbel. Zur Bestimmung dieser gleichseitigen Hyperbel ergibt sich unmittelbar:

$$E = -\frac{C+F}{2\cos\vartheta}.$$

Nur in dem einzigen Falle, dass das gegebene Parallelogramm ein rechtwinkliges ist, wird E unendlich, und es gibt, im eigentlichen Verstande, keine gleichseitige Hyperbel, sondern nur solche Hyperbeln, die einer gleichseitigen Hyperbel so nahe kommen können, als man nur will, ohne aber ganz in eine solche überzugehen.

---

*) Aus der Nebeneinanderstellung der beiden Gleichungen (2) und (3), oder auch aus den allgemeineren Ausdrücken der 490. und 512. Nummer erhalten wir, indem wir den Asymptoten-Winkel irgend einer Curve zweiter Classe ζ und den Winkel, welchen die gleichen zugeordneten Durchmesser derselben Curven mit einander bilden, ξ nennen, die bemerkenswerthe Gleichung:

$$\sin^2\xi = -\tang^2\zeta.$$

Digitized by Google

658. Wir wenden uns sogleich zu der nachstehenden allgemeinern Aufgabe:

In irgend ein gegebenes Viereck diejenige Ellipse, welche einem Kreise so nahe als möglich kommt und diejenige Hyperbel, deren Asymptoten-Winkel der möglichst grösseste ist, zu beschreiben.

Fig. 28. Wenn wir die Coordinaten-Axen wiederum wie in der 22. Figur bestimmen und OW = 2a setzen, so ist

$$Aw^2+2Bvw+Cv^2+2Duw+2Euv+Fu^2 = o \qquad (1)$$

die allgemeine Gleichung aller, die vier gegebenen (in der Figur stärker gehaltenen) geraden Linien berührenden, Oerter zweiter Classe, wenn wir in dieser Gleichung A und B als beliebig zu bestimmende Coefficienten, zwischen denen bloss die Bedingungs-Gleichung

$$B = aA$$

Statt findet, betrachten. Die vier übrigen Coefficienten, oder vielmehr die Quotienten je zweier derselben, sind durch die vier gegebenen geraden Linien vollkommen bestimmt. Den Coordinaten-Winkel bezeichnen wir, wie bisher, durch ϑ. Wenn wir alsdann irgend eine durch die Gleichung (1) dargestellte Ellipse betrachten und einen derjenigen Winkel, welchen die gleichen zugeordneten Durchmesser derselben mit einander bilden, ξ nennen, so ist (512):

$$sin^2\xi = 4.\frac{[(AC-B^2)(AF-D^2)-(AE-BD)^2]sin^2\vartheta}{[(AC-B^2)+2(AE-BD)cos\vartheta+(AF-D^2)]^2}. \qquad (2)$$

Wenn wir in diesem Ausdrucke für $sin^2\xi$ statt B schreiben aA, dann Nenner und Zähler desselben durch A^4 dividiren und endlich $D = 1$, $\frac{1}{A} = y$ setzen, so kommt:

$$sin^2\xi = 4sin^2\vartheta.\frac{Cy^3+(E^2-CF-2Ea)y^2+Fa^2y}{[y^2-(C+F-2(E-a)cos\vartheta)y+a^2]^2}, \qquad (3)$$

und diese Gleichung können wir nochmals in folgende umformen:

$$sin^2\xi = 4Csin^2\vartheta.\frac{(y-\eta)(y-\eta')(y-\eta'')}{[(y-\eta)(y-\eta_{,,})]^2}, \qquad (4)$$

indem wir die Wurzeln der Gleichung:

$$Cy^3+(E^2-CF-2Ea)y^2+Fa^2y = o, \qquad (5)$$

(von denen eine gleich Null ist) durch η, η' und η'', und die Wurzeln der Gleichung:

$$y^2(C+F-2(E-a)cos\vartheta)y+a^2 = o, \qquad (6)$$

durch $\eta_{,}$ und $\eta_{,,}$ bezeichnen. Es bedeutet alsdann y die Ordinate des Mittelpunctes der bezüglichen Ellipse, η, η' und η'' bedeuten die Ordinaten der Mitten (M, M' und M'') der drei Diagonalen der, von den vier gegebenen geraden Linien gebildeten, vollständigen vierseitigen Figur, $\eta_{,}$ und $\eta_{,,}$ die (reellen oder imaginären) Ordinaten der Mittelpuncte derjenigen beiden gleichseitigen Hyperbeln, welche die vier gegebenen geraden Linien berühren. Wir können diese Ordinaten auf der geraden Linie NL selbst nehmen, und da in der Gleichung (4) nur Differenzen solcher Ordinaten vorkommen, so können wir auch, statt diese Ordinaten vom Puncte M'' an zu bestimmen, dieselben von irgend einem beliebigen Puncte dieser geraden Linie an rechnen.

Die Gleichung (4) zeigt, dass es, im Allgemeinen, vier verschiedene Ellipsen gibt, deren gleiche zugeordnete Durchmesser gegebene Winkel mit einander bilden, oder, mit andern Worten, vier Ellipsen, die einer gegebenen Ellipse ähnlich sind. Es ist offenbar, dass die Mittelpuncte zweier dieser Ellipsen zwischen M' und M, und die Mittelpuncte der beiden übrigen von M'' aus nach N hin fallen. Jedem Puncte, nemlich der

Digitized by Google

zwischen M' und M, oder über den Punct M'' hinaus nach N hin liegt, entspricht eine eingeschriebene Ellipse und dieser ein endlicher Werth für $sin^2\xi$. Dieser Werth verschwindet einerseits für $y = \eta'$ und $y = \eta$, und andrerseits für $y = \eta''$ und $y = \infty$ (4). Er wächst also, indem der Mittelpunct der bezüglichen Curve von M' aus nach M hin fortrückt, erreicht sein *maximum* und nimmt dann wieder ab, bis er für den Punct M verschwindet. Wenn ferner der Mittelpunct von M'' aus nach N hin fortrückt, so wächst der Werth von $sin^2\xi$, erreicht wieder ein *maximum* und nimmt dann wiederum bis zum Verschwinden ab, indem die bezügliche Ellipse sich einer Parabel immer mehr annähert. Aus der Form des Ausdruckes für $sin^2\xi$ folgt (512), dass keines jener beiden *maxima* je die Einheit übersteigt. Wenn ein *maximum* derselben gleich kommt, so entspricht demselben ein Kreis.

Wir erhalten ferner für eine dem gegebenen Viereck eingeschriebene Hyperbel, de- Fig. 25.
ren Asymptoten-Winkel wir wiederum ζ nennen wollen:

$$tang^2\zeta = -4C sin^2\vartheta \frac{(y-\eta)(y-\eta')(y-\eta'')}{[(y-\eta_1)(y-\eta_{11})]^2}.$$

Es gibt also, im Allgemeinen, vier Hyperbeln, welche die Seiten eines gegebenen Vierecks berühren, und deren Asymptoten sich unter gegebenen Winkeln schneiden. Es sind hier zwei verschiedene Fälle zu unterscheiden; es gibt entweder unter den eingeschriebenen Hyperbeln zwei gleichseitige und dann liegen die Mittelpuncte derselben, H und H', zwischen M'' und M' oder es gibt deren keine. Wenn in dem ersten Falle der Mittelpunct der eingeschriebenen Hyperbel von M'' nach M' fortrückt, so wächst anfänglich der bezügliche Werth von $tang^2\zeta$, bis er für den Punct H' unendlich wird, nimmt dann wieder ab, erreicht ein *minimum*, wächst von Neuem, bis er für den Punct H wieder unendlich wird, und nimmt dann endlich wieder ab, bis er für den Punct M' verschwindet. In dem zweiten Falle wächst der Werth von $tang^2\zeta$, wenn der Mittelpunct von M'' nach M' hin rückt, erreicht ein *maximum* und nimmt dann wieder bis zum Verschwinden ab. In beiden Fällen wächst der Werth von $tang^2\zeta$, wenn der Mittelpunct von M nach L hin fortrückt, erreicht ein *maximum* und nimmt dann wiederum bis zum Verschwinden ab, indem die bezügliche Hyperbel einer Parabel sich immer mehr annähert.

In dem ersten Falle gibt es also ein *minimum* von $tang^2\zeta$, dem ein Mittelpunct, der zwischen M'' und M' liegt, und ein *maximum*, dem ein über M hinaus, nach L hin, liegender Mittelpunct entspricht. Dieses *maximum* ist nothwendig kleiner als jenes *minimum*. Ist der Werth von $tang^2\zeta$ gegeben und grösser als das *minimum*, so liegen die Mittelpuncte der bezüglichen Hyperbeln alle vier zwischen M'' und M'. Ist $tang^2\zeta$ kleiner als das *maximum*, so liegen von den Mittelpuncten der bezüglichen vier Hyperbeln zwei zwischen M'' und M' und zwei über M hinaus nach L hin. Wenn der Werth von $tang^2\zeta$ gegeben ist und zwischen dem *maximum* und *minimum* fällt, so gibt es nur zwei eingeschriebene Hyperbeln, deren Mittelpuncte zwischen M'' und M' liegen. Im zweiten Falle gibt es zwei *maxima*. Wenn $tang^2\zeta$ gegeben ist, so liegen die Mittelpuncte zweier bezüglicher Hyperbeln zwischen M'' und M' und die Mittelpuncte der beiden übrigen über M hinaus nach L hin, und alle vier Hyperbeln können imaginär werden.

Es bleibt uns jetzt noch die Frage zu beantworten übrig, ob in denjenigen Hyperbeln, die einem gegebenen Werthe von $tang^2\zeta$ entsprechen, der Asymptoten-Winkel kleiner oder grösser als ein rechter Winkel ist. Wir sehen sogleich, dass, wenn

Digitized by Google

wir eine Diagonale der von den vier gegebenen geraden Linien gebildeten vollständigen vierseitigen Figur als eine Hyperbel, in der die imaginäre Axe bis zum Verschwinden abgenommen hat, betrachten (521), in Beziehung auf dieselbe, ζ gleich Null und nicht gleich π ist. Ein Gleiches findet Statt in Beziehung auf die eingeschriebene Parabel, wenn wir dieselbe als eine Gränze von Hyperbeln ansehen. Da ferner nur durch eine gleichseitige Hyperbel hindurch der Uebergang von Hyperbeln, deren Asymptoten-Winkel kleiner als ein rechter ist, zu solchen, in welchen der Asymptoten-Winkel grösser ist als ein rechter, Statt finden kann, so ist offenbar, dass in demjenigen Falle, wo es keine gleichseitige Hyperbel gibt, welche die vier gegebene gerade Linien berührt, der Asymptoten-Winkel jeder eingeschriebenen Hyperbel kleiner ist als ein rechter. Den beiden *maxima* entsprechen also Hyperbeln, deren Asymptoten-Winkel *maxima* sind, aber einen rechten Winkel an Grösse nicht erreichen. Wenn aber unter den eingeschriebenen Hyperbeln sich zwei gleichseitige befinden, so liegen von M aus nach L hin, und zwischen M' und H, so wie zwischen H' und M'' die Mittelpuncte solcher Hyperbeln, deren Asymptoten-Winkel kleiner als ein rechter ist und zwischen H und H' die Mittelpuncte solcher Hyperbeln, deren Asymptoten-Winkel grösser ist als ein rechter. Dem *maximum* sowol als dem *minimum* von $tang^2\zeta$ entspricht ein *maximum* des Asymptoten-Winkels, der einmal kleiner, das andere Mal grösser als ein rechter ist.

Nach diesen vorläufigen Erörterungen wenden wir uns zu unserer eigentlichen Aufgabe zurück. Wenn wir $\eta'' = 0$ setzen, das heisst alle Abstände auf der geraden Linie NL vom Puncte M'' an (nach L hin) rechnen, so kommt:

$$sin^2\xi = -tang^2\zeta = 4C sin^2\vartheta \frac{y(y-\eta)(y-\eta')}{[(y-\eta_,)(y-\eta_,,)]^2}, \qquad (7)$$

und hiernach erhalten wir, nach dem bekannten Verfahren, zur Bestimmung des *maximum* oder *minimum* der Winkel ξ und ζ folgende Gleichung des vierten Grades:

$$y^4-[2(\eta+\eta')-(\eta_,+\eta_,,)]y^3+3(\eta\eta'-\eta_,\eta_,,)y^2-[(\eta_,+\eta_,,)\eta\eta'-2(\eta+\eta')\eta_,\eta_,,]y-\eta\eta'\eta_,\eta_,, = 0. \quad (8)$$

In dieser Gleichung können $\eta_,$ und $\eta_,,$ imaginär werden. Wenn wir alsdann

$$\eta_,+\eta_,, = 2\lambda$$

setzen, so ist λ reell und bedeutet den Abstand M'P der gemeinschaftlichen Chorde derjenigen drei Kreise, welche sich über den drei Diagonalen der, von den vier gegebenen geraden Linien gebildeten, vierseitigen Figur, als Durchmesser, beschreiben lassen, von der Mitte (M') der dritten Diagonale. (Diese gemeinschaftliche Chorde ist, wenn $\eta_,$ und $\eta_,,$ imaginär sind, keine ideale.) Ueberdiess ist (6):

$$\eta_,\eta_,, = a^2,$$

und a bedeutet die Hälfte dieser dritten Diagonale. Hiernach können wir der letzten Gleichung folgende Form geben:

$$y^4-2(\eta+\eta'-\lambda)y^3+3(\eta\eta'-a^2)y^2-2[\lambda\eta\eta'-a^2(\eta+\eta')]y-a^2\eta\eta' = 0. \qquad (9)$$

Nach den vorangeschickten allgemeinen Bemerkungen sind die Wurzeln dieser Gleichung nothwendig alle vier reell und zwei derselben beziehen sich auf Ellipsen, deren Annäherung zum Kreise, und die beiden übrigen auf Hyperbeln, deren Asymptoten-Winkel ein *maximum* ist. Drei Wurzeln dieser Gleichung sind positiv, und die vierte, welche sich auf eine Ellipse bezieht, ist negativ.

Da die Gleichung (8) bis zum vierten Grade ansteigt, so folgt, dass die an die Spitze dieser Nummer gestellte Aufgabe keiner elementaren Construction fähig ist. Wir sehen zugleich, dass der Grad dieser Gleichung sich nur dann auf den dritten reduciren kann,

Digitized by Google

wenn η, η', $\eta_{,}$ oder $\eta_{,,}$ verschwinden oder unendlich werden. Die beiden letzten dieser vier Grössen können nur zugleich mit a verschwinden. Setzen wir eine der beiden ersten gleich Null, so fallen von den vier gegebenen geraden Linien zwei in der ersten Axe zusammen, und wir haben solche Curven zweiter Classe zu betrachten, welche die drei Seiten eines gegebenen Dreiecks und zwar eine derselben in einem gegebenen Puncte berühren. Wenn wir η' gleich Null setzen und den gemeinschaftlichen Factor y fortlassen, so verwandelt sich die Gleichung (9) in folgende:

$$y^3-2(\eta-\lambda)y^2-3a^2y+2a^2\eta = 0. \qquad (10)$$

Je nachdem der gegebene Berührungspunct auf der einen Dreiecksseite selbst oder auf ihrer Verlängerung liegt, beziehen sich die Wurzeln dieser Gleichung auf zwei Ellipsen und eine Hyperbel oder auf zwei Hyperbeln und eine Ellipse.

Die letzte Gleichung reducirt sich auf den zweiten Grad, wenn wir $\eta = 0$ setzen, und also solche Curven zweiter Classe betrachten, welche mit einer gegebenen auf der ersten Axe einen dreipunctigen Contact und ausserdem noch eine gemeinschaftliche Tangente haben. Auf diese Weise kommt, wenn wir den gemeinschaftlichen Factor y fortlassen:

$$y^2+2\lambda y-3a^2 = 0. \qquad (11)$$

Von den Wurzeln dieser Gleichung, die beide immer reell sind, bezieht sich die eine auf eine Ellipse, die andere auf eine Hyperbel. Wir erhalten hiernach eine leichte Construction folgender Aufgabe:

Unter denjenigen Curven zweiter Classe, welche eine gegebene Curve derselben Classe in einem gegebenen Puncte osculiren (oder, was dasselbe heisst, eine gegebene gerade Linie in einem gegebenen Puncte berühren und in diesem Puncte einen gegebenen Krümmungshalbmesser haben) und überdiess irgend eine gegebene gerade Linie berühren, diejenige Ellipse, deren Annäherung zum Kreise und diejenige Hyperbel, deren Asymptoten-Winkel ein maximum ist, zu bestimmen.

Wenn wir endlich a = 0 setzen, und also solche Curven zweiter Classe betrachten, welche eine gegebene in einem gegebenen Puncte vierpunctig osculiren, so verwandelt sich die letzte Gleichung in folgende:

$$y+2\lambda = 0.$$

Der durch diese Gleichung bestimmte Werth für y ist demjenigen gleich, der sich auf diejenige gleichseitige Hyperbel bezieht, welche die gegebene Curve in dem gegebenen Puncte vierpunctig osculirt (642), hat aber das entgegengesetzte Zeichen. Aus dieser letzten Bemerkung ist ersichtlich, dass dieser Werth von y einer Ellipse entspricht (641). Also:

Der Mittelpunct derjenigen Ellipse, welche eine gegebene Curve in einem gegebenen Puncte vierpunctig osculirt und dem Kreise am meisten sich annähert, ist so weit von diesem Puncte entfernt, als der Mittelpunct der dieselbe Curve in demselben Puncte vierpunctig osculirenden gleichseitigen Hyperbel.

Diese Ellipse ist hiernach leicht zu construiren (642).

Wenn wir $\eta' = \infty$ setzen, so reducirt sich die Gleichung (9) dadurch, dass eine ihrer Wurzeln unendlich wird, auf folgende:

$$2y^3-3\eta y^2+2(\lambda\eta-a^2)y+a^2\eta = 0. \qquad (12)$$

Die Curven, die wir im vorliegenden Falle betrachten, berühren solche vier gerade Linien, von welchen zwei parallel sind, und je nachdem der Durchschnittspunct der

beiden übrigen geraden Linien zwischen diese beiden parallelen fällt oder nicht, beziehen sich die drei Wurzeln der Gleichung (12) auf zwei Ellipsen und eine Hyperbel oder auf zwei Hyperbeln und eine Ellipse.

Wenn wir in der Gleichung (12) $\eta = 0$ oder auch, wenn wir in der Gleichung (10) $\eta = \infty$ setzen, das heisst, wenn wir solche Curven betrachten, welche zwei gegebene parallele gerade Linien und überdiess eine dritte gegebene gerade Linie in einem gegebenen Puncte berühren, so kommt:

$$y^2 = a^2.$$

Die beiden Wurzeln dieser Gleichung bestimmen zwei Ellipsen oder zwei Hyperbeln, je nachdem der gegebene Berührungspunct auf der dritten geraden Linie zwischen den beiden parallelen liegt oder nicht. Wenn man über demjenigen Segmente jener dritten geraden Linie, welches von diesen beiden parallelen geraden Linien begränzt wird, als Durchmesser, einen Kreis beschreibt, und in diesem Kreise denjenigen Durchmesser zieht, der den letztgenannten geraden Linien parallel ist, so sind die Scheitel dieses Durchmessers die Mittelpuncte der beiden zu bestimmenden Curven. Und zwar kommt, bei dieser Bestimmung, die Lage des gegebenen Berührungspunctes auf der dritten gegebenen geraden Linie auf keine Weise in Betracht.

§. 11.

Allgemeine Schemata.

659. Es seien:

$$U = 0, \qquad U' = 0, \qquad U'' = 0, \qquad (1)$$

die Gleichungen irgend dreier Oerter zweiter Classe, welche zwei gemeinschaftliche Tangenten haben, und

$$w = 0$$

sei die Gleichung des Durchschnittspunctes dieser beiden Tangenten. Alsdann erhalten wir, bei gehöriger Verbindung der drei Gleichungen (1), Gleichungen von folgender Form:

$$\begin{aligned} U - \mu'' U' &= w.u'' = 0, \\ U - \mu' U'' &= w.u' = 0, \qquad (2) \\ U' - \mu U'' &= w.u = 0. \end{aligned}$$

Wenn wir die beiden ersten dieser drei Gleichungen von einander abziehen, so kommt:

$$\mu'' U' - \mu' U'' = w(u' - u''),$$

eine Gleichung, die, was ihre Form zeigt, mit der dritten der Gleichungen (2) identisch sein muss, wonach wir

$$\mu'' u = u' - u''$$

erhalten. Es liegen also die drei, durch folgende Gleichungen:

$$u'' = 0, \qquad u' = 0, \qquad u = 0,$$

dargestellten, Puncte in gerader Linie. Hiernach erhalten wir folgenden Satz:

Wenn irgend drei Oerter zweiter Classe zwei (reelle oder imaginäre) gemeinschaftliche Tangenten haben, so liegen die Durchschnittspuncte der noch übrigen dreimal zwei (reellen oder imaginären) gemeinschaftlichen Tangenten in gerader Linie.

Wenn die drei in Rede stehenden Oerter zweiter Classe eine gegebene gerade Linie in einem gegebenen Puncte berühren, so haben je zwei derselben einerseits zwei zusammenfallende Durchschnittspuncte und andrerseits zwei zusammenfallende gemeinschaftliche

Tangenten. Es gehen also zu gleicher Zeit die drei gemeinschaftlichen Chorden je zweier Oerter durch denselben Punct (363), und die drei Durchschnittspuncte der drei Paare gemeinschaftlicher Tangenten liegen in gerader Linie.

Wenn die drei Oerter zweiter Classe Parabeln sind, so liegt eine gemeinschaftliche Tangente je zweier derselben unendlich weit. Da alle unendlich weit entfernt liegenden geraden Linien derselben Ebene als zusammenfallend zu betrachten sind, so geschieht den Voraussetzungen des vorstehenden Satzes Genüge, wenn alle drei Parabeln eine einzige gegebene gerade Linie berühren, oder (wenn diese gerade Linie, indem sie parallel mit sich selbst bleibt, immer weiter fortrückt) wenn die Durchmesser derselben parallel sind (585).

Endlich können wir auch für die drei in Rede stehenden Oerter drei solche nehmen, welche einen gemeinschaftlichen Brennpunct haben.

660. Wenn wir mit zwei Curven zweiter Classe ein System von zwei Punc- Fig. 36.
ten zusammenstellen wollen, so können wir diese Puncte auf zwei gemeinschaftlichen Tangenten jener Curven beliebig annehmen. Hiernach erhält man sogleich aus dem obigen Satze den nachstehenden.

Wenn man von irgend zwei Puncten (C, C) zweier gemeinschaftlicher Tangenten zweier gegebener Curven zweiter Classe noch vier Tangenten an die beiden Curven legt, so bilden diese Tangenten ein Viereck, dessen eine Diagonale (SS) durch einen festen Punct (P) geht, der unveränderlich derselbe bleibt, wie auch jene beiden Puncte (C, C) auf den gemeinschaftlichen Tangenten fortrücken mögen.

Nach dem vorstehenden Satze ergibt sich, wenn zwei gemeinschaftliche Tangenten zweier gegebener Curven zweiter Classe gegeben sind, eine leichte Construction des Durchschnittspunctes der beiden übrigen gemeinschaftlichen Tangenten und also können wir auch diese Tangenten selbst, in dem Falle, dass dieselben reell sind, construiren.

Wenn die beiden gegebenen Curven Parabeln sind, so können wir auf eine doppelte Weise den letzten Satz auf dieselben übertragen. Einmal können wir nemlich die beiden Puncte C und C' auf zweien der drei gemeinschaftlichen Tangenten dieser Parabeln annehmen; alsdann liegen die beiden Constructions-Puncte S und S' auf einer sich immer parallel bleibenden geraden Linie. Das andere Mal können wir einen Punct, C, auf einer beliebigen gemeinschaftlichen Tangente und den andern Punct, C', auf der unendlich weit entfernten vierten gemeinschaftlichen Tangente annehmen, das heisst, nach beliebiger Richtung zwei parallele Tangenten an die beiden gegebenen Parabeln ziehen. Der feste Punct, P, ist alsdann der Durchschnitt derjenigen beiden gemeinschaftlichen Tangenten, auf denen C nicht angenommen worden ist.

661. Der Satz der vorigen Nummer erleidet mancherlei Modificationen, wenn zwischen den beiden gegebenen Curven besondere Beziehungen Statt finden. Wir wollen sogleich zwei sich dreipunctig osculirende Curven betrachten. Alsdann fallen drei gemeinschaftliche Tangenten in der Tangente im Osculationspuncte zusammen und es gibt ausserdem nur noch eine einzige gemeinschaftliche Tangente. Nehmen wir also die Fig. 37.
beiden Puncte C und C' auf der Tangente im Osculationspuncte beliebig an, so ist der feste Punct, P, der Durchschnitt dieser Tangente mit der einzig noch übrigen gemeinschaftlichen Tangente. Also:

Digitized by Google

Wenn man von irgend zwei beliebigen Puncten der Tangente im Osculationspuncte zweier oder mehrerer sich dreipunctig osculirender und überdiess dieselbe gerade Linie berührender Curven zweiter Classe an jede derselben noch zwei Tangenten zieht, so liegt der Durchschnittspunct dieser beiden Tangenten auf einer festen geraden Linie, und diese feste gerade Linie geht durch den Durchschnitt der gemeinschaftlichen Tangente mit der Tangente im Osculationspuncte.

An diesen Satz knüpft sich die Construction folgender Aufgabe:

Eine Curve zweiter Classe zu beschreiben, die eine gegebene in einem gegebenen Puncte osculirt, und überdiess irgend zwei gegebene gerade Linien berührt.

Es sei (Fig. 27) O der gegebene Punct, in welchem die gegebene Curve OM osculirt werden soll, die Tangente in diesem Puncte werde von den beiden gegebenen, in S sich schneidenden, geraden Linien in den beiden Puncten C und C' geschnitten. Von diesen beiden Puncten lege man an die gegebene Curve die beiden Tangenten CS' und C'S', deren Durchschnittspunct S' ist. Endlich ziehe man die gerade Linie SS', welche der Tangente in O in demjenigen Puncte, P, begegnet, durch welchen zugleich die gemeinschaftliche Tangente der gegebenen und der gesuchten Curve geht. Wenn diese gemeinschaftliche Tangente gegeben oder durch Construction gefunden worden ist, so gibt eine einfache Construction, welche sich sogleich darbietet, beliebig viele Tangenten der zu construirenden Curve.

Eine Parabel zu beschreiben, welche eine gegebene Curve zweiter Classe in einem gegebenen Puncte osculirt und überdiess eine gegebene gerade Linie berührt.

F. 27, 28. Diese Aufgabe ist nur eine Modification der vorigen; wir brauchen nur anzunehmen, dass eine der beiden vorhin gegebenen geraden Linien, etwa CS, und also auch die beiden Puncte S und C' unendlich weit entfernt liegen, wie in der 28. Figur.

Fig. 28. *Eine Parabel zu beschreiben, die eine gegebene Curve zweiter Classe in einem gegebenen Puncte osculirt und deren Durchmesser einer gegebenen geraden Linie parallel sind.*

Diese Aufgabe ist wiederum eine Modification der vorigen. Wenn die gerade Linie CS die gegebene ist und, parallel mit sich selbst, immer weiter fortrückt, so nähert sich die Tangente CS' immer mehr der Tangente C'S', der Punct S' immer mehr dem Berührungspuncte σ' auf der letztgenannten Tangente. Wenn wir daher $\sigma'\pi$ parallel mit der gegebenen geraden Linie ziehen, so erhalten wir denjenigen Punct, π, durch welchen die gemeinschaftliche Tangente der gegebenen und der gesuchten Curve geht.

Fig. 27. 662. Wenn wir annehmen, dass der Punct C' mit dem Puncte C zusammenfällt, so erhalten wir die Berührungspuncte σ und σ' statt der Puncte S und S'. Also:

Wenn man von irgend einem Punete der Tangente im Oseulationspuncte zweier Curven zweiter Classe zwei Tangenten an dieselben legt, so liegen die beiden Berührungspuncte auf diesen Tangenten mit dem Durchschnitte der gemeinschaftlichen Tangente beider Curven und jener Tangente im Osculationspuncte in gerader Linie.

Nach diesem Satze können wir sogleich in den Aufgaben der vorigen Nummer auf jeder Tangente den Berührungspunct finden. Wir erhalten zum Beispiel den Berührungspunct σ auf CS, wenn wir durch P und den Berührungspunct σ', der auf der gegebenen Curve liegt, eine gerade Linie legen.

Wir können hiernach ferner auch folgende Aufgabe construiren:

Digitized by Google

Eine Curve zweiter Classe zu beschreiben, welche eine gegebene in einem gegebenen Puncte osculirt, eine gegebene gerade Linie berührt und durch einen gegebenen Punct geht.

Wir wollen zuvörderst voraussetzen, dass die gegebene gerade Linie die gegebene Curve berühre. Demnach sei OM die gegebene Curve, O der Osculationspunct, σ der gegebene Punct und PT die gegebene gerade Linie, welche der Tangente im Osculationspuncte in P begegne. Man ziehe die gerade Linie σP, von welcher die gegebene Curve in σ' und σ_1 geschnitten werde. In diesen beiden Puncten construire man die Tangenten, welche der Tangente in O in zwei Puncten begegnen. Wenn man diese Durchschnittspuncte (von welchen C der eine ist) mit dem Puncte σ verbindet, so erhält man zwei Tangenten derjenigen beiden Curven, welche den Forderungen der Aufgabe Genüge leisten.

Wenn die gegebene gerade Linie keine Tangente der gegebenen Curve ist, so können wir leicht irgend eine andere Curve zweiter Classe construiren, welche die gegebene in dem gegebenen Puncte osculirt und die gegebene gerade Linie berührt: und diese Curve alsdann statt der gegebenen betrachten. Es bieten sich in dieser Construction mehrere Vereinfachungen dar.

Als Modification der letzten Aufgabe können wir folgende ansehen:

Eine Parabel zu beschreiben, welche eine gegebene Parabel (beliebige Curve zweiter Classe, beliebige Curve) in einem gegebenen Punete osculirt und durch einen zweiten gegebenen Punct geht.

663. Wenn man, statt die Puncte C und C' beide auf der Tangente im Oscula- Fig. 29.
tionspuncte zweier Curven zweiter Classe anzunehmen, einen derselben auf der gemeinschaftlichen Tangente annimmt, so ergibt sich folgender Satz:

Wenn man von irgend zwei Puncten der Tangente im Osculationspunete und der gemeinschaftlichen Tangente zweier sich dreipunctig osculirender Curven zweiter Classe an jede Curve noch zwei Tangenten zieht, so schneiden sich solche zwei Tangenten-Paare in solchen zwei Puncten, die mit dem Osculationspunete in gerader Linie liegen.

Hiernach ergibt sich eine neue Construction der ersten Aufgabe der 661. Nummer, die auch dann unmittelbar ihre Anwendbarkeit behält, wenn der Durchschnitt der Tangente im Osculationspuncte und der gemeinschaftlichen Tangente der gegebenen und der zu construirenden Curve sehr weit entfernt liegt. Es sei wiederum OM die gegebene Curve, die in O osculirt werden soll, es seien SC und SC' die beiden zu berührenden geraden Linien. Den Durchschnitt dieser beiden geraden Linien, S, verbinde man mit O, lege von C, dem Durchschnitte einer (beliebigen) derselben mit der Tangente in O die Tangente CS' an die gegebene Curve, von welcher OS in S' geschnitten werde, und endlich von S' die Tangente S'C' an die gegebene Curve, von welcher SC' in C' geschnitten werde. C' ist alsdann ein Punct der gemeinschaftlichen Tangente der gegebenen und der zu construirenden Curve.

Um (etwa) auf der gegebenen geraden Linie CD den Berührungspunct zu bestimmen, legen wir vom Puncte D aus, in welchem diese gerade Linie der gemeinschaftlichen Tangente DC' begegnet, die Tangente Dσ' an die gegebene Curve, und verbinden dann den Punct σ', in welchem diese Tangente und die Tangente CS' sich schneiden, mit dem Osculationspuncte O durch eine gerade Linie. Diese gerade Linie bestimmt alsdann auf CS den gesuchten Berührungspunct σ.

Digitized by Google

Man erhält ebenfalls aus dem Vorstehenden andere Constructionen für die übrigen Aufgaben der beiden vorigen Nummern.

664. Wenn wir zwei sich doppelt berührende Curven mit einem Systeme von zwei Puncten zusammenstellen, so erhalten wir folgende beiden Sätze:

Wenn man von irgend zwei Puncten der beiden gemeinschaftlichen Tangenten zweier sich doppelt berührender Curven zweiter Classe noch zwei Tangenten an jede derselben legt, so schneiden sich diese zweimal zwei Tangenten in solchen zwei Puncten, die mit dem Durchschnittspuncte der gemeinschaftlichen Tangenten in gerader Linie liegen.

Wenn man von irgend zwei Puncten einer der beiden gemeinschaftlichen Tangenten zweier sich doppelt berührender Curven zweiter Classe noch zwei Tangenten an jede derselben legt, so schneiden sich diese zweimal zwei Tangenten in solchen zwei Puncten, die mit dem Berührungspuncte auf der andern gemeinschaftlichen Tangente in gerader Linie liegen.

Ich übergehe alle einzelnen Constructionen, die sich an diese beiden Sätze anknüpfen. Wenn die beiden Curven unter einander, statt des doppelten Contactes, einen vierpunctigen haben, so erhalten wir den Satz der 587. Nummer. Ich beschränke mich hier ebenfalls darauf, bloss zu erinnern, dass die beiden Curven auch Hyperbeln oder Parabeln sein können, die sich in unendlicher Entfernung osculiren. Wir kommen alsdann zu Sätzen und Constructionen, von denen wir einige direct schon in der 595. Nummer hergeleitet haben.

Fig. 30. 665. Wenn wir mit einer Curve zweiter Classe zwei Systeme von zwei Puncten zusammenstellen, so müssen, nach den Voraussetzungen der 659. Nummer, die Puncte dieser beiden Systeme B und B', C und C', wie in der 30. Figur, auf zwei Tangenten BC und B'C' der Curve angenommen werden. Die drei Puncte, welche in gerader Linie liegen, sind alsdann S, der Durchschnitt der von B und B' an die Curve gelegten Tangenten BS und B'S, ferner S' der Durchschnitt der beiden Tangenten CS' und C'S' und endlich P, der Durchschnitt von BC' und B'C. Der hiermit bewiesene Satz ist also der bekannte BRIANCHONsche.

Die drei Diagonalen eines um eine Curve zweiter Classe beschriebenen Sechsecks gehen durch ein und denselben Punct.

Fig. 31. 666. Wir können endlich noch (Fig. 31) drei Systeme von zwei Puncten: A und A', B und B', C und C' zusammenstellen, die auf zwei geraden Linien vertheilt liegen. Die drei in gerader Linie liegenden Durchschnittspuncte sind alsdann folgende:

(AB', A'B), (AC', A'C), (BC', B'C),

oder S, S' und S''. Da wir die beiden Puncte jedes Systems mit einander vertauschen können, so erhalten wir sechsmal drei solcher Durchschnittspuncte und hiernach folgenden Satz.

Wenn man auf jeder von zwei gegebenen geraden Linien drei Puncte beliebig annimmt und diese Puncte durch neun gerade Linien verbindet, so erhält man sechsmal drei Durchschnittspuncte, die in gerader Linie liegen. (427)

667. Wir sind in den letzten Nummern zu verschiedenen einzelnen Fällen des Satzes der 659. Nummer gekommen, indem wir besondere Voraussetzungen über die Natur der drei zusammengestellten Oerter zweiter Classe, und über die beiden, ihnen allen dreien gemeinschaftlichen, Tangenten gemacht haben. Wir gelangen noch zu andern speciellen

Sätzen, wenn wir über die übrigen gemeinschaftlichen Tangenten je zweier der drei Oerter besondere Bestimmungen machen, und namentlich annehmen, dass dieselben paarweise zusammenfallen. Auf diese Weise ergibt sich unter andern Sätzen auch der nachstehende:

Wenn von solchen Curven, welche alle zwei gegebene gerade Linien berühren, zwei von jeder der übrigen berührt werden, so gehen diejenigen geraden Linien, welche die jedesmaligen beiden Berührungspuncte auf jenen beiden Curven verbinden, durch einen festen Punct.

Dieser feste Punct ist ein homologer Punct jener beiden Curven, die wir durch K und K′ bezeichnen wollen, und zwar derjenige, welcher mit dem gemeinschaftlichen homologen Puncte aller Curven zusammengehört. Wenn man statt der beiden Curven K und K′ zwei Puncten-Systeme B und B′, C und C′, oder, was dasselbe bedeutet, zwei (begränzte) gerade Linien BB′ und CC′ nimmt, so sind alle berührenden Curven demselben Viereck BCC′B′ eingeschrieben und wir erhalten folgenden bekannten Satz:

Diejenige gerade Linie, welche die Berührungspuncte auf zwei gegenüberliegenden Seiten eines einer gegebenen Curve zweiter Classe umschriebenen Vierecks verbindet, geht durch den Durchschnitt der Diagonalen desselben.

Wenn einer von solchen vier Oertern zweiter Classe, welche zwei gegebene gerade Linien berühren, die drei übrigen Oerter ebenfalls berührt, so bilden die drei Berührungspuncte ein Dreieck, dessen Seiten durch die drei (659) in gerader Linie liegenden homologen Puncte je zweier der letztgenannten drei Curven gehen. Die Bestimmung der drei Berührungspuncte, wenn wir diese drei Curven als gegeben betrachten, kommt also darauf hinaus, ein Dreieck zu beschreiben, dessen Winkelpuncte auf drei gegebenen Curven liegen und dessen Seiten durch drei bekannte, in gerader Linie liegende Puncte gehen. Diese Aufgabe, von der noch bei einer späteren Gelegenheit die Rede sein wird, gestattet, im Allgemeinen, acht verschiedene Auflösungen, und die Construction derselben lässt sich, im vorliegenden Falle, auf elementarem Wege ausführen. Hier beschränke Fig. 31.
ich mich auf den Fall, dass, statt der drei Curven, drei Puncten-Systeme A und A′, B und B′, C und C′ gegeben sind, wo wir alsdann folgender Aufgabe begegnen:

Eine Curve zweiter Classe zu beschreiben, die fünf gegebene gerade Linien berührt.

Zwei dieser fünf geraden Linien sind MN und MN′. Die Bestimmung der Berührungspuncte auf den drei übrigen, auf AA′, BB′ und CC′, kommt darauf hinaus, dem von diesen geraden Linien gebildeten Dreieck ein anderes einzuschreiben, dessen Seiten durch die drei Puncte S, S′ und S″ gehen. Diese Construction ergibt sich zugleich aus dem bekannten Satze, dass der geometrische Ort für die dritten Winkelpuncte solcher Dreiecke, deren beide ersten Winkelpuncte auf zwei gegebenen geraden Linien liegen und deren Winkelpuncte durch drei in gerader Linie liegende Puncte gehen, eine neue gerade Linie ist. *)

*) Wenn fünf Tangenten einer Curve zweiter Classe gegeben sind, so können wir die Berührungspuncte auf denselben auch nach dem BRIANCHON'schen Satze (665) bestimmen, wenn wir annehmen, dass zwei Seiten des umschriebenen Sechsecks zusammenfallen und wir also statt desselben ein Fünfeck und auf einer Seite desselben den Berührungspunct erhalten. Wir brauchen alsdann nur auf ganz ähnliche Weise, wie in der 319. Nummer, zu construiren.

668. Es sei, indem wir zu einem zweiten Schema übergehen,

$$U = 0$$

die Gleichung irgend eines Ortes zweiter Classe, der von zweien andern, deren Gleichungen folgende seien:

$$U' = 0, \qquad U'' = 0,$$

doppelt berührt wird. Alsdann erhalten wir, bei gehöriger Bestimmung von μ' und μ'', folgende identische Gleichungen:

$$\begin{aligned} U+\mu' U' &= \pm p^2, \\ U+\mu'' U'' &= \pm q^2, \end{aligned} \qquad (1)$$

indem wir durch

$$p = 0, \qquad q = 0, \qquad (2)$$

die Gleichungen des Durchschnittspunctes der gemeinschaftlichen Tangenten des ersten und zweiten und des ersten und dritten Ortes darstellen und in den zweiten Theilen der Gleichungen (1) das gehörige Zeichen nehmen. Wenn wir die beiden Gleichungen (1) von einander abziehen, so kommt:

$$\mu' U' - \mu'' U'' = \pm(p^2 \pm q^2). \qquad (3)$$

Wenn in der Klammer dieser Gleichung das untere Zeichen genommen werden muss, so stellt die Gleichung

$$\mu' U' - \mu'' U'' = \pm(p^2 - q^2) = \pm(p+q)(p-q) = 0$$

ein System zweier Puncte dar, die, was der erste Theil dieser Gleichung zeigt, zwei zusammengehörige homologe Puncte des zweiten und dritten gegebenen Ortes sind. Die Gleichungen dieser beiden Puncte sind:

$$p+q = 0, \qquad p-q = 0;$$

die Puncte selbst liegen also mit den Puncten (2) in gerader Linie und bilden mit denselben ein System von vier harmonischen Theilungspuncten. (410)

Wenn in der Klammer der Gleichung (3) das obere Zeichen gilt, so stellt die Gleichung

$$\mu' U' - \mu'' U'' = \pm(p^2 + q^2) = 0$$

zwei imaginäre Puncte, oder, mit andern Worten, eine gerade Linie dar, die, was der erste Theil dieser Gleichung zeigt, eine homologe gerade Linie der zweiten und dritten gegebenen Curve ist. Diese gerade Linie enthält die beiden Puncte (2), denn die letzte Gleichung wird befriedigt, wenn die Gleichungen dieser Puncte beide zugleich befriedigt werden. Also:

Wenn ein Ort zweiter Classe zwei andere Oerter derselben Classe beide doppelt berührt, so liegen die beiden Durchschnittspuncte der (reellen oder imaginären) gemeinschaftlichen Tangenten des ersten und jedes der beiden übrigen Oerter, und zwei (reelle oder imaginäre) homologe Puncte der letztgenannten Oerter in gerader Linie und sind vier harmonische Theilungspuncte.

Statt der doppelten Berührung können wir in den vorstehenden Entwicklungen insbesondere auch eine vierpunctige Osculation nehmen; an die Stelle des Durchschnittes der beiden gemeinschaftlichen Tangenten tritt alsdann der Osculationspunct.

Wenn wir mit einer Curve ein System von zwei Puncten zusammenstellen wollen, so müssen wir, wenn von einer doppelten Berührung die Rede ist, diese Puncte auf dem Umfange der Curve annehmen. Will man zwei Systeme von zwei Puncten zusammenstellen, so müssen, unter gleicher Voraussetzung, alle vier Puncte in gerader Linie liegen.

Digitized by Google

Hiernach ergeben sich mancherlei einzelne Sätze, von denen wir beispielsweise nur einige hervorheben wollen.

669. Wenn wir für den ersten Ort irgend eine Curve und für die beiden andern Oerter zwei Puncten-Systeme nehmen, so dass also eine Curve und vier Puncte auf dem Umfange derselben gegeben sind, so begegnen wir folgendem Satze:

Wenn man in eine Curve zweiter Classe ein Viereck beschreibt, dessen Winkelpuncte die Berührungspuncte auf den Seiten eines derselben umschriebenen Vierecks sind, so liegen die Durchschnittspuncte der beiden Paare nicht an einander anstossender Seiten jedes der beiden Vierecke alle vier in gerader Linie und bilden vier harmonische Theilungspuncte.

Dieser Satz umfasst alle verschiedenen Fälle, wenn wir die Definition des Vierecks ganz allgemein nehmen.

670. Wir wollen ferner für den ersten Ort eine Curve nehmen und mit derselben eine zweite dieselbe doppelt berührende Curve und ein System von zwei auf dem Umfange derselben liegenden Puncten zusammenstellen, und zuvörderst voraussetzen, dass die beiden Curven sich vierpunctig osculiren. Es sei (Fig. 32) OMN die erste, Fig. 32.
OPQ die zweite Curve und M und N seien die beiden gegebenen Puncte. Wenn wir alsdann von M und N vier Tangenten an die gegebene Curve legen, so bilden diese vier Tangenten eine vollständige vierseitige Figur, deren eine Diagonale (in der Figur SS') durch den Osculationspunct geht. Hiernach ergibt sich eine Construction folgender Aufgabe:

Eine Curve zweiter Classe zu beschreiben, die eine gegebene vierpunctig osculirt und überdiess durch irgend zwei gegebene Puncte geht.

Die gegebene Curve sei OPQ, die gegebenen Puncte M und N und zunächst werde der Osculationspunct gesucht. Man lege zu diesem Ende von jedem der beiden gegebenen Puncte zwei Tangenten an die gegebene Curve. Diese beiden Tangenten-Paare schneiden sich in den vier Puncten S und S', S'' und S''', durch welche sich noch zwei gerade Linien SS' und S''S''' legen lassen. Diese beiden geraden Linien schneiden die gegebene Curve, im Allgemeinen, in vier Puncten O, O', O'' und O''', und diese Puncte sind diejenigen, in welchen die gegebene Curve von denjenigen Curven, die den Forderungen der Aufgabe Genüge leisten, und deren es also, im Allgemeinen, vier gibt, osculirt wird.

Wir können hiernach ferner sogleich die Tangenten (etwa) derjenigen Curve, welche die gegebene in O osculirt, in den beiden gegebenen Puncten M und N construiren, da P, der Durchschnittspunct derselben, der vierte harmonische Theilungspunct zu den drei Puncten O, S und S' ist, (669)

Wir wollen ferner folgende Aufgabe construiren:

Eine Curve zweiter Classe zu beschreiben, die eine gegebene doppelt berührt und überdiess durch drei gegebene Puncte geht.

Wenn wir die gegebene Curve nach einander mit irgend zweimal zwei der drei gegebenen Puncte zusammenstellen, so erhalten wir zweimal zwei Linien-Paare, die dem Linien-Paare SS' und S''S''' der 32. Figur entsprechen. Diese beiden Linien-Paare schneiden sich in vier Puncten und diese vier Puncte sind die Durchschnittspuncte der (reellen oder imaginären) gemeinschaftlichen Tangenten der gegebenen Curve und derje-

nigen vier, welche den Bedingungen der Aufgabe Genüge leisten. Die Tangenten dieser Curven in den drei gegebenen Puncten lassen sich wiederum leicht construiren.

Da drei gegebene Puncte sich auf dreifache Art zu zwei combiniren lassen, so erhalten wir dreimal zwei gerade Linien, die nothwendig durch dieselben vier festen Puncte gehen müssen. Diese vier Puncte sind diejenigen, in welchen sich die drei Diagonalen von solchen der gegebenen Curve umschriebenen Sechsecken schneiden, deren Seiten, paarweise genommen, durch die drei gegebenen Puncte gehen. Wir sind also auf indirectem Wege zu dem BRIANCHON'schen Satze vom umschriebenen Sechsecke (666) gelangt und haben zugleich eine geometrische Bedeutung des Durchschnittspunctes der drei Diagonalen nachgewiesen. Es ist nemlich dieser Punct der Durchschnittspunct der (reellen oder imaginären) gemeinschaftlichen Tangenten der gegebenen Curve und einer andern, welche dieselbe doppelt berührt und ausserdem durch die drei Durchschnitte der gegenüberliegenden Seiten des umschriebenen Sechsecks geht.

671. Wenn wir drei Oerter betrachten, von welchen jeder den ersten gegebenen Ort doppelt berührt und

$$U''' = 0$$

für die Gleichung des neu hinzugekommenen Ortes nehmen, so erhalten wir nach dem Schema der 668. Nummer, wenn

$$r = 0$$

die Gleichung des Durchschnittes der gemeinschaftlichen Tangenten des ersten Ortes und des neu hinzugekommenen ist und wir den Coefficienten μ''' gehörig bestimmen:

$$\begin{aligned} \mu'U' - \mu''U'' &= \pm(p^2 - q^2) = 0, \\ \mu'U' - \mu'''U''' &= \pm(p^2 - r^2) = 0, \\ \mu''U'' - \mu'''U''' &= \pm(q^2 - r^2) = 0. \end{aligned} \qquad (4)$$

Wenn wir die beiden ersten dieser drei Gleichungen von einander abziehen, so kommen wir zu der dritten Gleichung. Hierin ist folgender Satz enthalten:

Wenn ein gegebener Ort zweiter Classe von dreien andern Oertern derselben Classe doppelt berührt wird, so sind diejenigen drei Paare homologer Puncte je zweier der letztgenannten Oerter, welche mit den bezüglichen Durchschnittspuncten der (reellen oder imaginären) gemeinschaftlichen Tangenten jedes dieser Oerter und des erstgenannten in gerader Linie liegen, die gegenüberstehenden Winkelpuncte einer vollständigen vierseitigen Figur.

Die vorstehenden Gleichungen (4) beziehen sich ausschliesslich auf denjenigen Fall, wo die bezüglichen homologen Puncte je zweier derjenigen drei Curven, welche die erste gegebene doppelt berühren, reell sind. Es können auch vier dieser drei Puncte imaginär sein, alsdann müssen wir in jenen Gleichungen entweder das Zeichen von p^2 oder von q^2 oder von r^2 ändern. In diesem Falle gestattet der letzte Satz unmittelbar keine geometrische Construction.

Ich kann auch hier einige besondere Fälle des letzten Satzes, den vollständig zu discutiren der Raum verbietet, nicht unerwähnt lassen.

672. Wenn wir für den ersten gegebenen Ort eine Curve und für die drei übrigen drei Systeme von zwei Puncten, die alsdann auf dem Umfange der Curve liegen müssen und die auch theilweise zusammenfallen und auch beliebig mit einander verwechselt werden können, nehmen, so erhalten wir den PASCAL'schen Satz vom eingeschriebenen Sechseck,

Digitized by Google

der uns eben so oft und ungesucht begegnet, als er eine grosse Rolle in dieser Art von Untersuchungen spielt.

673. Wenn wir für den ersten gegebenen Ort zweiter Classe ein System von zwei (reellen oder imaginären) Puncten, und für die übrigen drei Oerter Curven nehmen, und diese Curven also eine gemeinschaftliche Chorde haben, so liegen viermal drei Durchschnitte der gemeinschaftlichen Tangenten je zweier Curven in gerader Linie. Und dieser Satz besteht endlich auch dann, wenn jene gemeinschaftliche Chorde unendlich weit liegt, das heisst, wenn die Curven irgend drei ähnliche und ähnlich liegende, insbesondere drei Kreise, sind. Er erhält alsdann folgende Aussage:

Die Durchschnittspuncte der äussern und innern (reellen oder imaginären) gemeinschaftlichen Tangenten je zweier irgend dreier gegebener Kreise, sind solche sechs Puncte, von denen viermal drei in gerader Linie liegen (164).

674. Wenn wir für den ersten gegebenen Ort ein Puncten-System und für die drei übrigen Oerter ein zweites Puncten-System und zwei Curven nehmen, so müssen, den Voraussetzungen gemäss, diese beiden Curven sich in den beiden Puncten des ersten Systems schneiden und mit denselben Puncten müssen die Puncte des zweiten Systems in gerader Linie liegen. Hiernach erhalten wir folgenden Satz:

Wenn man von irgend zwei Puncten einer gemeinschaftlichen Chorde irgend zweier Curven zweiter Classe vier Tangenten an jede derselben legt, so erhält man zwei vollständige vierseitige Figuren, die den Curven beiden zugleich umschrieben sind, und in jeder Figur also, ausser den beiden Puncten der gemeinschaftlichen Chorde noch zwei Paare gegenüberliegender Winkelpuncte. Zwei homologe Puncte und zwei, auf zwiefache Art zu wählende, Paare gegenüberliegender Winkelpuncte der beiden umschriebenen Figuren bilden die Winkelpuncte einer neuen vollständigen vierseitigen Figur.

Wenn wir annehmen, dass die beiden auf der gemeinschaftlichen Chorde der beiden Curven liegenden Puncte zusammenfallen, so erhalten wir, statt des letzten Satzes, den nachstehenden:

Wenn man von irgend einem Puncte einer gemeinschaftlichen Chorde irgend zweier Curven zweiter Classe zwei Tangenten an jede derselben legt, so schneiden sich diejenigen vier geraden Linien, welche die beiden Berührungspuncte auf der einen Curve mit den beiden Berührungspuncten auf der andern Curve verbinden, in zwei zusammengehörigen homologen Puncten der beiden Curven (387).

Wir können die beiden Sätze dieser Nummer zur Construction der gemeinschaftlichen Tangenten zweier gegebener Curven zweiter Classe anwenden, wenn wir zwei Durchschnittspuncte dieser Curven kennen. Hier wollen wir Beispielsweise denjenigen Fall näher betrachten, wo die beiden gegebenen Curven eine Hyperbel und ein Kreis sind, die sich in vier reellen Puncten A, B, C und D schneiden und keine gemeinschaftlichen Tangenten haben; und wollen die beiden reellen homologen Puncte derselben construiren. Wenn wir zu diesem Ende von irgend einem Puncte P der gemeinschaftlichen Chorde BD aus zwei Tangenten an jede Curve legen, so geben, wenn M und N, M' und N' die vier Berührungspuncte sind, die beiden geraden Linien MM' und NN' durch den einen homologen Punct H und die beiden geraden Linien MN' und M'N durch den andern homologen Punct H'. Fig. 32.

Digitized by Google

Wir können hierbei auch nach dem ersten Satze dieser Nummer construiren und von zwei Puncten P und P' der Chorde BD aus Tangenten an die beiden Curven legen. Ziehen wir zum Beispiel die Tangenten PS und PS', P'S und P'S', so geht die gerade Linie, welche sich durch die beiden Puncte S und S' legen lässt, zugleich durch den homologen Punct H. Nehmen wir statt der beiden Tangenten P'S und PS die beiden Tangenten P'S, und PS, so erhalten wir die beiden Puncte S und S,, welche mit dem Puncte H' in gerader Linie liegen.

Wir würden dieselben homologen Puncte H und H' erhalten, wenn wir von Puncten der gemeinschaftlichen Chorde AC Tangenten an die beiden Curven legen. Aber von keinem Puncte der vier übrigen Chorden AB und CD, BC und DA lassen sich reelle Tangenten an beide Curven zugleich legen, die entsprechenden homologen Puncte sind imaginär. Die beiden durch diese vier imaginären homologen Puncte gehenden homologen geraden Linien (610) erhält man auf der Stelle. Man braucht zu diesem Ende bloss die beiden Chordalpuncte (363) der beiden gegebenen Curven Q und Q' mit dem dritten Chordalpuncte Q'' durch zwei gerade Linien zu verbinden. Auf ähnliche Weise liegen die beiden reellen homologen Puncte H und H' auf der geraden Linie, welche die beiden Chordalpuncte Q und Q' mit einander verbindet.

Die drei Chordalpuncte zweier Kegelschnitte sind die Winkelpuncte desjenigen Dreiecks, dessen Seiten die drei homologen geraden Linien derselben beiden Kegelschnitte sind. In Beziehung auf jeden derselben sind die drei Chordalpuncte die Pole der drei homologen geraden Linien, und, umgekehrt, diese sind die Polaren von jenen.

(Vergl. die 310. Nummer und die Schlussbemerkung der 384. Nummer.) —

675. Es seien, indem wir zu einem neuen Schema übergehen,

$$U = 0, \qquad U' = 0, \qquad U'' = 0, \qquad (1)$$

die Gleichungen irgend dreier gegebener Oerter zweiter Classe; alsdann stellen, wenn μ' und μ'' irgend zwei unbestimmte Coefficienten bedeuten, die Gleichungen:

$$U+\mu'U' = 0, \qquad U+\mu''U'' = 0, \qquad (2)$$

die wir, der Kürze halber, durch

$$V' = 0, \qquad V'' = 0,$$

bezeichnen wollen, irgend zwei solche neue Oerter derselben Classe dar, welche respective mit dem ersten und zweiten, und mit dem ersten und dritten gegebenen dieselben vier gemeinschaftlichen Tangenten haben. Wenn wir die beiden Gleichungen (2) von einander abziehen, so erhalten wir

$$\mu'U'-\mu''U'' = V'-V'' = W = 0,$$

indem wir zugleich jeden der beiden ersten, vollkommen identischen Ausdrücke $(\mu'U'-\mu''U'')$ und $(V'-V'')$, der Kürze halber, durch W bezeichnen. Die letzte Gleichung zeigt, dass die Curve $W = 0$ einerseits mit den beiden gegebenen Oertern $U' = 0$ und $U'' = 0$ und andrerseits mit den beiden Oertern $V' = 0$ und $V'' = 0$ dieselben vier gemeinschaftlichen Tangenten hat.

Die vier gemeinschaftlichen Tangenten irgend zweier gegebener Oerter zweiter Classe und die vier gemeinschaftlichen Tangenten irgend zweier anderer Oerter derselben Classe, welche mit jenen beiden gegebenen und irgend einem dritten gegebenen dieselben gemeinschaftlichen Tangenten haben, berühren alle acht ein und denselben neuen Ort zweiter Classe.

Digitized by Google

676. Zu demselben Resultate kommen wir auch nach folgendem Schema, in welchem ich die Bezeichnung mit der Bezeichnung in der vorigen Nummer übereinstimmend wähle. Es stellt nemlich die Gleichung

$$V'-U-\mu''U'' = W = 0$$

irgend einen Ort zweiter Classe dar. Um diese Gleichung zu construiren, setzen wir zugleich:

$$V'-U = \mu U' = 0 \quad \text{und} \quad U'' = 0,$$
$$U+\mu''U'' = V'' = 0 \quad , \quad V' = 0.$$

Wir sehen hieraus, dass, wie oben, die beiden Curven $U' = 0$ und $U'' = 0$, so wie die Curven $V' = 0$ und $V'' = 0$ mit der Curve $W = 0$ dieselben vier gemeinschaftlichen Tangenten haben. Betrachten wir die drei Curven $U = 0$, $U'' = 0$ und $V' = 0$ als gegeben, so erhält der letzte Satz folgende Aussage:

Wenn irgend drei Oerter zweiter Classe gegeben sind, so hat jeder der beiden letztern mit einem beliebigen Orte, der mit dem andern derselben und dem ersten gegebenen dieselben gemeinschaftlichen Tangenten hat, vier gemeinschaftliche Tangenten; die acht gemeinschaftlichen Tangenten, die man auf diese Weise erhält, berühren ein und denselben neuen Ort zweiter Classe.

677. Wir wollen hier nur einige ganz specielle Fälle der Sätze der beiden letzten Nummern hervorheben, und zwar zuerst für die drei Oerter Fig. 34.

$$U = 0, \qquad U'' = 0, \qquad V' = 0,$$

die drei Puncten-Systeme Q und Q', R und R', S und S' und demnächst für die beiden Oerter:

$$U' = 0, \qquad V'' = 0,$$

die beiden Puncten-Systeme N und N', M und M' nehmen. Alsdann berühren die acht geraden Linien SM, SM', S'M, S'M', RN, RN', R'N und R'N' dieselbe Curve zweiter Classe, welche durch die Gleichung:

$$W = 0$$

dargestellt wird und die Hyperbel der 34. Figur ist.

An das Vorstehende schliessen sich zierliche Constructionen einer Curve zweiter Classe an, wenn fünf Tangenten derselben gegeben sind. Diese fünf gegebenen Tangenten können wir beliebig unter den letztgenannten acht geraden Linien auswählen und erhalten alsdann verschiedene Constructionen der drei übrigen.

Es seien zum Beispiel SM, SM', S'M, S'M' und RN die fünf gegebenen zu berührenden geraden Linien. Die ersten vier dieser geraden Linien bilden ein Viereck, (das wir auf doppelte Weise nehmen können), dessen gegenüberliegende Winkelpuncte S und S', M und M' seien. Auf der fünften gegebenen geraden Linie nehme man zwei Puncte R und N beliebig an, ziehe RM und SN, die sich in Q, und RM' und S'N, die sich in Q' schneiden. Ferner ziehe man Q'M und QM', die sich in R', und Q'S und QS', die sich in N' schneiden. RN', R'N und R'N' sind alsdann drei neue Tangenten der zu construirenden Curve.

Um ein zweites Beispiel zu nehmen, seien S'M, S'M', R'N, R'N' und SM die fünf gegebenen geraden Linien, wodurch die Durchschnittspuncte S', R' und M bestimmt sind. Man nehme einen Punct Q beliebig an, ziehe QM und nehme auf dieser geraden Linie den Punct R wiederum beliebig an. Man ziehe QS', wodurch auf R'N' der Punct N', QR', wodurch auf S'M' der Punct M' bestimmt wird, ziehe RM' und R'M, die sich in Q' schneiden, Q'S', welche R'N in N begegnet und endlich SM', RN und RN'.

Digitized by Google

Fig. 35. 678. *Eine Curve zweiter Classe zu beschreiben, welche, mit einer gegebenen zusammengestellt, zwei gegebene Puncte zu homologen Puncten hat, und überdiess eine gegebene gerade Linie berührt.*

Es sei RN die gegebene gerade Linie und M und M' seien die beiden gegebenen Puncte. Wenn diese Puncte beide ausserhalb der gegebenen Curve liegen, so können wir die vorstehende Aufgabe unmittelbar auf die Aufgabe der vorigen Nummer zurückführen, indem wir von den beiden gegebenen Puncten Tangenten an die gegebene Curve legen. Diese Tangenten werden aber paarweise imaginär, wenn M und M' innerhalb der gegebenen Curve liegen. In diesem Falle kommt die vorstehende Aufgabe darauf hinaus, eine Curve zweiter Classe zu beschreiben, welche fünf gegebene gerade Linien, von welchen zwei und zwei imaginär sind, berührt. Diese imaginären geraden Linien lassen sich allgemein als die imaginären gemeinschaftlichen Tangenten zweier gegebener Curven zweiter Classe geometrisch bestimmen, oder auch, wie in dem vorliegenden Falle, durch die eine dieser Curven und durch zwei innerhalb derselben liegende Puncte M und M', die reellen Durchschnittspuncte der beiden Paare imaginärer gemeinschaftlichen Tangenten.

Die Construction dieser Aufgabe stimmt buchstäblich mit der ersten Construction der vorigen Nummer überein, wenn wir nur die gegebene Curve an die Stelle des gegebenen Puncten-Systems S und S' setzen. Es ist daher hinreichend, bloss die 35. Figur hinzuzufügen.

679. Wenn man annimmt, dass die beiden gegebenen Puncte, M und M', zusammenfallen, so besteht noch immer die erste Construction der 677. Nummer, gibt aber alsdann nur eine einzige neue Tangente. Die verlangte Curve hat alsdann mit der gegebenen einen doppelten Contact, der imaginär wird, wenn die zusammenfallenden Puncte innerhalb der gegebenen Curve angenommen werden.

Eine Curve zweiter Classe zu beschreiben, welche mit einer gegebenen auf einer gegebenen (der Curve begegnenden oder nicht begegnenden) geraden Linie einen (reellen oder imaginären) doppelten Contact hat, und überdiess eine zweite gegebene gerade Linie berührt.

Fig. 36. Es sei PP die erste gegebene gerade Linie, im Pole derselben, in Beziehung auf die gegebene Curve, nehme man die beiden zusammenfallenden Puncte M und M' an. (616) Die zweite gegebene gerade Linie sei RN, und auf derselben bestimme man willkührlich die beiden Puncte R und N. Man lege vom Puncte N aus zwei Tangenten an die gegebene Curve, und verbinde die Puncte M (M') und R durch eine gerade Linie, welche jenen Tangenten in Q und Q' begegne. Durch Q und Q' lege man zwei neue Tangenten an die gegebene Curve, welche sich in N' schneiden, und ziehe endlich RN'. Diese gerade Linie ist eine neue Tangente der verlangten Curve.

Wenn man die beiden zusammenfallenden Puncte M und M' auf dem Umfange der gegebenen Curve, etwa in O, annimmt, so enthält das Vorstehende eine neue Construction folgender Aufgabe:

Eine Curve zweiter Classe zu beschreiben, die eine gegebene in einem gegebenen Puncte, der auch auf einer Asymptote derselben unendlich weit liegen kann, vierpunctig osculirt und überdiess eine gegebene gerade Linie berührt.

Es erhellet zugleich aus der letzten Construction, dass alle Curven zweiter Classe, welche eine gegebene gerade Linie berühren, und überdiess eine gegebene Curve derselben

Digitized by Google

Classe, auf solche Weise doppelt berühren, dass die Pole der bezüglichen Berührungs-Chnrden auf einer gegebenen geraden Linie liegen, ansserdem noch ein und dieselbe zweite gerade Linie berühren. An diese Bemerknng schliesst sich eine neue Construction einer Curve zweiter Classe an, welche eine gegebene doppelt und überdiess drei gegebene gerade Linien berührt, nnd einer Curve zweiter Classe, welche eine gegebene vierpunctig osculirt und überdiess zwei gegebene gerade Linien berührt.

680. Die allgemeine Aufgabe, einen Ort zweiter Classe zu beschreiben, der mit zwei gegebenen dieselben vier, reellen oder imaginären, Tangenten bat und eine gegebene gerade Linie berührt, hat immer eine einzige reelle Auflösung. Wenn insbesondere die gegebene gerade Linie eine hnmologe gerade Linie der beiden gegebenen Oerter ist, sn ist der verlangte Ort nffenbar das System der entsprechenden beiden bomnlngen Puncte der beiden gegebenen Oerter. Jede nene Tangente des verlangten Ortes, die wir nach der ersten Constructionsweise der 677. Nummer erhalten, fällt alsdann nothwendig mit der gegebenen geraden Linie znsammen. Diess ist nffenbar in dem Falle, dass jene beiden hnmnlngen Puncte imaginär sind nnd wenn es für diesen Fall gilt, muss es nffenbar anch für den andern Fall gelten, dass jene Pnncte reell sind. Hiernach erhalten wir folgende charakteristische Eigenschaft einer beliebigen homologen geraden Linie zweier gegebener Curven zweiter Classe.

Wenn irgend zwei Curven zweiter Classe gegeben sind und man legt von einem beliebigen Punete einer ihrer hnmnlogen geraden Linien zwei Tangenten an eine Curve, und von einem zweiten beliebigen Punete derselben Linie zwei Tangenten an die andere Curve, und endlich von zwei gegenüberliegenden Durchschnittspuncten dieser beiden Tangenten-Paare noch zwei Tangenten an jede Curve: so schneiden sich diese zweimal zwei Tangenten in zwei neuen Puneten der hnmnlogen geraden Linie.

681. Ich darf hier diese Erörterungen nicbt weiter ausdehnen, und schliesse diese Abtheilung mit einigen Andeutungen über die gemmetrische Bedeutung der bisher gebranchten unbestimmten Cnefficienten.

Wenn zwei Oerter zweiter Classe durch fnlgende beiden Gleichungen gegeben sind:

$$A\,w^2+2B\,vw+C\,v^2+2D\,uw+2E\,uv+F\,n^2 = U = n,$$
$$A'w^2+2B'vw+C'v^2+2D'nw+2E'uv+F'n^2 = U' = o,$$

nnd mit diesen beiden Oertern irgend ein dritter Ort, dessen Gleichnng:

$$A''w^2+2B''vw+C''v^2+2D''uw+2E''uv+F''u^2 = U'' = o,$$

dieselben vier gemeinschaftlichen Tangenten hat, sn ergibt sich, wenn μ' nnd μ'' unbestimmte Cnefficienten bedeuten:

$$U+\mu'U' = \mu''U''. \qquad (1)$$

Der dritte Ort ist vollknmmen bestimmt, wenn der nnbestimmte Coefficient μ' gegeben ist, nnd, umgekehrt, wenn der dritte Ort gegeben ist, lässt sich leicht, auf verschiedene Art, der Werth jenes nnbestimmten Coefficienten cnnstruiren. Wir wnllen, was erlaubt ist, nhne der Allgemeinheit irgend Abbruch zn thun, $A = A' = A'' = 1$ setzen. Wenn wir die Gleichung (1), in Beziehnng auf w, differentiiren, sn komnt:

$$\frac{dU}{dw}+\mu'\frac{dU'}{dw} = \mu''\frac{dU''}{dw},$$

nnd die drei partiellen Differential-Coefficienten dieser Gleicbung, Ausdrücke von der Fnrm $(w+Bv+Du)$, gleich Null gesetzt, stellen die Mittelpnncte der drei Curven dar. Wenn wir also die Abstände des Mittelpnnctes der dritten Curve von den Mittelpuncten

Digitized by Google

der ersten und zweiten Curve p und p' nennen, so ist nach der 410. Nummer:

$$\mu' = \pm\frac{p'}{p}, \qquad (2)$$

wobei wir das obere oder untere Zeichen nehmen müssen, je nachdem der dritte Mittelpunct zwischen die beiden ersten fällt oder nicht.

Der Raum verbietet, in Constructionen irgend einer Art hier einzugehen.

Wenn wir die Gleichung (1), in Beziehung auf v, differentiiren, so kommt:

$$\frac{dU}{dv} + \mu'\frac{dU'}{dv} = \mu''\frac{dU''}{dv}.$$

Die drei partiellen Differential-Coefficienten dieser Gleichung, Ausdrücke von der Form (Bw+Cv+Eu), gleich Null gesetzt, stellen die drei Pole der zweiten Axe, in Beziehung auf die drei Curven, dar. Bezeichnen wir die Abstände des dritten Poles von dem ersten und zweiten durch q und q', so kommt:

$$\mu' = \pm\frac{B'}{B}\cdot\frac{q'}{q}.$$

Aus der Zusammenstellung dieser Gleichung mit der Gleichung (2) folgt:

$$\frac{p'}{p} = \frac{B'}{B}\cdot\frac{q'}{q}. \qquad (3)$$

B und B' sind die Abstände der Mittelpuncte der beiden ersten Curven von der zweiten Axe. Das Verhältniss dieser Abstände bleibt dasselbe, wenn wir diese Axe um denjenigen Punct beliebig sich drehen lassen, in welchem dieselbe diejenige gerade Linie, welche jenen Mittelpunct enthält, schneidet. Also:

Das Verhältniss der gegenseitigen Abstände der drei Pole einer beliebigen Transversalen, in Beziehung auf drei Curven zweiter Classe, die demselben Viereck eingeschrieben sind, bleibt dasselbe, wenn die Transversale sich um ihren Durchschnittspunct mit der durch die Mittelpuncte der drei Curven gehenden geraden Linie beliebig dreht.

Fig. 37. Wenn wir insbesondere für die beiden gegebenen Oerter zwei Puncten-Systeme, P und P', Q und Q', nehmen, so ist der dritte Ort irgend eine Curve, die einem gegebenen Viereck, etwa dem Viereeke PQP'Q', eingeschrieben ist. Wenn wir die vier Seiten dieses Vierecks als vier Transversalen betrachten, so sind die drei Pole derselben, in Beziehung auf die drei Oerter, die beiden auf derselben liegenden Winkelpuncte und der Berührungspunct. Wenn wir also die Segmente, welche auf den vier Seiten durch die vier Berührungspuncte bestimmt werden, a und a', b und b', c und c', d und d' nennen, ferner die Abstände der Mitten der beiden Diagonalen von den vier Seiten M, N, O, P und M', N', O', P', und endlich $\frac{p'}{p} = \frac{C''C'}{C''C} = \varkappa$ setzen, so gibt die Gleichung (3):

$$\frac{a'}{a} = \varkappa\frac{M'}{M}, \qquad \frac{b'}{b} = \varkappa\frac{N'}{N}, \qquad \frac{c'}{c} = \varkappa\frac{O'}{O}, \qquad \frac{d'}{d} = \varkappa\frac{P'}{P}.$$

Hieraus folgt:

$$\frac{a'.b.c'.d}{a.b'.c.d'} = \frac{M'.N.O'.P}{M.N'.O.P'} = \frac{\sin\alpha'.\sin\beta.\sin\gamma'.\sin\delta}{\sin\alpha.\sin\beta'.\sin\gamma.\sin\delta'} = 1.$$

(Vergleiche die Note zur 441. Nummer.) Der hierin enthaltene Satz ist folgender:

Wenn eine Curve zweiter Classe die vier Seiten eines gegebenen Vierecks berührt, so bestimmt auf jeder Seite der bezügliche Berührungspunct zwei Segmente, Das

Product von vier nicht auf einander folgenden solchen Segmente ist dem Producte der vier übrigen gleich,

Statt der Curve kann man in dem letzten Satze ein drittes Puncten-System nehmen und erhält alsdann den Satz der 440. Nummer. Es ist der letzte Satz auch einer bedeutenden Verallgemeinerung fähig *). Er gilt auch für ein umschriebenes Dreieck (436, 321) und für jedes beliebige umschriebene Polygon, was leicht zu zeigen ist.

Ich gehe in kein näheres Detail hier ein; ich wollte durch diese Schlussbemerkungen bloss wiederholt darauf aufmerksam machen, wie die Theorie der Transversalen, welcher die rein geometrische Methode in neuerer Zeit ihre schönsten Entwicklungen verdankt, mit der Betrachtung der unbestimmten Coefficienten in der allgemeinen Verbindung der Gleichungen aufs innigste zusammenhängt, und die einzelnen Sätze derselben aus dieser ohne Mühe sich herleiten lassen. (Vergl. die 436 — 441. Nummer).

*) Poncelet, *Prop. proj.* 152.

Zweite Abtheilung.

Das Princip der Reciprocität.

682. Wenn wir die Entwicklungen des ersten Bandes mit den Entwicklungen der vorstehenden ersten Abtheilung des zweiten Bandes, und wenn wir namentlich die Entwicklungen der beiden letzten Paragraphen jenes ersten Bandes und dieser ersten Abtheilung mit einander vergleichen, so bemerken wir eine überraschende Analogie in den Resultaten. Es stehen dieselben, paarweise genommen, in so genauer Wechselbeziehung, dass wir, vermittelst eines allgemeinen Principes, mit welchem wir uns in dieser zweiten Abtheilung beschäftigen wollen, sobald ein Satz bekannt ist, unmittelbar den analogen Satz erhalten. Der beschränkte Raum verbietet uns, in den folgenden Auseinandersetzungen mit derjenigen Ausführlichkeit, welche der Gegenstand fordert, zu Werke zu gehen. Bei dieser Beschränkung entscheide ich mich indess lieber dafür, mancherlei einzelne Resultate zu unterdrücken, als bei der Aufstellung und Entwicklung des in Rede stehenden Principes von einem weniger allgemeinen Gesichtspuncte auszugehen.

§. 1.

Ueber das Cramer'sche Paradox.

683. Die allgemeine Gleichung irgend eines n. Grades zwischen zwei veränderlichen Grössen, welche, je nachdem diese veränderlichen Grössen Punct- oder Linien-Coordinaten bedeuten, die Oerter n. Ordnung oder n. Classe darstellt, enthält:

$$1+2+3+\ldots+(n+1)=\frac{(n+1)(n+2)}{1.\quad 2},$$

constante Coefficienten. Jeden beliebigen dieser Coefficienten können wir als gegeben betrachten und etwa gleich Eins setzen. Die übrigen

Digitized by Google

$$\frac{(n+1)(n+2)}{1.\quad 2}-1=\frac{n(n+3)}{1.\quad 2}$$

Coefficienten sind alsdann durch eine gleiche Anzahl linearer Gleichungen, im Allgemeinen, vollkommen und auf einzige Weise bestimmt. In dem Falle von Punct-Coordinaten entspricht jedem gegebenen Puncte der bezüglichen Curve, in dem Falle von Linien-Coordinaten jeder Tangente der bezüglichen Curve, eine solche lineare Bedingungs-Gleichung. Ein Ort n. Ordnung ist also durch $\frac{n(n+3)}{1.\quad 2}$ Puncte, ein Ort n. Classe durch $\frac{n(n+3)}{1.\quad 2}$ Tangenten, im Allgemeinen, vollkommen bestimmt.

Aber zwei Curven n. Ordnung schneiden sich, im Allgemeinen, in n^2 Puncten und durch dieselbe n^2 Puncte gehen ausserdem noch unendlich viele Oerter derselben Ordnung. Zwei Oerter n. Classe berühren, im Allgemeinen, beide dieselben n^2 gerade Linien, und dieselben n^2 geraden Linien sind ausserdem auch noch Tangenten von unendlich vielen Oertern derselben Classe. Sobald $n = 3$ oder $n > 3$, und also

$$n^2 \geqq \frac{n(n+3)}{1.\quad 2},$$

begegnet man einer Art von Paradox, dass nemlich eine Curve durch so viele oder durch mehrere Puncte geht, oder so viele oder mehrere gerade Linien berührt, als, im Allgemeinen, zu ihrer Bestimmung nöthig sind, und doch noch unbestimmt bleibt.

Auf dieses Paradox, rücksichtlich der Bestimmung der Curven durch Puncte, scheint zuerst CRAMER *) aufmerksam gemacht, und zugleich die analytische Erklärung desselben gegeben zu haben. Es müssen nemlich, was aus den vorangeschickten Erörterungen sogleich *a priori* einleuchtet, wenn die n^2 Durchschnittspuncte zweier Curven n. Ordnung gegeben sind und $n = 3$ oder $n > 3$ ist, diesen Durchschnittspuncten solche n^2 lineare Gleichungen entsprechen, von welchen eine oder mehrere, die man beliebig auswählen kann, von den jedesmalig übrigbleibenden bedingt werden. Um aber vollständig hier zu Werke zu gehen, müssen wir die vorstehende Erklärungsweise auch noch geometrisch deuten. Ich habe dieses bereits beiläufig im ersten Bande der „Entwicklungen" gethan, als ich meinerseits, bei einer speciellen Veranlassung, auf jenes Paradox stiess **). Denselben Gegenstand habe ich später in den zu *Montpellier* erscheinenden „Annalen" ausführlicher behandelt und zugleich die Betrachtungen auf Oberflächen übertragen ***), und hier nehme ich diese Untersuchungen von Neuem auf, weil sie mit den folgenden in genauer Beziehung stehen.

684. Wenn wir $\left(\frac{n(n+3)}{1.\quad 2}-1\right)$ Puncte willkührlich annehmen, so können wir durch diese Puncte unendlich viele Oerter n. Ordnung legen, deren jeder, im Allgemeinen, vollkommen bestimmt ist, wenn wir ausserdem noch irgend einen neuen Punct kennen, der auf dem Orte liegt. Zwei solche Oerter wollen wir durch die beiden Gleichungen:

*) CRAMER, *Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques. Geneve, 1750. Nro. 48.* — LACROIX, *Traité du calcul différentiel et du calcul intégral. Seconde Edition. Tome I. p. 413, Note.*

**) Vergl. S. 228, Note.

***) *Recherches sur les courbes algébriques de tous les degrés; Gerg. Ann. Tome XIX, p. 97. Recherches sur les surfaces algébriques de tous les degrés; ib. p. 129.*

$$U = 0, \qquad U' = 0, \qquad (1)$$

darstellen. Alsdann ist

$$U' + \mu U = 0, \qquad (2)$$

wenn μ einen unbestimmten Coefficienten bedeutet, die allgemeine Gleichung aller derjenigen Oerter n. Ordnung, welche durch die n^2 Durchschnittspuncte der beiden Oerter (1), also durch die $\left(\frac{n(n+3)}{1.\ 2} - 1\right)$ willkührlich angenommenen Puncte und ausserdem noch (in der Voraussetzung, dass $n \geqq 3$) durch

$$n^2 - \left(\frac{n(n+3)}{1.\ 2} - 1\right) = \frac{(n-2)(n-1)}{1.\ 2} = \frac{n(n-3)}{1.\ 2} + 1$$

neue Puncte gehen. Wenn wir noch irgend einen neuen Punct, der auf dem Orte (2) liegt und den wir P nennen wollen, kennen, so erhalten wir eine lineare Gleichung zur Bestimmung von μ. Erst dann ist dieser Ort vollkommen und auf einzige Art bestimmt. Derselbe Ort ist aber auch schon bestimmt, wenn wir zu den $\left(\frac{n(n+3)}{1.\ 2} - 1\right)$ willkührlich angenommenen Puncten jenen Punct P noch hinzufügen. Der auf diese letzte Weise bestimmte Ort geht mithin durch die n^2 Durchschnittspuncte der beiden Curven (1). Da wir für diese beiden Curven irgend zwei beliebige, welche durch die willkührlich angenommenen Puncte gehen, genommen haben, und jede dieser Curven von der Curve (2) ebenfalls nur in n^2 Puncten geschnitten wird, so folgt, dass alle solche Curven sich in denselben n^2 Puncten schneiden, und also ausser durch jene $\left(\frac{n(n+3)}{1.\ 2} - 1\right)$ Puncte noch durch $\left(\frac{n(n-3)}{1.\ 2} + 1\right)$ andere feste Puncte gehen.

Eine ganz analoge Schlussweise können wir auf Curven n. Classe anwenden und erhalten hiernach die nachstehenden beiden Sätze.

Alle Oerter n. Ordnung, welche durch $\left(\frac{n(n+3)}{1.\ 2} - 1\right)$ *beliebige, gegebene Puncte gehen, gehen überdiess auch noch durch* $\left(\frac{n(n-3)}{1.\ 2} + 1\right)$ *andere feste Puncte.*

Alle Oerter n. Classe, welche $\left(\frac{n(n+3)}{1.\ 2} - 1\right)$ *beliebige, gegebene gerade Linien berühren, berühren überdiess auch noch* $\left(\frac{n(n-3)}{1.\ 2} - 1\right)$ *andere feste gerade Linien.*

So gehen zum Beispiel alle Oerter dritter Ordnung, welche durch acht gegebene Puncte gehen, überdiess auch noch durch einen neunten festen Punct. (Wenn insbesondere die acht gegebenen Puncte acht von den neun Durchschnittspuncten zweier Systeme von drei geraden Linien sind, so ist der neunte feste Punct der neunte Durchschnittspunct). Alle Oerter vierter Ordnung, welche durch dreizehn gegebene Puncte gehen, gehen überdiess auch noch durch drei neue feste Puncte. Und ferner alle Oerter dritter Classe, welche acht gegebene gerade Linien berühren, berühren überdiess auch noch eine neunte feste gerade Linie, und alle Oerter vierter Classe, welche dreizehn gegebene gerade Linien berühren, berühren ausserdem noch drei andere feste gerade Linien.

Wir bemerken noch beiläufig, dass die gegebenen und resultirenden festen Puncte und geraden Linien auch paarweise imaginär werden können. Solche zwei imaginäre Puncte bestimmen sich geometrisch am einfachsten durch einen beliebigen Kegelschnitt und eine demselben nicht begegnende gerade Linie, so wie solche zwei imaginäre gerade Linien durch einen Kegelschnitt und einen innerhalb desselben liegenden Punct.

685. Die beiden Sätze der vorigen Nummer bestehen offenbar auch dann noch, wenn die gegebenen Puncte und geraden Linien alle oder zum Theil oder groppenweise zusammenfallen und mithin die bezüglichen Oerter in verschiedenartigen Contact-Beziehungen zu einander stehen. Auf diese Weise ergeben sich zum Beispiel die nachstehenden speciellen Sätze.

*Alle Curven dritter Ordnung, welche eine gegebene Curve (derselben oder höherer Ordnung) in einem gegebenen Puncte achtpunctig osculiren, schneiden sich ausserdem noch in ein und demselben Punct. Dieser Punct fällt, im Allgemeinen, nicht mit dem Osculationspuncte zusammen, denn sonst könnten zwei Curven dritter Ordnung unter einander niemals einen blossen achtpunctigen, sondern statt desselben immer nur einen neunpunctigen Contact haben. In besondern Puncten nur wird eine Curve dritter Ordnung von andern Curven derselben Ordnung neunpunctig osculirt *). Wenn irgend eine Curve und auf dem Umfange derselben irgend zwei Puncte gegeben sind, so gehen alle Curven dritter Ordnung, welche die gegebene in jedem der beiden gegebenen Puncte vierpunctig, oder in einem derselben fünfpunctig und in dem andern dreipunctig osculiren, u. s. w. durch einen festen dritten Punct.*

Wenn wir in allen den eben betrachteten Fällen, statt Curven dritter Ordnung, Curven dritter Classe nehmen, so berühren diese jedesmal eine feste gerade Linie, wo jene durch einen festen Punct gehen. (Wenn nemlich irgend zwei Curven sich osculiren, so fallen in den Osculationspunct eben so viele Durchschnittspuncte der beiden

---

*) Wir können leicht ein paar Beweise zum Belege für die Behauptungen des Textes anführen. Eine gegebene Curve dritter Ordnung, die wir durch die Gleichung

$$X = 0$$

darstellen wollen, kann, im Allgemeinen, in einem gegebenen Puncte von einer Curve zweiter Ordnung bloss fünfpunctig osculirt werden, wird aber in besondern Puncten von einer solchen Curve sechspunctig osculirt. (Vergl. die Note zur 328. Nummer des ersten Bandes.) In einem solchen besondern Puncte hat die gegebene Curve dritter Ordnung mit dem Systeme der sechspunctig osculirenden Curve zweiter Ordnung und der Tangente in demselben Puncte einen achtpunctigen Contact. Der einzige Durchschnittspunct dieses Systems und der gegebenen Curve dritter Ordnung ist derjenige Punct, in welchem diese Curve, welche mit der Curve zweiter Ordnung, ausser dem Osculationspuncte, keinen Punct mehr gemein hat, von jener Tangente im Osculationspuncte geschnitten wird. In demselben Puncte wird die gegebene Curve dritter Ordnung von allen denjenigen Curven derselben Ordnung, von welchen sie achtpunctig osculirt wird, geschnitten. Wenn wir die Gleichungen der sechspunctig osculirenden Curve zweiter Ordnung und der Tangente durch

$$Y = 0, \qquad T = 0,$$

darstellen und durch μ einen unbestimmten Coefficienten bezeichnen, so erhalten wir für die allgemeine Gleichung aller jener achtpunctig osculirenden Curven dritter Ordnung folgende:

$$X + \mu YT = 0.$$

In dem eben betrachteten Falle fällt der Durchschnittspunct niemals mit dem Osculationspuncte zusammen, sonst müsste die gegebene Curve dritter Ordnung von der Tangente im Osculationspuncte dreipunctig osculirt werden, es müsste dieser Punct ein Wendungspunct oder ein Rückkehrpunct sein. (Vergl. die eben angezogene Note.) Alsdann aber geht die osculirende Curve zweiter Ordnung nothwendig in ein System von zwei geraden Linien über. Nur in einem der eben bezeichneten singulären Puncte hat die gegebene Curve dritter Ordnung mit andern Curven derselben Ordnung einen neunpunctigen Contact. Für die allgemeine Gleichung aller neunpunctig osculirenden Curven dritter Ordnung erhalten wir alsdann bei der vorstehenden Bezeichnung:

$$X + \mu(T)^3 = 0.$$

Digitized by Google

Curven zusammen, als in die Tangente im Osculationspuncte gemeinschaftliche Tangenten der Curven zusammenfallen; wonach wir die verschiedenen Ordnungen der Osculation auf eine doppelte Weise bestimmen können. Diese Behauptung ergibt sich sogleich a priori, lässt sich aber auch, was in dem letzten Paragraphen geschehen wird, auf analytischem Wege direct beweisen.)

636. Wir haben bis jetzt geometrische Oerter betrachtet, welche durch solche vollständige Gleichungen zwischen Punct- oder Linien-Coordinaten irgend eines höhern Grades dargestellt werden, deren Coefficienten beliebig zu bestimmende Grössen sind. Die Anzahl dieser unbestimmten Coefficienten können wir dadurch vermindern, dass wir annehmen, dass einige dieser Coefficienten ein für alle Mal gegeben sind, oder dass zwischen einigen derselben oder zwischen allen lineare Bedingungs-Gleichungen Statt finden. Indem wir auf diese Weise die bezüglichen Curven gewissen Bedingungen unterwerfen, ändert sich, im Allgemeinen, in dem einen Falle weder die Zahl der Durchschnittspuncte, noch in dem andern Falle die Zahl der gemeinschaftlichen Tangenten je zweier solcher Curven. Diese Bemerkungen führen zu folgenden beiden Sätzen, die allgemeiner sind, als die entsprechenden Sätze der 684. Nummer.

Wenn $\left(\frac{n(n+3)}{1.\ 2}-1\right)$ *Coefficienten der allgemeinen Gleichung des n. Grades zwischen Punct-Coordinaten oder auch eine gleiche Anzahl von Bedingungs-Gleichungen zwischen einigen Coefficienten jener Gleichung oder zwischen allen gegeben sind, so schneiden sich alle durch diese Gleichung darstellbaren Oerter n. Ordnung in denselben* $\left(\frac{n(n-3)}{1.\ 2}+1\right)$ *Puncten.*

Wenn $\left(\frac{n(n+3)}{1.\ 2}-1\right)$ *Coefficienten der allgemeinen Gleichung des n. Grades zwischen Linien-Coordinaten oder auch eine gleiche Anzahl von Bedingungs-Gleichungen zwischen einigen Coefficienten jener Gleichung oder zwischen allen gegeben sind, so haben alle durch diese Gleichung darstellbaren Oerter n. Classe dieselben* $\left(\frac{n(n-3)}{1.\ 2}+1\right)$ *gemeinschaftlichen Tangenten.*

Jedem gegebenen Puncte einer Curve entspricht eine lineare Bedingungs-Gleichung zwischen allen Constanten der entsprechenden Gleichung zwischen Punct-Coordinaten. Wenn wir also solche besondere Arten von Curven n. Ordnung betrachten, welche durch die allgemeine Gleichung n. Grades, zwischen deren Coefficienten m Bedingungs-Gleichungen Statt finden, und solche Curven durch $\left(\frac{n(n+3)}{1.\ 2}-(m+1)\right)$ gegebene Puncte legen, so schneiden sich dieselben ausserdem noch in $\left(\frac{n(n-3)}{1.\ 2}+1\right)$ festen Puncten. Wir nehmen hierbei natürlich $m = \frac{n(n+3)}{1.\ 2}-1$. Eine analoge Bemerkung können wir auch in Beziehung auf den zweiten der beiden vorstehenden Sätze machen.

Ferner erhalten wir für jede neue höhere Ordnung des Contactes irgend einer Curve n. Ordnung mit einer gegebenen Curve in einem gegebenen Puncte eine neue lineare Bedingungs-Gleichung *). Hiernach ergeben sich die Sätze der vorigen Nummer, auch ohne

*) Wenn nemlich

$$F(x, y) = 0 \qquad (a)$$

eine gegebene Curve und (y', x') ein gegebener Punct auf ihrem Umfange ist, in welcher dieselbe von einer Curve n. Ordnung, deren Gleichung wir, der Kürze halber, durch

Gränz-Betrachtungen in der Construction, unmittelbar aus den Sätzen der vorliegenden Nummer.

687. Die beiden allgemeinern Sätze der letzten Nummer sind auch auf geometrische Oerter der ersten und zweiten Ordnung, so wie der ersten und zweiten Classe anwendbar. Mit einigen hierher gehörigen Ausführungen wollen wir diesen Paragraphen beschliessen.

Die allgemeinste Gleichung der geraden Linie ist:

$$ay+bx+c = o. \qquad (1)$$

Wenn wir, unbeschadet der Allgemeinheit, den Coefficienten a als ein für alle Mal gegeben betrachten und überdiess die Voraussetzung machen, dass auch c gegeben ist, so gehen nach dem ersten der beiden Sätze der vorigen Nummer alle, alsdann noch durch die Gleichung (1) darstellbaren, geraden Linien durch ein und denselben Punct; dieser Punct liegt bekanntlich auf der zweiten Coordinaten-Axe. Wenn wir voraussetzen, dass der Coefficient b gegeben ist, so gehen alle gerade Linien (1) ebenfalls noch durch einen festen Punct, dieser feste Punct aber liegt unendlich weit, weil alsdann alle jene geraden Linien parallel sind.

Wenn wir wiederum einen der drei Coefficienten der Gleichung (1) als gegeben betrachten und dann voraussetzen, dass zwischen den beiden übrigbleibenden Coefficienten eine gegebene vollständige Gleichung des ersten Grades besteht, oder wenn, was dasselbe heisst, zwischen den drei unbestimmten Coefficienten der Gleichung (1) eine homogene Bedingungs-Gleichung des ersten Grades, etwa folgende:

$$ma+nb+pc = o,$$

in der m, n und p gegebene Grössen bedeuten, Statt findet, so gehen alle geraden Linien (1) durch ein und denselben Punct. Dieser Punct ist leicht zu construiren (406).

Die allgemeine Gleichung des Punctes ist folgende:

$$a+bv+cw = o. \qquad (2)$$

Nehmen wir wiederum in dieser Gleichung den Coefficienten a ein für alle Mal beliebig an und setzen alsdann b constant, so liegen alle durch (2) darstellbare Puncte, nach dem zweiten Satze der vorigen Nummer, auf einer festen geraden Linie. Diese feste

---

$$\varphi(x, y) = Y = o \qquad (b)$$

darstellen wollen, osculirt werden soll, so kommt zuvörderst

$$\varphi(x', y') = o$$

eine Gleichung, welche ausdrückt, dass die Curve ... Ordnung durch den gegebenen Punct geht. Ferner ergibt sich:

$$\frac{dY}{dx}+\frac{dY}{dy}\frac{dy}{dx} = o,$$

$$\frac{d^2Y}{dx^2}+2\frac{d^2Y}{dxdy}\frac{dy}{dx}+\frac{d^2Y}{dy^2}\frac{dy^2}{dx^2}+\frac{dY}{dy}\frac{d^2y}{dx^2} = o,$$

und so weiter. Wenn wir in die letzten Gleichungen für $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{d^2y}{dx^2}$ diejenigen constanten Werthe setzen, die wir erhalten, wenn wir die Gleichung (a) differentiiren und die Differential-Coefficienten auf den Punct (y', x') beziehen, und ferner auch in den durch die partiellen Differential-Coefficienten bezeichneten Functionen y' und x' für y und x schreiben, so sind diese Gleichungen offenbar lineare Bedingungs-Gleichungen zwischen den Coefficienten der Gleichung (b). Es drücken diese Gleichungen alsdann aber aus, dass die Curve (a) in dem gegebenen Puncte von der Curve (b) berührt wird, dreipunctig osculirt wird und so weiter.

gerade Linie geht durch den Anfangspunct der Coordinaten. Wenn wir statt des Coefficienten b den Coefficienten e constant setzen, so liegen ebenfalls alle Puncte (2) auf einer festen geraden Linie. Diese feste gerade Linie ist alsdann aber der ersten Coordinaten-Axe parallel. Wenn endlich zwischen den drei unbestimmten Coefficienten der Gleichung (2) irgend eine gegebene homogene Bedingungs-Gleichung des ersten Grades, etwa folgende, besteht:

$$ma+nb+pc = o,$$

so liegen ebenfalls wieder alle, durch (2) noch darstellbaren, Puncte auf einer festen, leicht zu construirenden geraden Linie.

Die Sätze der vorliegenden Nummer haben wir schon direct in der 415. Nummer bewiesen.

688. Wir wollen uns in dieser Nummer zur Betrachtung der durch die allgemeine Gleichung:

$$ay^2+2bxy+cx^2+2dy+2ex+f = o, \qquad (1)$$

dargestellten Oerter zweiter Ordnung wenden. Alle solche Curven, welche durch diese Gleichung dargestellt werden, wenn zwei Coefficienten derselben (von denen wir einen immer willkührlich annehmen können) gegeben sind, oder wenn zwischen beliebigen dieser Coefficienten irgend eine lineare und homogene Bedingungs-Gleichung Statt findet — und welche überdiess durch drei gegebene Puncte gehen, schneiden sich ausserdem noch in einem vierten festen Puncte. Wir wollen einige Beispiele hier hervorheben.

Wenn

$$b+a = o,$$

so sind, bei der Voraussetzung rechtwinkliger Coordinaten, alle durch (1) dargestellte Curven gleichseitige Hyperbeln. Also:

Alle gleichseitige Hyperbeln, welche durch irgend drei gegebene Puncte gehen, schneiden sich ausserdem noch in einem vierten festen Puncte (295).

Da mit solchen Hyperbeln auch drei Systeme von zwei auf einander senkrecht stehenden geraden Linien gehören, so sieht man sogleich ein, dass jener vierte Durchschnittspunct derjenige Punct ist, in welchem, in dem von den drei gegebenen Puncten gebildeten Dreiecke, die von den Winkelpuncten auf die gegenüberliegenden Seiten gefällten drei Perpendikel sich schneiden. Neben dem letzten Satze erhält man insbesondere auch folgenden Satz:

Alle gleichseitigen Hyperbeln, welche eine gegebene Curve in einem gegebenen Puncte dreipunctig osculiren, schneiden sich in einem festen Puncte der Normalen im Oseulationspuncte.

Wenn wir a = 1 setzen und alsdann der Coefficient b gegeben ist, so ist die Richtung desjenigen Durchmessers der bezüglichen Curve, dessen zugeordneter der zweiten Coordinaten-Axe parallel ist, gegeben. Also:

Alle Oerter zweiter Ordnung, in welchen irgend zwei zugeordnete Durchmesser zweien gegebenen geraden Linien parallel sind und welche durch drei gegebene Puncte gehen, schneiden sich ausserdem noch in einem vierten festen Punete.

Aus diesem Satze folgt durch theilweise Umkehrung, dass in allen Oertern zweiter Ordnung, welche durch vier gegebene Puncte gehen, zwei Durchmesser, welche zugeordnete sind, dieselbe Richtung haben (376).

Digitized by Google

Es stellt bekanntlich die Gleichung

$$ay+bx+d = o \qquad (2)$$

denjenigen Durchmesser der Curve (1) dar, dessen zugeordneter der zweiten Coordinaten-Axe parallel ist. Wenn der Quotient $\frac{d}{a}$ gegeben ist, so kennen wir also einen Punct jenes Durchmessers. Es liegt dieser Punct auf der zweiten Coordinaten-Axe.

Wenn wir irgend einen beliebigen Punct (y', x') des Durchmessers (2) kennen, so erhalten wir folgende Bedingungs-Gleichung:

$$ay'+bx'+d = o,$$

die, in Beziehung auf die drei Coefficienten a, b und d der Gleichung (1), homogen und linear ist.

Wenn endlich eine feste gerade Linie

$$y = \alpha x+\beta,$$

gegeben ist, so hat derjenige Durchmesser, dessen zugeordneter dieser geraden Linie parallel ist, folgende Gleichung (244):

$$(ay+bx+d)\alpha+(by+cx+e) = o, \qquad (3)$$

und wenn wiederum ein Punct dieses Durchmessers gegeben ist, so erhalten wir eine lineare und homogene Gleichung zwischen den fünf ersten Coefficienten der Gleichung (1).

Auf dreifache Weise führt uns hiernach die 686. Nummer zu folgendem Satze:

Alle Oerter zweiter Ordnung, in welchen derjenige Durchmesser, dessen zugeordneter einer gegebenen geraden Linie parallel ist, durch einen gegebenen Punct geht, und welche durch drei gegebene Puncte gehen, schneiden sich ausserdem noch in einem vierten festen Punete (377).

Wir erhalten noch folgende drei andere Fälle des ersten allgemeinen Satzes der 686. Nummer.

Wenn zwischen den Coefficienten der allgemeinen Gleichung (1) zwei lineare und homogene Bedingungs-Gleichungen Statt finden, so gehen alle durch diese Gleichung noch darstellbaren und durch zwei gegebene Puncte gehende Oerter ausserdem noch durch zwei andere feste Puncte. Wenn zwischen jenen Coefficienten drei lineare und homogene Bedingungs-Gleichungen Statt finden, so gehen alle bezüglichen Oerter, welche durch einen gegebenen Punct gehen, ausserdem noch durch drei andere feste Puncte. Wenn endlich zwischen jenen Coefficienten vier solcher Bedingungs-Gleichungen bestehen, so schneiden sich alle bezüglichen Oerter in denselben vier Puncten.

Beispiele von der Anwendung dieser Sätze liegen nahe. Stellen wir z. B. mehrere Bedingungs-Gleichungen von der Form der Gleichung (3) zusammen, so ergibt sich folgender Satz:

Alle Oerter zweiter Ordnung, welche durch $(4-m)$ *gegebene Punete gehen und der Bedingung unterworfen sind, dass solche m Durchmesser jeder derselben, deren zugeordnete m gegebenen geraden Linien parallel sind, durch m gegebene Puncte gehen, schneiden sich, ausser in den gegebenen, noch in m festen Puncten.*

Wir können in der Aussage dieses Satzes $m = 1$, $m = 2$, $m = 3$ und $m = 4$ setzen. In dem letzten Falle sind die fünf ersten Coefficienten der Gleichung (1) vollkommen bestimmt, wenn wir einen derselben ein für alle Mal beliebig annehmen. Alle Oerter sind alsdann ähnliche, ähnlich liegende und concentrische: ihre (reellen oder imagi-

nären) Durchschnittspuncte fallen paarweise zusammen und liegen auf zwei bestimmten geraden Linien, den (reellen oder imaginären) Asymptoten derselben unendlich weit.

Um noch ein zweites Beispiel zu geben, wollen wir zwei solche Puncte (y', x') und (y'', x'') betrachten, von denen einer auf der Polaren des andern liegt. Alsdann erhalten wir folgende, in Beziehung auf die Coordinaten der beiden Puncte, symmetrische Gleichung (268):

$$ay'y''+b(x'y''+x''y')+cx'x''+d(y'+y'')+e(x'+x'')+f = 0,$$

in welcher die Constanten der allgemeinen Gleichung nur auf lineare Weise vorkommen, und wenn wir mehrere solcher Gleichungen zusammenstellen, folgenden Satz:

Alle Oerter zweiter Ordnung, welche durch (4—m) gegebene Puncte gehen und überdiess der Bedingung unterworfen sind, dass die Polaren von m gegebenen Puncten durch m andere, ebenfalls gegebene, Puncte gehen, schneiden sich, ausser in den (4—m) gegebenen, noch in m festen Puncten.

Aus diesem letzten Satze ergibt sich der vorhergehende, wenn wir annehmen, dass die m gegebenen Pole nach gegebenen Richtungen hin unendlich weit rücken. Wenn wir im letzten Satze m = 1 nehmen, so gibt eine theilweise Umkehrung den zweiten Satz der 380. Nummer.

689. Die Anwendung des zweiten allgemeinen Satzes der 686. Nummer auf Oerter zweiter Classe, für deren Gleichung wir folgende nehmen wollen:

$$Aw^2+2Bvw+Cv^2+2Dw+2Ev+F = 0, \qquad (1)$$

gibt mehrere einzelne Sätze, die wir in folgender Aussage zusammenfassen können:

Wenn zwischen beliebigen Coefficienten der allgemeinen Gleichung der Oerter zweiter Classe m homogene Bedingungs-Gleichungen des ersten Grades bestehen, oder wenn, nachdem einer dieser Coefficienten ein für alle Mal angenommen worden ist, m der übrigen Coefficienten gegeben sind, so berühren alle Oerter, welche alsdann noch durch die allgemeine Gleichung dargestellt werden können, und (4—m) gegebene gerade Linien berühren, ausserdem noch m feste gerade Linien und haben also dieselben vier gemeinschaftlichen Tangenten.

Es kann in der Aussage dieses Satzes m = 1, m = 2, m = 3 und m = 4 sein. Wir wollen auch hier ein paar Beispiele hervorheben.

Wenn in der allgemeinen Gleichung C+F = 0, so werden (bei der Voraussetzung rechtwinkliger Coordinaten) alle Oerter, vom Anfangspuncte der Coordinaten aus, unter rechtem Winkel gesehen (483); wenn E = 0, so bilden die beiden durch den Anfangspunct gehenden Tangenten mit den Coordinaten-Axen ein System von vier Harmonicalen (469); wenn

$$A+\alpha B+\beta D = 0,$$

und α und β gegebene Coefficienten bedeuten, so liegen die Mittelpuncte aller bezüglichen Curven auf einer gegebenen geraden Linie (455), und so weiter. Also:

Alle Oerter zweiter Classe, welche von einem gegebenen Puncte aus unter rechten Winkeln gesehen werden, oder an welche sich von einem gegebenen Punete aus Tangenten legen lassen, welche mit zwei festen, durch diesen Punct gehenden, Tangenten ein System von vier Harmonicalen bilden, oder deren Mittelpuncte auf einer gegebenen geraden Linie liegen, und so weiter — und welche überdiess drei gegebene gerade Linien berühren, berühren ausserdem noch eine vierte feste gerade Linie.

Digitized by Google

Wenn zwei gerade Linien (w', v', u') und (w'', v'', u'') gegeben sind, von welchen eine durch den Pol der andern, rücksichtlich eines durch die allgemeine Gleichung (1) dargestellten Ortes zweiter Classe, geht (eine Beziehung der beiden gegebenen geraden Linien zu einander, die immer eine gegenseitige ist), so erhalten wir nach der 548. Nummer folgende lineare Bedingungs-Gleichung zwischen den unbestimmten Coefficienten der allgemeinen Gleichung:

$$Aw'w''+B(v'w''+v''w')+Cv'v''+D(u'w''+u''w')+E(u'v''+u''v')+Fu'u'' = 0,$$

und hiernach folgenden Satz:

Alle Oerter zweiter Classe, welche (4−m) gegebene gerade Linien berühren und überdiess der Bedingung unterworfen sind, dass, in Beziehung auf jeden derselben, m gegebene gerade Linien durch die m Pole von m andern gegebenen geraden Linien gehen, berühren ausserdem noch m, also im Ganzen 4 feste gerade Linien.

Ausführliche Entwicklungen für den Fall, dass in der Aussage des an die Spitze dieser Nummer gestellten Satzes m = 4 ist, finden sich schon in der 534. — 541. und ferner in der 608. Nummer. —

Die vorstehenden Ausführungen sind hinreichend um zu zeigen, wie wir auf einem neuen Wege zu den hauptsächlichsten Sätzen über die Zusammenstellung von Kegelschnitten unter sich und mit Systemen von zwei Puncten und zwei geraden Linien gelangen können. Hier ist natürlich nicht der Ort, diese verschiedenen Sätze im Detail zu discutiren, was überdiess auch schon zum Theil in dem Früheren geschehen ist. —

§. 2.

Eine Gruppe von einigen allgemeinen analytisch-geometrischen Sätzen.

690. Es sei

$$F(y, x, b, a) = 0 \qquad (1)$$

irgend eine gegebene algebraische oder transscendente Gleichung zwischen den beiden gewöhnlichen Punct-Coordinaten y und x, und beliebigen constanten Grössen, von denen irgend zwei durch b und a bezeichnet worden sind. Es seien ferner y', x' und y'', x'' zwei Paare gegebener, zusammengehöriger Werthe von y und x, welche die vorstehende Gleichung befriedigen. Alsdann hat man

$$F(y', x', b, a) = 0,$$
$$F(y'', x'', b, a) = 0,$$

und aus diesen beiden Gleichungen kann man die Werthe von b und a ziehen. Betrachten wir b und a als gewöhnliche Punct-Coordinaten und veränderlich, so stellen die beiden letzten Gleichungen zwei Curven dar, und diese Curven gehen beide nothwendig durch denjenigen Punct, dessen Coordinaten gleich b und a sind, das heisst, gleich jenen beiden Constanten der gegebenen Gleichung (1). Da wir die beiden Puncte (y', x') und (y'', x'') beliebig auf der durch diese Gleichung dargestellten Curve annehmen können, so erhalten wir folgenden Satz:

Wenn man irgend einen Punct, der durch die Gleichung

$$F(y, x, b, a) = 0 \qquad (1)$$

dargestellten Curven durch (y', x') bezeichnet, so gehen alle Curven, welche durch folgende Gleichung:

$$F(y', x', b, a) = 0, \qquad (2)$$

Digitized by Google

wenn wir in derselben nach einander für y' und x' alle möglichen Werthe, welche den verschiedenen Lagen des Punctes (y', x') *auf der Curve* (1) *entsprechen, substituiren, dargestellt werden, durch den festen Punct* (b, a).

Wenn in der Gleichung (1) b oder a bloss in der zweiten Potenz vorkommt, so schneiden sich alle Curven (2) in denselben zwei Puncten, die symmetrisch liegen, in Beziehung auf die erste oder zweite Coordinaten-Axe, zu beiden Seiten derselben. Wenn b und a beide zugleich nur in der zweiten Potenz vorkommen, so schneiden sich alle Curven in denselben vier Puncten, welche die vier Winkelpuncte eines Parallelogrammes sind, dessen Mittelpunct der Anfangspunct der Coordinaten ist. Wenn b nur in irgend einer m. und a nur in irgend einer n. Potenz in der Gleichung (1) vorkommen, so schneiden sich alle Curven (2) in denselben mn Puncten. Von diesen Puncten sind aber nur einer oder zwei oder vier reell.

Nichts verhindert uns anzunehmen, dass in der Gleichung (1), von welcher wir ausgehen, b und a gleich Null seien, oder, mit andern Worten, dass diese Grössen in jener Gleichung nicht vorkommen. Alsdann können wir, zum Behuf der Construction des vorstehenden Satzes, jener Gleichung beliebige Glieder hinzufügen, in denen b und a als Coefficienten vorkommen, und die mithin, wenn wir diese Grössen gleich Null setzen, wiederum wegfallen.

691. Wir wollen den vorstehenden Satz durch einige Beispiele erläutern. Es sei zuvörderst, indem wir rechtwinklige Coordinaten voraussetzen,

$$(y-b)^2 = 4px \qquad (1)$$

die gegebene Gleichung, aus der man, wenn man auf die angezeigte Weise verfährt, folgende erhält:

$$(y-y')^2 = 4x'x. \qquad (2)$$

Man sieht sogleich, dass die beiden Gleichungen (1) und (2) Parabeln darstellen, welche die zweite Coordinaten-Axe berühren und deren Durchmesser der ersten Axe parallel sind. Der, auf der ersten Curve (1) beliebig angenommene, Punct (y', x') ist der Brennpunct der Curve (2), welche nach dem in Rede stehenden Satze durch den festen Punct (b, p), mithin durch den Brennpunct der ersten Parabel geht. Also:

Wenn man eine Parabel mit veränderlichem Parameter, die der Bedingung unterworfen ist, dass sie, in ihrem Scheitel, eine gegebene gerade Linie berührt, sich so bewegen lässt, dass ihr Brennpunct eine gegebene Parabel, die derselben Bedingung unterworfen ist, durchläuft, so geht die bewegliche Parabel immer durch den Brennpunct der gegebenen.

Wir wollen ferner folgende Gleichung nehmen:

$$y^2-b^2 = 4px, \qquad (1)$$

aus der wir auf die angezeigte Weise folgende herleiten:

$$y^2-y'^2 = -4x'x. \qquad (2)$$

Alle durch die letzte Gleichung dargestellten Parabeln gehen, wenn, der Voraussetzung gemäss, (y', x') irgend ein Punct der durch die erste Gleichung dargestellten Parabel ist, durch die beiden festen Puncte (b, p) und (−b, p). Wenn man berücksichtigt, dass ±y' die Ordinaten derjenigen beiden Puncte sind, in welchen die jedesmalige Parabel (2) der zweiten Axe begegnet, und dass x' den Abstand des Brennpunctes dieser Parabel von ihrem Scheitel ist, so erhält man folgenden Satz:

Digitized by Google

Wenn irgend eine Parabel gegeben ist und man irgend zwei gerade Linien zieht, die senkrecht auf der Richtung ihrer Durchmesser stehen und von welchen man eine als fest und die andere als beweglich betrachtet, dann ferner von den beiden Durchschnittspuncten der Curve mit dieser geraden Linie auf jene zwei Perpendikel fällt und endlich eine solche neue Parabel durch die Fusspuncte dieser beiden Perpendikel legt, deren Brennpuncts-Entfernung der Länge dieser Perpendikel gleich ist und deren Durchmesser den Durchmessern der gegebenen Parabel parallel sind, so geht diese neue Parabel durch dieselben beiden festen Puncte, welche Lage die bewegliche gerade Linie auch haben mag.

Wenn die gegebene feste gerade Linie die gegebene Parabel schneidet, so öffnen sich die durch (2) dargestellten Parabeln nach entgegengesetzter Richtung, wenn der Punct (y', x') von der einen Seite dieser geraden Linie auf die andere rückt. In diesem Falle drückt insbesondere die Gleichung (2) auch ein System von zwei Parallellinien aus. Wenn die gegebene Parabel von der gegebenen festen geraden Linie berührt wird, so ist b = 0 und alle durch (2) darstellbare Parabeln berühren sich im Brennpuncte der gegebenen Parabel. Wenn die gegebene feste gerade Linie der gegebenen Parabel nicht begegnet, so wird b imaginär: in diesem Falle haben alle Parabeln (2) eine gemeinschaftliche ideale Chorde, deren Gleichung immer folgende bleibt:

$$x = p.$$

Wir wollen wiederum von einer Gleichung ausgehen, die derjenigen, von welcher wir eben ausgegangen sind, ähnlich ist, nemlich von folgender:

$$y^2 = -2px+b^2,$$

aber dann die Form der einen Constanten ändern, indem wir p^2+c^2 für b^2 schreiben. Man hat alsdann

$$y^2 = -2px+p^2+c^2, \qquad (1)$$

und hieraus geht folgende Gleichung hervor:

$$y'^2 = -2x'x+x^2+y^2,$$

der wir auch folgende Form geben können:

$$y^2+(x-x')^2 = y'^2+x'^2. \qquad (2)$$

Es stellt diese Gleichung einen solchen Kreis dar, dessen Mittelpunct der Punct (0, x) und dessen Radius gleich $\sqrt{[y'^2+x'^2]}$ ist. Dieser Kreis geht durch die beiden festen Puncte (c, p) und (−c, p). Hiernach ergibt sich folgender Satz:

Wenn man von irgend einem Puncte einer Parabel zwei Perpendikel fällt, das eine auf die Axe derselben und das andere auf eine gegebene feste gerade Linie, die ebenfalls auf dieser Axe senkrecht steht, und man alsdann aus dem Fusspuncte des einen Perpendikels, als Mittelpuncte, einen Kreis beschreibt, der durch den Fusspunct des andern Perpendikels geht, so schneidet dieser Kreis ein und dieselbe gerade Linie, die der gegebenen parallel ist und von derselben um die doppelte Brennpuncts-Entfernung absteht, immer in denselben beiden Puncten, wo man auch jenen Punct auf dem Umfange der gegebenen Parabel annehmen mag.

Wenn die gegebene feste gerade Linie (die zweite Coordinaten-Axe) durch den Brennpunct der gegebenen Parabel geht, so verschwindet aus der Gleichung (1) die Constante c; es haben alsdann alle in Rede stehenden Kreise im Puncte (c, p) eine gemeinschaftliche Tangente, die keine andere ist, als die Directrix der gegebenen Parabel. Wir begegnen in diesem Falle dem allbekannten Satze, „dass jeder Punct der Parabel gleich

weit von ihrem Brennpuncte und ihrer Directrix absteht." Wenn die gegebene feste gerade Linie, in Beziehung auf eine ihr parallele und durch den Brennpunct gehende gerade Linie, auf derselben Seite liegt als der Scheitel der Parabel, so ist die gemeinschaftliche Chorde aller Kreise (2) eine ideale.

Es liefert der letzte Satz eine einfache Construction folgender beiden Aufgaben:

Irgend zwei gegebene Puncte durch den Bogen einer Parabel zu verbinden, wenn die Axe dieser Parabel gegeben ist und man weder den Brennpunct noch den Scheitel derselben erreichen kann. Unter denselben Bedingungen einen parabolischen Bogen zu construiren, wenn statt eines gegebenen Punctes der Parameter gegeben ist.

Wenn wir von folgender Gleichung ausgehen:

$$y^2 - by = px, \qquad (1)$$

so erhalten wir folgende:

$$y'y + x'x = y'^2; \qquad (2)$$

die Gleichung einer geraden Linie, welche durch den Punct (y', o) geht und senkrecht auf derjenigen geraden Linie steht, die den Anfangspunct der Coordinaten mit dem Puncte (y', x') verbindet. Nach dem allgemeinen Satze dreht sich die gerade Linie (2) um den Punct (b, p), wenn der Punct (y', x') auf der gegebenen Parabel sich fortbewegt. Ich verweile nicht bei der Aussage dieses Satzes. Wenn wir b = o setzen, so wird die gegebene Parabel von der zweiten Coordinaten-Axe berührt. Sie wird, im Allgemeinen, von dieser Axe in zwei Puncten geschnitten. Jeden dieser beiden Puncte können wir nach einander zum Anfangspuncte der Coordinaten nehmen. Auf diese Weise ergibt sich folgender Zusatz:

Wenn ein Rechteck ABCD gegeben ist, und man die Schenkel eines rechten Winkels durch die gegenüberstehenden Winkelpuncte A und C, und die eines zweiten rechten Winkels durch die Winkelpuncte B und D so legt, dass die durch C und D gehenden Schenkel sich in irgend einem Punete Q der geraden Linie AB schneiden, so schneiden sich die beiden andern, durch A und B gehenden, Schenkel in einem Puncte M, der, wenn der Punct Q auf der geraden Linie AB sich fortbewegt, eine Parabel beschreibt.

An diesen Satz knüpfen sich neue Constructionen der beiden oben angeführten Aufgaben.

Wir wollen endlich die beiden letzten Gleichungen in umgekehrter Ordnung nehmen, indem wir von der zweiten dieser Gleichungen, in welcher wir bloss x'' und y'' an die Stelle von x' und y' schreiben wollen, ausgehen. Wenn wir hiernach die Gleichung:

$$y''y + x''x = y''^2, \qquad (1)$$

zu Grunde legen, so erhalten wir folgende:

$$y^2 - y'y = x'x. \qquad (2)$$

Wenn der Punct (y', x') auf der geraden Linie (1) beliebig angenommen wird, so geht die Parabel (2), nach dem allgemeinen Satze, auch, ausser durch den Anfangspunct, noch durch den festen Punct (y'', x''). Statt bei der Aussage dieses Satzes zu verweilen, wollen wir, mit Hülfe desselben, folgende Aufgabe construiren:

Die Parameter derjenigen beiden Parabeln, welche durch vier gegebene Punete sich legen lassen, zu bestimmen.

Da wir die Richtungen der Durchmesser dieser beiden Parabeln nach der 376. Nummer leicht finden können, so ist die vorstehende Aufgabe darauf zurückgeführt, den Pa-

Digitized by Google

rameter einer Parabel zu bestimmen, welche durch drei gegebene Puncte geht und deren Durchmesser eine gegebene Richtung haben. Es seien (Fig. 38) O, M' und M'' diese drei gegebenen Puncte und OX die gegebene Richtung der Durchmesser. Die Gleichung der hierdurch bestimmten Parabel, bei irgend einem beliebigen Coordinaten-Winkel, sei die Gleichung (2), indem wir OX und OY zu den beiden Coordinaten-Axen, M'' für den Punct (y'', x'') und OM' = y' nehmen. Alsdann können wir leicht die gerade Linie (1) construiren, es sei dieselbe QR. Legen wir alsdann durch den Punct M' eine gerade Linie MP, parallel mit OX und bis zur geraden Linie QR, so erhalten wir die Grösse des Parameters desjenigen Durchmessers, welcher in der zu bestimmenden Parabel die der zweiten Coordinaten-Axe parallelen Chorden halbirt. Der Hauptparameter der Parabel ist alsdann, wenn wir den Coordinaten-Winkel ϑ nennen, gleich $MP\sin^2\vartheta = pp$. Fig. 38.

Es sei, um noch ein letztes Beispiel zu geben:

$$y''x+x''y = xy, \qquad (1)$$

die gegebene Gleichung, aus der man nach dem bekannten Verfahren folgende erhält:

$$x'y+y'x = x'y', \qquad (2)$$

welche eine gerade Linie darstellt, die von den beiden Coordinaten-Axen die Segmente y' und x' abschneidet und, nach dem allgemeinen Satze, nicht aufhört durch den festen Punct (y'', x'') zu gehen, wie auch der Punct (y', x') auf der Curve (1) fortrücken mag. Diese Curve ist eine Hyperbel, welche durch den Anfangspunct der Coordinaten geht, deren Asymptoten den Coordinaten-Axen parallel sind und deren Mittelpunct der Punct (y'', x'') ist.

In allen Parallelogrammen, deren zwei gegenüberliegende Winkelpuncte auf einer gegebenen Hyperbel liegen und deren Seiten den Asymptoten derselben parallel sind, geht eine Diagonale durch den Mittelpunct dieser Hyperbel.

692. Wenn wir in der 690. Nummer, statt zwei Constanten der Gleichung (1) als Punct-Coordinaten und veränderlich zu betrachten, dieselben als Linien-Coordinaten und veränderlich betrachten, so erhalten wir, was sogleich einleuchtet, folgenden Satz:

Wenn man irgend einen Punct der durch die Gleichung

$$F(y, x, b, a) = 0 \qquad (1)$$

dargestellten Curve durch (y', x') bezeichnet, so berühren alle Curven, welche durch folgende Gleichung:

$$F(y', x', w, v) = 0,$$

wenn wir in derselben für y' und x' nach einander alle möglichen Werthe nehmen, welche den verschiedenen Lagen des Punctes (y', x') auf der Curve (1) entsprechen, und w und v als Linien-Coordinaten und veränderlich betrachten, dargestellt werden, ein und dieselbe gerade Linie (w = b, v = a). Statt der Linien-Coordinaten w und v können wir auch die Linien-Coordinaten w und u oder v und u nehmen.

Ich begnüge mich hier zur Erläuterung des vorstehenden Satzes mit einem einzigen Beispiele, und will zu diesem Ende vorzugsweise folgende Gleichung zu Grunde legen, die einer früher betrachteten ähnlich ist:

$$(y+\alpha x)^2+2\gamma y = 0.$$

Es stellt dieselbe eine solche Parabel dar, welche von der ersten Axe im Anfangspuncte der Coordinaten berührt wird, auf der zweiten Axe ein Segment $(-w) = -2\gamma$ abschneidet, und in welcher die Richtung der Durchmesser durch die Gleichung $v = \alpha$ gegeben

Digitized by Google

ist. Wenn wir auf dieser Parabel irgend einen Punct (y', x') beliebig annehmen, und w und v an die Stelle von 2γ und α schreiben, so kommt:

$$(y'+x'v)^2+y'w = 0,$$

und diese Gleichung stellt, wenn wir w und v als veränderlich betrachten, eine neue Parabel dar, deren Durchmesser der zweiten Coordinaten-Axe parallel sind, welche eine durch den Punct (y', x') gehende, der ersten Coordinaten-Axe parallele, gerade Linie und überdiess noch eine zweite, durch denselben Punct und den Anfangspunct der Coordinaten gehende, gerade Linie und zwar im Anfangspuncte berührt. Wie auch der Punct (y', x') auf der gegebenen Parabel (1) fortrücken mag, die durch (2) dargestellte Parabel hört nicht auf, die gerade Linie ($w = 2\gamma$, $v = \alpha$), dass heisst, denjenigen Durchmesser der erstgenannten Parabel, welche durch den zweiten Durchschnittspunct derselben mit der zweiten Coordinaten-Axe geht, zu berühren. Ich verweile nicht bei der Aussage des hierin enthaltenen Satzes, der sich auch theilweise umkehren lässt.

693. Die folgenden beiden Sätze, deren Richtigkeit nach dem Vorhergehenden sogleich in die Augen springt, reihen sich an die Sätze der 690. und 692. Nummer unmittelbar an.

Wenn man irgend eine Tangente der durch folgende Gleichung zwischen Linien-Coordinaten

$$F(w, v, b, a) = 0$$

dargestellten, durchaus beliebigen Curve durch (w', v') *bezeichnet, so gehen alle Curven, welche durch folgende Gleichung:*

$$F(w', v', y, x) = 0,$$

dargestellt werden, wenn wir y *und* x *als Punct-Coordinaten und veränderlich betrachten und der Tangente* (w', v') *nach einander alle möglichen Lagen geben, durch den festen Punct* ($y = b$, $x = a$).

Wenn wir ferner b *und* a *als Linien-Coordinaten und veränderlich betrachten, als* w *und* v *oder als* v *und* u, *so stellen, bei denselben Voraussetzungen als eben, die Gleichungen:*

$$F(w', v', w, v) = 0 \text{ oder } F(w', v', v, u) = 0,$$

solche Curven dar, welche alle dieselbe gerade Linie ($w = b$, $v = a$) *oder* ($v = b$, $u = a$) *berühren.*

694. Um den ersten der beiden vorstehenden Sätze durch ein Beispiel zu erläutern, wollen wir von folgender Gleichung ausgehen:

$$(v-v'')^2+(u-u'')^2 = k^2, \qquad (1)$$

die bekanntlich, bei der Voraussetzung rechtwinkliger Coordinaten, eine solche Curve zweiter Classe darstellt, deren ein Brennpunct in den Anfangspunct der Coordinaten fällt, deren, diesem Brennpuncte entsprechende, Directrix die gerade Linie (v'', u'') und deren Parameter gleich dem Doppelten des reciproken Werthes von k ist. Wenn wir alle Glieder dieser Gleichung mit der vierten Potenz einer beliebigen Grösse a, die eine gegebene Linien-Länge bedeutet, multipliciren und dann x und y an die Stelle von $(-\frac{1}{2}a^2v'')$ und $(-\frac{1}{2}a^2u'')$ und v' und u' an die Stelle von v und u schreiben, so erhalten wir folgende Gleichung:

$$(x+\tfrac{1}{2}a^2v')^2+(y+\tfrac{1}{2}a^2u')^2 = (\tfrac{1}{2}a^2k)^2, \qquad (2)$$

die, wenn wir y und x als veränderlich betrachten und für (v', u') nach einander alle möglichen Tangenten der gegebenen Curve nehmen, solche Kreise von constantem Ra-

Digitized by Google

dius darstellt, die alle durch den festen Punct ($y = -\frac{1}{2}a^2u''$, $x = -\frac{1}{2}a^2v''$) gehen. Die Mittelpuncte aller dieser Kreise liegen also auf einem neuen Kreise, dessen Gleichung folgende ist:

$$(x+\tfrac{1}{2}a^2v'')^2+(y+\tfrac{1}{2}a^2u'')^2 = (\tfrac{1}{2}a^2k)^2.$$

Hiernach erhalten wir den folgenden Satz:

Wenn man an eine Curve zweiter Classe eine beliebige Tangente legt, die von zwei festen im Brennpuncte derselben sich unter rechten Winkeln schneidenden geraden Linien (OY, OX) irgend zwei Segmente (OQ, OP) abschneidet, und dann auf denselben beiden geraden Linien zu jedem dieser Segmente und einer gegebenen Linien-Länge die dritte Proportional-Linie (OS, OR) sucht, so findet man zwei solche Puncte (S, R), deren Mitte einen Kreis beschreibt, wenn die an die gegebene Curve gelegte Tangente nach einander alle möglichen Lagen erhält.

Ein einfaches Beispiel des zweiten Satzes der vorigen Nummer liefert folgende Gleichung:

$$u''v+v''u = u''v'', \qquad (1)$$

die einen Punct darstellt. Bedeutet (v', u') irgend eine durch diesen Punct gehende gerade Linie, so stellt die Gleichung:

$$v'u+u'v = uv, \qquad (2)$$

diejenige Parabel dar, welche die beiden Coordinaten-Axen in denjenigen beiden Puncten berührt, in welchen dieselben von dieser geraden Linie geschnitten werden. Also:

Alle Parabeln, welche irgend zwei gegebene gerade Linien in solchen zwei Puncten berühren, welche mit einem gegebenen festen Puncte in gerader Linie liegen, berühren ausserdem noch ein und dieselbe dritte gerade Linie.

Diese dritte gerade Linie (v'', u'') ist die zweite Diagonale desjenigen Parallelogramms, dessen zwei Seiten in die beiden gegebenen geraden Linien fallen, und dessen erste Diagonale den Durchschnitt dieser beiden Linien mit dem gegebenen festen Puncte verbindet. Wenn diese dritte gerade Linie gegeben ist, so können wir, umgekehrt, auch leicht den festen Punct construiren, und hiernach erhalten wir, da drei gegebene gerade Linien sich auf dreifache Weise zu zwei combiniren lassen, folgenden Satz:

Die drei Berührungs-Chorden aller Parabeln, welche einem gegebenen Dreiecke eingeschrieben sind, gehen durch drei feste Puncte. Diese Puncte sind die Winkelpuncte eines neuen Dreiecks, das dem gegebenen umschrieben und demselben ähnlich ist.

Wenn wir, statt von der Gleichung (1), von der Gleichung (2) ausgehen, so erhalten wir bei demselben Verfahren den Satz der 273. und, mit einer leichten Modification, den Satz der 274. Nummer.

695. Es ist klar, dass die vier in diesem Paragraphen aufgestellten Sätze (690, 692, 693) nicht nur auf die von uns bisher gebrauchten, sondern auch auf alle mögliche sonstige Punct- und Linien-Coordinaten sich beziehen. So können wir zum Beispiel auch z und x oder y (416, Note), oder sogenannte Polar-Coordinaten, oder auch die Coordinaten desjenigen Systems, mit welchem ich mich in einem Aufsatze in CRELLE'S Journal *) beschäftigt habe, wonach die Lage eines Punctes durch die Quotienten je zweier Abstände desselben von drei gegebenen geraden Linien ausgedrückt wird, zu Grunde legen.

*) *Ueber ein neues Coordinaten-System.* V. S. 1 — 36.

696. Ich schliesse diesen Paragraphen mit einer allgemeinen Andeutung. Es finde dieselbe bei allen vier Haupt-Theoremen desselben ihre Stelle; um mich indess einfacher und bequemer ausdrücken zu können, will ich mich zunächst ausschliesslich auf den ersten dieser vier Sätze beschränken.

Wenn wir wiederum in der Gleichung irgend einer gegebenen Curve:

$$F(y, x, b, a) = 0, \qquad (1)$$

nach einander für die veränderlichen Grössen y und x bestimmte Coordinaten-Werthe, y' und x', y'' und x'', u. s. w., die sich auf verschiedene Puncte dieser Curve beziehen, nehmen, wonach zwei der alsdann resultirenden Gleichungen folgende sind:

$$\begin{aligned} F(y', x', b, a) &= 0, \\ F(y'', x'', b, a) &= 0, \end{aligned} \qquad (2)$$

so können wir durch diese beiden Gleichungen b und a, die beiden Constanten der Gleichung (1), bestimmen. Schreiben wir in den letzten Gleichungen für b und a die Symbole $\psi(y, x)$ und $\varphi(y, x)$, welche wir als zwei unbekannte, durch diese Gleichungen zu bestimmende Grössen betrachten, so erhalten wir:

$$\begin{aligned} F[y', x', \psi(y, x), \varphi(y, x)] &= 0, \\ F[y'', x'', \psi(y, x), \varphi(y, x)] &= 0, \end{aligned} \qquad (3)$$

und es ist:

$$\begin{aligned} \psi(y, x) &= b, \\ \varphi(y, x) &= a. \end{aligned} \qquad (4)$$

Nun können wir aber auch die Gleichungen (3) und (4) aus einem andern Gesichtspuncte ansehen, indem wir y und x als veränderlich und $\psi(y, x)$ und $\varphi(y, x)$ als beliebige gegebene Functionen dieser Grössen betrachten. Alsdann stellen die beiden Gleichungen (3) zwei Curven dar, ebenso die beiden Gleichungen (4). Jene beiden Curven gehen alsdann offenbar durch alle Durchschnittspuncte dieser beiden, schneiden einander ausserdem aber auch noch in andern Puncten, weil, im Allgemeinen, b und a nicht die einzigen Werthe sind, welche wir für $\psi(y, x)$ und $\varphi(y, x)$ durch Elimination zwischen den beiden Gleichungen (3) erhalten. Es können b und a alle möglichen Werthe haben und insbesondere auch gleich Null sein. Ich begnüge mich hier mit der blossen Aussage des auf diese Weise bewiesenen Satzes, indem ich dieselbe sogleich auf alle vier bisher behandelten Fälle ausdehne. Einer ganz speciellen Anwendung dieses Satzes werden wir in dem folgenden Paragraphen begegnen.

Wenn irgend eine Curve durch die Gleichung

$$F(\lambda, \varkappa, b, a) = 0, \qquad (1)$$

in welcher λ und $\varkappa$ irgend beliebige Punct- oder Linien-Coordinaten und b und a zwei Constanten bedeuten, dargestellt wird, so erhalten wir die Gleichungen neuer Curven, wenn wir für λ und $\varkappa$ solche Werthe λ' und $\varkappa'$ nehmen, welche der Gleichung (1) Genüge thun, und dann

$$\begin{aligned} b &= \psi(\mu, \nu), \\ a &= \varphi(\mu, \nu), \end{aligned} \qquad (2)$$

setzen und μ und ν als veränderlich und zwar einmal als beliebige Punct-Coordinaten, das andere Mal als beliebige Linien-Coordinaten betrachten. Einmal gehen alsdann alle solche Curven, deren Gleichungen mithin folgende Form haben:

$$F[\lambda', \varkappa', \psi(\mu, \nu), \varphi(\mu, \nu)] = 0, \qquad (3)$$

durch alle Durchschnittspuncte der beiden Oerter (2), das andere Mal werden sie von allen gemeinschaftlichen Tangenten dieser beiden Oerter ebenfalls berührt.

Digitized by Google

§ 3.

Das Princip der Reciprocität.

697. Die allgemeinste Gleichung der geraden Linie zwischen gewöhnlichen Punct-Coordinaten ist:

$$Ay+Bx+C = 0. \qquad (1)$$

Statt dieser Gleichung können wir folgende nehmen:

$$[\eta b+\vartheta a+\xi]y+[\varkappa b+\lambda a+\mu]x+[\nu b+\varrho a+\sigma] = 0, \qquad (2)$$

indem wir die Form der in derselben vorkommenden drei Constanten ändern. Die Gleichung (2) ist die allgemeinste Gleichung, in welcher einerseits die beiden veränderlichen Grössen y und x und andrerseits zwei constante Grössen b und a nur in der ersten Potenz vorkommen. Wenn wir für y und x die Coordinaten-Werthe irgend eines Punctes $(y' x')$ der bezüglichen geraden Linie substituiren, und dann b und a als veränderlich, als y und x, betrachten, während wir durch alle griechische Buchstaben ein für alle Mal bestimmte Coefficienten bezeichnen, so ergibt sich aus der letzten Gleichung folgende:

$$[\eta y'+\vartheta x'+\xi]y+[\varkappa y'+\lambda x'+\mu]x+[\nu y'+\varrho x'+\sigma] = 0, \qquad (3)$$

oder, wenn wir anders ordnen:

$$[\eta y'+\varkappa x'+\nu]y+[\vartheta y'+\lambda x'+\varrho]x+[\xi y'+\mu x'+\sigma] = 0. \qquad (4)$$

Nach dem letzten Satze des vorigen Paragraphen stellen, wie auch der Punct (y', x') auf der geraden Linie (1) angenommen werden mag, die Gleichungen (3) und (4) eine solche gerade Linie dar, die immer durch den Punct (b, a) geht. Dieser Punct ist der Durchschnittspunct der durch folgende zwei Gleichungen dargestellten geraden Linien:

$$\begin{aligned} \eta y+\vartheta x+\xi &= \Theta(\nu y+\varrho x+\sigma), \\ \varkappa y+\lambda x+\mu &= \Xi(\nu y+\varrho x+\sigma), \end{aligned} \qquad (5)$$

indem wir, der Kürze halber, $\frac{A}{C} = \Theta$ und $\frac{B}{C} = \Xi$ setzen. Wir nennen den Punct (b, a) den Pol der geraden Linie (1), in Beziehung auf die Gleichung (2), und die gerade Linie (4) die Polare des Punctes (y', x'), in Beziehung auf die Gleichung (2). Diese Gleichung können wir füglich *æquatio directrix* nennen; die Bestimmung des Poles einer gegebenen geraden Linie und der Polaren eines gegebenen Punctes richtet sich nach den Werthen der neun Coefficienten η, ϑ, ξ, $\varkappa$, λ, μ, ν, ϱ und σ, die in dieser Gleichung vorkommen.

Wir können hiernach dem in dem Vorstehenden bewiesenen Satze folgende Aussage geben:

Die Polaren aller Puncte einer gegebenen geraden Linie gehen durch den Pol derselben.

Umgekehrt folgt ferner, indem wir die Gleichung (4) als *æquatio directrix* nehmen, dass der Pol jeder geraden Linie, welche durch den Punct (b, a) geht, auf der geraden Linie (1) liegt. Einer dieser Pole ist der Punct (y', x'). Also:

Die Pole aller geraden Linien, welche durch einen gegebenen Punct gehen, liegen auf der Polaren dieses Punctes.

698. Um den Pol einer gegebenen geraden Linie (1), in Beziehung auf die Gleichung (2), zu construiren, müssen wir die neun, ein für alle Mal gegebenen, Coefficienten dieser Gleichung, oder vielmehr bloss die acht Quotienten eines beliebigen derselben in alle Fig. 39.

übrigen, kennen. Wenn wir, zum Behuf dieser Construction, die drei durch folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned} \eta y+\vartheta x+\xi &= 0, \\ \varkappa y+\lambda x+\mu &= 0, \\ \nu y+\varrho x+\sigma &= 0, \end{aligned} \qquad (6)$$

dargestellten drei geraden Linien als gegeben betrachten, so sind jene Coefficienten alle neun bekannt, wenn überdiess noch drei derselben, etwa η, $\varkappa$ und ν, oder auch drei lineare Beziehungen zwischen denselben gegeben sind.

Die beiden Coordinaten-Axen seien OY und OX, die drei gegebenen geraden Linien (6) AC, BC, AB und MN sei die gerade Linie (1), deren Pol wir suchen. Wir wollen denselben als den Durchschnitt der beiden geraden Linien (5) construiren. Die erste dieser beiden geraden Linien geht, was die Form ihrer Gleichung zeigt, durch den Punct A, den Durchschnitt von AC und AB; ebenso geht die zweite derselben durch den Punct B, den Durchschnitt von BC und AB. Zur vollständigen Bestimmung dieser beiden geraden Linien brauchen wir also ausserdem nur noch einen zweiten Punct jeder derselben zu kennen. Um solche zwei Puncte zu erhalten, wollen wir beispielsweise, der obigen Bemerkung gemäss, voraussetzen, es sei

$$\vartheta = \varkappa, \qquad \xi = \nu, \qquad \mu = \varrho. \qquad (7)$$

Alsdann erhalten wir für die Ordinate des Durchschnittspunctes der ersten der beiden geraden Linien (5) mit der zweiten Coordinaten-Axe:

$$y = -\frac{\xi-\vartheta\sigma}{\eta-\vartheta\nu} = \frac{MQ}{MT}.OT = OY. \qquad (8)$$

Den zweiten dieser Ausdrücke für y erhalten wir, indem wir in dem ersten Nenner und Zähler durch $\xi = \nu$ dividiren und alsdann berücksichtigen, dass $\left(-\frac{\xi}{\eta}\right) = OT$, $\left(-\frac{\sigma}{\nu}\right) = OQ$ und $\left(-\frac{1}{\vartheta}\right) = OM$. Hiernach erhalten wir ohne Mühe den Punct Y und somit die erste der beiden geraden Linien (5), nemlich AY. Auf ähnliche Weise ist der Punct X, in welchem die zweite dieser beiden geraden Linien BX in die erste Axe einschneidet, durch folgende Gleichung gegeben:

$$x = \frac{NR}{NS}.OS = OX. \qquad (9)$$

Endlich ist der gesuchte Pol der gegebenen geraden Linie MN der Punct P, der Durchschnitt von AY und BX.

Umgekehrt können wir leicht, wenn der Pol von MN, der Punct P gegeben ist, diese gerade Linie construiren. Die Puncte Y und X sind alsdann bekannt und wir erhalten ohne Mühe aus (8) und (9):

$$OM = \frac{YQ}{YT}.OT, \qquad ON = \frac{XR}{XS}.OS. \qquad (10)$$

Aus dem Vergleich der Gleichungen (8) und (9) mit den Gleichungen (10) ergibt sich die beiläufige Bemerkung, dass der Pol der geraden Linie XY in den Durchschnitt der beiden geraden Linien AM und BN fallen würde.

699. In dem Falle, dass die drei Gleichungen (7) bestehen, können wir auch den Pol einer gegebenen geraden Linie und die Polare eines gegebenen Punctes, in Beziehung auf die Gleichung (2), construiren, indem wir einen Kegelschnitt zu Hülfe nehmen, denjenigen nemlich, dessen Gleichung folgende ist:

$$\eta y^2+2\vartheta xy+\lambda x^2+2\xi y+2\mu x+\sigma = 0. \qquad (11)$$

Digitized by Google

Diejenige gerade Linie, deren Pol, in Beziehung auf diesen Kegelschnitt, der Punct (h, a) ist, hat folgende Gleichung:

$$[\eta b+\vartheta a+\xi]y+[\vartheta b+\lambda a+\mu]x+[\xi b+\mu a+\sigma] = o,$$

und diese Gleichung ist, unter den gemachten Voraussetzungen, mit der Gleichung (2) identisch. Es ist also der Pol einer gegebenen geraden Linie, in Beziehung auf diese Gleichung, identisch dasselbe mit dem Pole derselben geraden Linie, in Beziehung auf den Kegelschnitt (11), der *conica directrix*. Dasselbe gilt von der Polaren eines gegebenen Punctes.

700. Durch die Voraussetzung, dass die Gleichungen (7)' Statt finden, werden die beiden Gleichungen (2) und (4) übereinstimmend, wenn wir y' und x' mit a und h vertauschen, es ist (y', x') der Pol der durch (4) dargestellten geraden Linie, auch in Beziehung auf die Gleichung (2). Diese Gleichung ist in diesem Falle symmetrisch, in Beziehung auf die beiden veränderlichen Grössen y und x und die beiden Constanten b und a. Die beiden Sätze der 697. Nummer treten alsdann in einen innigern Zusammenhang unter einander.

Die Polaren aller Puncte einer gegebenen geraden Linie gehen alle durch ein und denselben festen Punct, durch den Pol derselben. Die gegebene gerade Linie ist die Polare dieses festen Punctes, es ist dieselbe der geometrische Ort für die Pole aller geraden Linien, welche durch diesen Punct gehen.

In dem Folgenden wollen wir, wenn nicht ausdrücklich das Gegentheil bemerkt werden wird, durchgehends voraussetzen, dass die Gleichung (2), die *æquatio directrix*, in Beziehung auf y, x und b, a, symmetrisch sei.

701. Die beiden möglichst einfachen, in Beziehung auf y, x und h, a, symmetrischen Gleichungen sind folgende:

$$\begin{aligned} y\pm ax+b &= o, \\ by+ax\pm r^2 &= o. \end{aligned} \qquad (12)$$

Jede derselben können wir an die Stelle der Gleichung (2) setzen. Was die erste derselben betrifft, so können wir leicht den Pol der durch dieselbe dargestellten geraden Linie, den Punct (b, a), construiren, müssen aber, weil h und a nicht homogen sind, zum Behuf dieser Construction, eine Linien-Länge als Einheit annehmen. Statt dessen können wir sogleich an die Stelle der ersten der beiden vorstehenden Gleichungen folgende setzen:

$$p(y+h)\pm ax = o, \qquad (13)$$

Dieser Gleichung entspricht eine Parabel, deren Gleichung folgende ist:

$$x^2\pm 2py = o;$$

denn in Beziehung auf diese Parabel ist (b, a) der Pol der durch (13) dargestellten geraden Linie.

Die Construction des Poles (b, a), wenn wir die zweite der beiden Gleichungen bei (12) zu Grunde legen, ergibt sich ebenfalls ohne alle Mühe. Es entspricht dieser Gleichung, bei der Voraussetzung rechtwinkliger Coordinaten, ein Kreis, dessen Gleichung folgende ist:

$$y^2+x^2 = \mp r^2,$$

und der mithin, je nachdem wir das obere oder untere Zeichen nehmen, imaginär oder reell ist. Wir sehen zugleich leicht ein, dass wir auch, vermittelst des reellen Kreises, den Pol, in Beziehung auf den imaginären Kreis, construiren können. Wir

brauchen zu diesem Ende blos den Pol, in Beziehung auf den reellen Kreis, zu construiren und dann die Coordinaten desselben mit entgegengesetztem Zeichen zu nehmen. Wenn wir statt der in Rede stehenden zweiten Gleichung bei (12) folgende allgemeinere nehmen:

$$\pm\eta by \pm \lambda ax \pm \sigma = 0,$$

so ist die entsprechende Curve ein reeller oder imaginärer Kegelschnitt, dessen Mittelpunct in den Anfangspunct der Coordinaten fällt. Die Construction des Poles (b, a) nach der 698. Nummer ist hier zwar nicht anwendbar; wenn wir indess die drei Coefficienten η, λ und σ in der letzten Gleichung kennen, so können wir unmittelbar die beiden übrigen Constanten, b und a, construiren, wenn die bezügliche jedesmalige gerade Linie gegeben ist.

702. Nach diesen Vorbereitungen gehen wir zur Entwicklung des Principes der Reciprocität über.

Die Polare des Durchschnittspunctes zweier gegebener gerader Linien geht durch die Pole dieser beiden geraden Linien. Der Pol einer geraden Linie, die zwei gegebene Puncte verbindet, ist der Durchschnittspunct der Polaren dieser beiden Puncte. Wenn also drei oder mehrere gerade Linien durch denselben Punct gehen, so liegen ihre Pole in gerader Linie; wenn, umgekehrt, drei oder mehrere Puncte in gerader Linie liegen, so gehen ihre Polaren durch denselben Punct. Aus diesen Bemerkungen, die unmittelbare Folgerungen aus den Sätzen der 700. Nummer sind, ist ersichtlich, wie jedem Satze, der sich lediglich auf den Durchschnitt von geraden Linien und auf Puncte, die in gerader Linie liegen, ohne irgend eine Art von absoluter Grössen-Bestimmung, bezieht, ein zweiter Satz entspricht, den man sogleich erhält, wenn man sich die Pole und Polaren der Winkelpuncte und Seiten derjenigen Figur, auf welche sich der gegebene Satz bezieht, construirt denkt. Das Princip dieser Uebertragung tritt als solches noch nicht in folgendem Satze hervor, den H. BRIANCHON in GERGONNE'S Annalen, früher als dieses Princip seine Entwicklung erhalten hatte, mittheilte:

Wenn ein beliebiger Kegelschnitt und in der Ebene desselben irgend ein Sechseck, dessen drei gegenüberliegende Seiten-Paare sich in solchen drei Puncten schneiden, die in gerader Linie liegen, gegeben ist, so gehen die drei Diagonalen desjenigen Sechsecks, dessen Winkelpuncte die Pole der Seiten des gegebenen Sechseeks, in Beziehung auf den gegebenen Kegelschnitt, sind, durch ein und denselben Punct.

Der Uebergang von diesem Satze zu jenem Principe ist aber nur ein Schritt. Ein einziges Beispiel wird die Anwendung desselben anschaulich machen. Wir wollen zu diesem Ende von dem Satze der 427. Nummer ausgehen:

Wenn zwei gerade Linien und auf jeder derselben drei Puncte gegeben sind, so können wir diese Puncte, paarweise genommen, durch neun neue gerade Linien verbinden. Diese neun geraden Linien schneiden sich in achtzehn neuen Puncten. Von diesen achtzehn Puncten liegen sechsmal drei in gerader Linie. Von diesen sechs geraden Linien gehen drei und drei durch denselben Punct.

Aus diesem Satze ergibt sich sogleich der nachstehende, so wie, umgekehrt, dieser aus jenem:

Wenn zwei Puncte und drei durch jeden derselben gehende gerade Linien gegeben sind, so schneiden sich diese geraden Linien noch in neun neuen Puncten. Durch diese neun Puncte, paarweise genommen, lassen sich achtzehn neue gerade Linien legen.

Digitized by Google

Von diesen achtzehn geraden Linien gehen seehsmal drei durch denselben Punct (74). *Von diesen seehs Puncten liegen drei und drei in gerader Linie.*

703. Zuweilen liefert die Anwendung des Principes der Reciprocität auf einen gegebenen Satz keinen neuen Satz. Es kann der Satz, den wir nach demselben aus dem gegebenen herleiten, die blosse Umkehrung dieses Satzes sein. Ein Beispiel hiervon geben die folgenden beiden durch jenes Princip mit einander verbundenen Sätze:

Wenn die drei Seiten eines Dreiecks den drei Seiten eines andern in solchen drei Puncten begegnen, die in gerader Linie liegen, so schneiden sich diejenigen geraden Linien, welche die diesen Seiten gegenüberliegenden Winkelpuncte verbinden, in demselben Puncte.

Wenn diejenigen drei geraden Linien, welche die Winkelpuncte zweier gegebener Dreiecke, paarweise genommen, verbinden, in demselben Puncte sich schneiden, so schneiden sich die diesen Winkelpuncten gegenüberliegenden Seiten in solchen drei Puncten, die in gerader Linie liegen.

704. Wenn irgend ein Polygon gegeben ist, so können wir ein zweites Polygon construiren, dessen Winkelpuncte die Pole der Seiten des gegebenen sind; zugleich sind alsdann die Seiten des zweiten Polygons die Polaren der Winkelpuncte des gegebenen. Diese Beziehungen finden Statt, unabhängig von der Grösse und der Anzahl der Seiten der Polygone, sie gelten also auch dann noch, wenn an die Stelle derselben Curven treten. Es liegen die Pole der Tangenten einer gegebenen Curve auf dem Umfange einer zweiten Curve, welche wir die Polar-Curve der gegebenen nennen wollen; die Polaren der Puncte von jener sind Tangenten von dieser. Die Beziehung solcher zwei Curven zu einander ist eine durchaus gegenseitige, wenn die Hülfs-Gleichung (*æquatio directrix*), rücksichtlich auf y, x und b, a, symmetrisch ist. Im entgegengesetzten Falle können wir die erste Curve auch noch als die Polar-Curve der zweiten betrachten; müssen alsdann aber die Form der Hülfs-Gleichung ändern.

Wenn die gegebene Curve von irgend einer m. Ordnung ist, so wird sie, im Allgemeinen, von einer gegebenen geraden Linie in m Puncten geschnitten; die m Polaren dieser Durchschnittspuncte, Tangenten der Polar-Curve, vereinigen sich alle in demselben Puncte, dem Pole jener geraden Linie. Keine neue Tangente der Polar-Curve kann durch diesen Punct gehen, denn sonst müsste die gegebene gerade Linie die gegebene Curve auch noch in einem (m+1)-Puncte, dem Pole der neuen Tangente, schneiden. Da wir diese gerade Linie immer so wählen können, dass ein beliebiger Punct ihr Pol ist, so folgt, dass an die Polar-Curve irgend einer gegebenen Curve m. Ordnung, von einem gegebenen Puncte aus, sich, im Allgemeinen, m Tangenten legen lassen. Eine solche Curve nennt H. Gergonne eine Curve m. Classe, eine Benennung, die ich in der ersten Abtheilung des vorliegenden Bandes aufgenommen habe, wobei ich indess die Definition einer solchen Curve an den Grad ihrer Gleichung zwischen den neuen Linien-Coordinaten knüpfe.

Die Polar-Curve einer gegebenen Curve irgend einer m. Ordnung ist von der m. Classe und, umgekehrt, die Polar-Curve einer gegebenen Curve irgend einer m. Classe ist von der m. Ordnung.

705. Es sei durch die Gleichung:

$$F(y, x) = 0, \qquad (1)$$

irgend eine, algebraische oder transcendente, Curve gegeben: wir wollen die Polar-

Digitized by Google

Curve derselben bestimmen, indem wir die allgemeinste, nicht symmetrische, Hülfs-Gleichung des ersten Grades:

$$[\eta b+\vartheta a+\xi]y+[\varkappa b+\lambda a+\mu]x+[\nu b+\varrho a+\sigma] = 0, \qquad (1)$$

zu Grunde legen. Und zwar wollen wir erstens die Polar-Curve durch ihre Gleichung zwischen Linien-Coordinaten ausdrücken.

Wenn (y', x') irgend einen Punct der gegebenen Curve bezeichnet, so stellt die letzte Gleichung, wenn wir in derselben y' und x' statt y und x schreiben, und dann b und a als veränderlich, als y und x, betrachten, die Polare jenes Punctes (y', x'), eine Tangente der Polar-Curve, dar. Dieser Gleichung können wir alsdann folgende Form geben:

$$[\eta y'+\varkappa x'+\nu]y+[\vartheta y'+\lambda x'+\varrho]x+[\xi y'+\mu x'+\sigma] = 0,$$

und indem wir die bezügliche gerade Linie durch (w, v, u) bezeichnen, ergibt sich (402):

$$\frac{\eta y'+\varkappa x'+\nu}{\xi y'+\mu x'+\sigma} = \frac{u}{w}, \qquad \frac{\vartheta y'+\lambda x'+\varrho}{\xi y'+\mu x'+\sigma} = \frac{v}{w}.$$

Hieraus erhält man:

$$y' = \frac{(\varrho\varkappa-\nu\lambda)w+(\nu\mu-\sigma\varkappa)v+(\sigma\lambda-\varrho\mu)u}{(\lambda\eta-\varkappa\vartheta)w+(\varkappa\xi-\mu\eta)v+(\mu\vartheta-\lambda\xi)u},$$

$$x' = -\frac{(\varrho\eta-\nu\vartheta)w+(\nu\xi-\sigma\eta)v+(\sigma\vartheta-\varrho\xi)u}{(\lambda\eta-\varkappa\vartheta)w+(\varkappa\xi-\mu\eta)v+(\mu\vartheta-\lambda\xi)u},$$

und wenn wir diese Werthe von y' und x' in die Gleichung der gegebenen Curve für y und x substituiren, so kommt:

$$F\left\{\frac{(\varrho\varkappa-\nu\lambda)w+(\nu\mu-\sigma\varkappa)v+(\sigma\lambda-\varrho\mu)u}{(\lambda\eta-\varkappa\vartheta)w+(\varkappa\xi-\mu\eta)v+(\mu\vartheta-\lambda\xi)u}, -\frac{(\varrho\eta-\nu\vartheta)w+(\nu\xi-\sigma\eta)v+(\sigma\vartheta-\varrho\xi)u}{(\lambda\eta-\varkappa\vartheta)w+(\varkappa\xi-\mu\eta)v+(\mu\vartheta-\lambda\xi)u}\right\} = 0.$$

Diese Gleichung stellt, wenn wir w, v und u als veränderlich betrachten, die zu bestimmende Polar-Curve dar.

706. Wir wollen zweitens dieselbe Polar-Curve durch Punct-Coordinaten bestimmen. Wenn wir b und a als Coordinaten und veränderlich betrachten und der Punct (y, x) die gegebene Curve beschreibt, so stellt die Gleichung (2) nach einander alle möglichen Tangenten der Polar-Curve dar. Um den Berührungspunct auf einer solchen Tangente zu erhalten, brauchen wir bloss den Durchschnitt dieser Tangente mit einer zweiten, unmittelbar auf dieselbe folgenden, zu suchen, und zu diesem Ende die Coordinaten-Werthe b und a aus der Gleichung (2) und ihrer Differential-Gleichung, in Beziehung auf y und x:

$$(\eta b+\vartheta a+\xi)dy+(\varkappa b+\lambda a+\mu)dx = 0, \qquad (3)$$

zu ziehen, wobei wir den Werth von $\frac{dy}{dx}$ aus der Gleichung (1) herleiten müssen. Denn die Gleichung jener zweiten Tangente ergibt sich aus (2), wenn wir in dieser Gleichung $(y+dy)$ und $(x+dx)$ statt y und x schreiben, und diese Gleichung können wir, zum Behuf der Bestimmung von b und a, vermittelst der Gleichung (2), reduciren und erhalten alsdann die vorstehende Gleichung (3). Diese Gleichung stellt mithin, wenn wir b und a als veränderlich betrachten, eine solche gerade Linie dar, die durch den Berührungspunct auf der in Rede stehenden ersten Tangente (2) geht. Der durch die beiden Gleichungen (2) und (3) bestimmte Punct (b, a) ist ein Punct der Polar-Curve; wenn wir diese beiden Gleichungen auf irgend eine Weise zu einer neuen Gleichung mit einander verbinden, so stellt diese Gleichung einen neuen Ort, der durch den Punct (b, a) geht, dar, und dieser Ort ist jene Polar-Curve, wenn die resultirende Gleichung diejenige ist, welche man erhält, wenn man aus den beiden Gleichungen (2) und (3), vermittelst der

Digitized by Google

Gleichung (1), y und x eliminiren. Es sei die auf diese Weise sich ergebende Gleichung folgende:

$$\varphi(b, a) = 0. \qquad (4)$$

Durch die drei Gleichungen (1), (2) und (3) sind die vier Grössen y, x, b und a vollkommen bestimmt, wenn eine derselben gegeben ist: wir können jene als Functionen von dieser ansehen. Differentiiren wir demnach die Gleichung (2) vollständig in Beziehung auf y, x, b und a, so erhalten wir, wenn wir vermittelst der Gleichung (3) reduciren, folgende Gleichung:

$$(\eta y+\varkappa x+\nu)db+(\vartheta y+\lambda x+\varrho)da = 0, \qquad (5)$$

wobei wir den Werth des Differential-Quotienten $\frac{db}{da}$ aus der Gleichung (4) nehmen können. Wir können aber auch die letzte Gleichung, als durch blosse Differentiation der Gleichung (2), in Beziehung auf b und a, wobei y und x als constant zu betrachten sind, entstanden, ansehen; so dass, wenn wir y und x mit b und a vertauschen, die Gleichung (5) in dieselbe Beziehung zur Gleichung (2) tritt, in der früher die Gleichung (3) stand. Wenn wir zwischen den drei Gleichungen (4), (2) und (5) die Grössen b und a eliminiren, so kommen wir nothwendig zur Gleichung (1) zurück.

Wir finden hiernach durch eine einfache analytische Betrachtung die frühere Bemerkung bestätigt, dass auch die gegebene Curve (1) gegenseitig die Polar-Curve ihrer eigenen Polar-Curve ist, nur dass hierbei die Hülfs-Gleichung (*æquatio directrix*) jedesmal ihre Form ändert, wenn dieselbe, in Beziehung auf y, x und b, a, nicht symmetrisch ist, denn bei der Rückkehr der zweiten Curve zur ersten treten b und a an die Stelle von y und x.

707. Wir können die in der vorigen Nummer angezeigten Eliminationen nur dann ausführen, wenn die Gleichung der Curve (1) wirklich gegeben und nicht durch ein blosses Functions-Zeichen dargestellt ist. Es ist diess aber nicht nothwendig, wenn wir statt der Gleichung (4) bloss die Differential-Gleichung derselben verlangen, und in diesem Falle braucht die gegebene Curve ebenfalls nur durch ihre Differential-Gleichung gegeben zu sein. Diese Gleichung sei folgende:

$$f\left(\frac{dy}{dx}, y, x\right) = 0, \qquad (6)$$

Wir erhalten zuvörderst aus der Gleichung (3):

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\varkappa b+\lambda a+\mu}{\eta b+\vartheta a+\xi},$$

und dann ferner aus der Zusammenstellung der beiden Gleichungen (2) und (5):

$$y = \frac{(\varrho\varkappa-\nu\lambda)(adh-bda)+(\sigma\varkappa-\nu\mu)db+(\sigma\lambda-\varrho\mu)da}{(\lambda\eta-\varkappa\vartheta)(adb-bda)+(\mu\eta-\varkappa\xi)db+(\mu\vartheta-\lambda\xi)da},$$

$$x = -\frac{(\varrho\eta-\nu\vartheta)(adb-hda)+(\sigma\eta-\nu\xi)db+(\sigma\vartheta-\varrho\xi)da}{(\lambda\eta-\varkappa\vartheta)(adb-bda)+(\mu\eta-\varkappa\xi)db+(\mu\vartheta-\lambda\xi)da}.$$

Wenn wir die vorstehenden Werthe von $\frac{dy}{dx}$, y und x in die gegebene Differential-Gleichung (6) substituiren, so gelangen wir unmittelbar zur gesuchten Differential-Gleichung der Polar-Curve. *)

*) An die letzten Nummern des Textes knüpfen sich rein analytische Betrachtungen an. Indem ich mich hier auf einige blosse Andeutungen beschränke, ist meine Absicht, denselben Gegenstand an einem andern Orte wieder aufzunehmen.

706. Wenn eine gegebene Curve einen vielfachen Punct, das heisst, einen solchen Punct hat, in welchem mehrere Zweige derselben sich schneiden, so entspricht diesem Puncte in der Polar-Curve eine gerade Linie, welche eine gleiche Anzahl von Zweigen dieser Curve berührt. Wenn jene Zweige, die durch den-

---

Wenn irgend eine, auf eine beliebige Curve sich beziehende, Differentiel-Gleichung gegeben ist, so können wir die Differential-Gleichung der Polar-Curve, indem wir eine beliebige lineare *æquatio directrix* zu Grunde legen, unmittelbar hinschreiben (707). Wenn wir alsdann das Integral einer dieser beiden Differentiel-Gleichungen kennen, so erhalten wir das Integral der andern durch blosse Elimination (706). Wenn zum Beispiel die Gleichung (1) das bekannte Integral der Gleichung (6) ist, so erhalten wir die Gleichung (4), die durch Elimination von $\frac{dy}{dx}$, y und x zwischen den Gleichungen (1), (2) und (3) sich ergibt, als Integral der am Ende der 707. Nummer bezeichneten, der Raum-Ersparniss wegen, nicht hingeschriebenen Differential-Gleichung. Ich will hierbei auf einen Fall besonders aufmerksam machen. Wenn die letztgenannte Gleichung auf folgende sich reducirt:

$$\frac{(\varrho\varkappa-\nu\lambda)(adh-bda)+(\sigma\varkappa-\nu\mu)db+(\sigma\lambda-\varrho\mu)dz}{(\lambda\eta-\varkappa\vartheta)(adh-hdz)+(\mu\eta-\varkappa\xi)dh+(\mu\vartheta-\lambda\xi)ha} = \frac{(\varrho\eta-\nu\vartheta)(adh-bdz)+(\sigma\eta-\nu\xi)db+(\sigma\vartheta-\varrho\xi)da}{(\lambda\eta-\varkappa\vartheta)(adh-hdz)+(\mu\eta-\varkappa\xi)dh+(\mu\vartheta-\lambda\xi)da} = 0,$$

in der alsdann neun Coefficienten $(\varrho\varkappa-\nu\lambda)$, u. s. w. als beliebige von einander unabhängige Coefficienten anzusehen sind, so erhält man für die Polar-Curve derjenigen Curve, auf welche diese Gleichung sich bezieht:

$$f(y, x) = n:$$

eine Gleichung zwischen endlichen Grössen. Wenn man zwischen dieser Gleichung und den Gleichungen (2) und (3) $\frac{dy}{dx}$, y und x eliminirt, so erhält man eine Gleichung, welche die singuläre Auflösung der vorgelegten Differential-Gleichung ist. —

Die Verallgemeinerung der vorstehenden Bemerkungen liegt nahe. Wenn wiederum:

$$F(y, x) = n \qquad (I)$$

eine gegebene Gleichung ist, aber an die Stelle der Gleichung (2) irgend eine beliebige Gleichung zwischen y, x, b und a, als *æquatio directrix*, tritt, die wir durch

$$\psi(y, x, b, a) = o, \qquad (II)$$

und deren Differential-Gleichung, in Beziehung auf y und x, wir durch

$$\Psi\left(\frac{dy}{dx}, y, x, b, a\right) = o \qquad (III)$$

darstellen wollen, so können wir zwischen den vorstehenden drei Gleichungen y und x eliminiren, nachdem wir zuvor in die letzte derselben für $\frac{dy}{dx}$ denjenigen Ausdruck substituirt haben, welchen die Differentiation der Gleichung (I) gibt. Das Resultat der Elimination sei:

$$\varphi(b, a) = n. \qquad (IV)$$

Wenn wir ferner die Gleichung (II), in Beziehung auf b und a, differentiren, und die resultirende Gleichung durch

$$\Phi\left(\frac{db}{da}, b, a, y, x\right) = o \qquad (V)$$

darstellen, so erhalten wir aus (II) und (V) y und x als Function von $\frac{db}{da}$, b und a:

$$y = f\left(\frac{db}{da}, b, a\right), \qquad x = \mathfrak{F}\left(\frac{db}{da}, b, a\right), \qquad (VI)$$

und hiernach, wenn wir in (I) substituiren:

$$F\left\{f\left(\frac{db}{da}, b, a\right), \mathfrak{F}\left(\frac{db}{da}, b, a\right)\right\} = o. \qquad (VII)$$

Die Gleichung (IV) ist die singuläre Auflösung der Gleichung (VII). Der erste Theil dieser Gleichung ist Function zweier andern Functionen, die man erhält, wenn man aus irgend einer Gleichung (II) zwischen zweien veränderlichen Grössen b und a und ihrer Differential-Gleichung (V) die Ausdrücke für zwei, in diesen Gleichungen vorkommenden, Constanten zieht. Die Gleichung (II) ist das gewöhnliche Integral der Gleichung (VII). y und x sind zwei Constante, welche sich, nach der Gleichung (I), auf eine einzige reduciren.

selben Punct gehen, theilweise eine gemeinschaftliche Tangente haben, so fallen auf dieser, mehrere Zweige berührenden, geraden Linie theilweise die Berührungspunrte zusammen. Die in einem vielfarhen Puncte sich schneidenden Zweige können paarweise imaginär werden, ihr Durchschnitt bleibt alsdann reell und man erhält, statt der beiden Zweige, einen blossen Punct. Dieser Punct stellt sich als conjugirter isolirter Punct dar, wenn jener vielfarhe Punct ein blosser Doppelpunct ist; die Spur desselben verliert sich, wenn noch ein dritter reeller Zweig der Curve durch denselben Punrt geht. Auf ganz analoge Weise erhält man in der Polar-Figur, wenn mehrere Zweige, welche von derselben geraden Linie berührt werden, paarweise imaginär sind, statt jedes Paares solcher imaginären Zweige, bloss jene gerade Linie, ihre gemeinschaftliche Tangente. Diese gemeinschaftliche Tangente erscheint als isolirte, der Polar-Curve conjugirte gerade Linie, wenn kein anderer Zweig dieselbe ausserdem norh berührt; wenn hingegen dieser Fall eintritt, so gehört zu der Polar-Curve eine ihrer Tangenten.

Aus den vorstehenden Bemerkungen erhellet, wie es ganz natürlich ist, in die allgemeine Theorie der Curven neben dem Begriff des singulären Punctes auch den Begriff der singulären geraden Linie einzuführen. In denjenigen singulären Puncten, in welchen sich solche Curven-Zweige vereinigen, welche zum Theil in diesem Puncte eine gemeinschaftliche Tangente haben, ist diese Tangente eine singuläre gerade Linie. In der Gleichung einer Curve zwischen Punct-Coordinaten ist jede Spur der singulären geraden Linien der Curve verschwunden, so wie in der Gleirhung derselben Curve zwischen Linien-Coordinaten die Spur der singulären Puncte.

709. Wenn wir die allgemeine, nicht symmetrische, Hülfs-Gleichung:

$$(\eta b+\vartheta a+\xi)y+(\varkappa b+\lambda a+\mu)x+(\nu b+\varrho a+\sigma),$$

zu Grunde legen, so erhalten wir (705) für die Polare desjenigen Punctes, welche der Durchschnitt der durch folgende beide Gleichungen:

$$\eta y+\varkappa x+\nu = 0, \qquad \vartheta y+\lambda x+\varrho = 0, \qquad (\imath)$$

dargestellten geraden Linie ist, eine solche gerade Linie, die nnendlich weit liegt, und deren Richtung eine nnbestimmte ist. Wenn dieser Punct auf einer gegebenen Curve liegt, so ist der Pol der Tangente der Curve in diesem Puncte der Berührungspnnct auf jener nnendlich weit entfernt liegenden geraden Linie, die eine Tangente der Polar-

---

Da die Gleichnng (IV) das Resultat der Elimination der beiden als constant zu betrachtenden und durch die Gleichung (I) mit einander verbundenen Grössen, y und x, zwischen den beiden Gleichnngen (II) nnd (III) ist, so folgt sogleich, nach der bekannten Theorie, dass die Gleichung (IV) (die singuläre Auflösung) eine solche Curve darstellt, die alle diejenigen Curven nmhüllt, welche durch die Gleichung (II) (die gewöhnliche Integral-Gleichung), wenn wir nach einander den Constanten y nnd x alle möglichen Werthe beilegen, dargestellt werden.

Wenn wir aus den beiden Gleichungen (II) und (III) die Werthe von b und a ziehen und dann in die Gleichung (IV) substituiren, so erhalten wir eine Differential-Gleichung zwischen y nnd x; nnd diese Gleichung hat die Gleichung (II), in welcher alsdann b und a zwei durch die Gleichung (IV) mit einander verbundene Constante bedeuten, zum gewöhnlichen Integral nnd die Gleichung (I) zur singulären Auflösung.

Es hat bekanntlich zuerst *Lagrange* die vollständigste Theorie der besnndern Auflösungen gegeben und das Vollständigste hierüber findet sich in seinen *Leçons sur le Calcul des Fonctions*. Die in dem Vorstehenden angedeutete allgemeine Theorie der singulären Auflösnngen steht mit dem Princip der Reciprocität in der genauesten Beziehung; diess hervorzuheben ist der Zweck dieser Anmerkung.

Curve ist. Es ist sogleich ersichtlicht, dass dieser Berührungspunct auf der durch folgende Gleichung (706 (3)):

$$(\eta y+\vartheta x+\xi)v'-(xy+\lambda x+\mu) = 0, \qquad (2)$$

in der v' sich auf die Richtung der Tangente der gegebenen Curve in dem gegebenen Puncte bezieht, dargestellten geraden Linien unendlich weit liegt. Es entspricht also der gegebenen Curve eine Polar-Curve, die zwei parabolische Zweige hat, deren Durchmesser der geraden Linie (2) parallel sind. Wenn die gegebene Curve einen vielfachen Punct hat, der mit dem eben bezeichneten Punct zusammenfällt, so hat die Polar-Curve mehrere Paare parabolischer Zweige, deren Durchmesser leicht zu bestimmende Richtungen haben.

Zu denselben Folgerungen gelangen wir auch dann, wenn wir, indem wir rein geometrisch zu Werke gehen, insbesondere irgend einen beliegen Kegelschnitt zur Hülfs-Curve nehmen, und alsdann die gegebene Curve durch den Mittelpunct dieses Kegelschnittes geht. *)

710. Eine gerade Linie, die durch den Durchschnitt der beiden geraden Linien (1) geht und deren Richtung durch v' bestimmt ist, hat nach der vorigen Nummer zum Pole den auf der geraden Linie (2) unendlich weit entfernt liegenden Punct. Wenn jene gerade Linie eine singuläre gerade Linie einer gegebenen Curve ist, so ist dieser unendlich weit entfernt liegende Punct ein singulärer Punct der Polar-Curve. Wir sehen hieraus, dass es auch singuläre Puncte in unendlicher Entfernung gibt: eine für das Gesetz der Continuität in der Theorie der Curven wichtige Bemerkung, die zuerst H. PONCELET am eben angeführten Orte gemacht hat. Wir werden im folgenden Paragraphen auf diese singulären Puncte noch zurückkommen.

711. Wenn endlich mehrere Curven sich in dem Durchschnittspuncte der beiden geraden Linien (1) mpunctig osculiren, so haben die Polar-Curven in unendlicher Entfernung eine mpunctige paraholische Osculation. Wenn mehrere Curven auf irgend einer durch den Durchschnitt der beiden geraden Linien (1) gehenden dritten geraden Linie sich mpunctig osculiren, so haben die Polar-Curven die gerade Linie (2) zur gemeinschaftlichen Asymptote und auf dieser Asymptote in unendlicher Entfernung einen mpunctigen Contact. Wir sind schon im 7. Paragraphen der ersten Abtheilung dieses Bandes unmittelbar auf die Osculation parabolischer und hyperbolischer Zweige geführt worden. —

712. *Die Polaren von irgend vier gegebenen harmonischen Theilungspuncten bilden vier Harmonicalen und folglich auch, umgekehrt, die Pole von irgend vier gegebenen Harmonicalen vier harmonische Theilungspuncte.*

Wir können diesen Satz auf folgende Weise für den allgemeinsten Fall, dass die nicht symmetrische Gleichung (2) der 705. Nummer zu Grunde gelegt wird, beweisen. Nach dieser Nummer erhalten wir

$$\frac{\xi y'+\mu x'+\sigma}{\eta y'+\varkappa x'+\nu} = w', \quad \frac{\xi y''+\mu x''+\sigma}{\eta y''+\varkappa x''+\nu} = w'', \quad \frac{\xi y'''+\mu x'''+\sigma}{\eta y'''+\varkappa x'''+\nu} = w''', \quad \frac{\xi y''''+\mu x''''+\sigma}{\eta y''''+\varkappa x''''+\nu} = w'''',$$

wenn (y', x'), (y'', x''), (y''', x''') und (y'''', x'''') die vier gegebenen harmonischen Theilungspuncte und w', w'', w''' und w'''' Ordinaten ihrer Polaren bedeuten. (Wir setzen,

*) PONCELET, *Mémoire sur la théorie générale des polaires reciproques* 31 in CRELLE's Journal, IV. 1829.

der Kürze halber, die Ordinate a gleich Eins.) Die vorstehenden vier Gleichungen stellen, wenn wir die verschieden accentuirten y und x als veränderlich betrachten, vier gerade Linien dar, die durch die vier gegebenen Puncte gehen. Da diese geraden Linien überdiess in ein und demselben Puncte, dem Durchschnitte der beiden geraden Linien:

$$\xi y+\mu x+\sigma = Y = 0, \qquad \eta y+\varkappa x+\nu = X = 0,$$

sich schneiden, so bilden sie ein System von vier Harmonicalen. Hiernach erhalten wir, wenn wir zuvor ihren Gleichungen folgende Form geben:

$$X-w'Y = 0, \quad X-w''Y = 0, \quad X-w'''Y = 0, \quad X-w''''Y = 0,$$

und durch ω und v zwei unbestimmte Coefficienten bezeichnen:

$$\omega(X-w'Y)+v(X-w''Y) = X-w''Y, \quad \omega(X-w'Y)-v(X-w''Y) = X-w''''Y, \text{ *)}$$

und hieraus folgt:

$$\omega w'+vw''' = w'', \qquad \omega w'-vw''' = w''''.$$

Es sind also auch (410) diejenigen Puncte, in welchen die vier eben bezeichneten Polaren in die zweite Coordinaten-Axe einschneiden, vier harmonische Theilungspuncte, und mithin die Polaren selbst, da sie überdiess durch denselben Punct (697) gehen, vier Harmonicalen.

Als Beispiel von der Anwendung des Principes der Reciprocität, rücksichtlich des eben Bewiesenen, stelle ich folgende beide Sätze neben einander:

Eine beliebige Diagonale irgend einer gegebenen vierseitigen Figur wird in den beiden Winkelpuncten, die sie verbindet, und in ihren Durchschnitten mit den beiden übrigen Diagonalen harmonisch getheilt (*I.*, 50).

Die beiden Diagonalen irgend eines gegebenen Vierecks bilden mit denjenigen beiden geraden Linien, welche den Durchschnittspunct derselben mit den Durchschnittspuncten der beiden Paare gegenüberliegender Seiten verbinden, vier Harmonicalen.

713. Aus der vorigen Nummer und den Entwicklungen der Note zur 623. Nummer ergibt sich folgender Satz:

Die Pole einer Involution von sechs geraden Linien bilden eine Involution von sechs Puncten und, umgekehrt, die Polaren einer Involution von sechs Puncten bilden eine Involution von sechs geraden Linien.

Hiernach folgt zum Beispiel jeder der beiden nachstehenden Sätze aus dem andern.

Solche sechs Tangenten, die man von irgend einem Puncte aus an irgend drei Kegelschnitte legen kann, welche dieselben vier (reellen oder imaginären) geraden Linien berühren, bilden eine Involution (623).

Die sechs Durchschnittspuncte einer beliebigen Transversalen mit solchen drei Kegelschnitten, welche durch dieselben vier (reellen oder imaginären) Puncte gehen, bilden eine Involution. **)

---

*) Wenn nemlich die beiden Gleichungen

$$Z = 0, \qquad Z' = 0$$

irgend zwei gegebene gerade Linien darstellen und μ einen beliebigen Coefficienten bedeutet, so stellen folgende Gleichungen:

$$Z+\mu Z' = 0, \qquad Z-\mu Z' = 0,$$

solche zwei neue gerade Linien dar, welche mit den beiden gegebenen ein System von vier Harmonicalen bilden. Diese Beziehungen sind denen der 410. Nummer ganz analog.

**) Ich habe in dem Frühern gelegentlich mehrfache Eigenschaften einer Involution von sechs Puncten so wie einer Involution von sechs geraden Linien entwickelt. Beiläufig füge ich auch noch die folgenden Sätze hinzu:

Digitized by Google

Wenn wir insbesondere in dem letzten Satze an die Stelle zweier der drei Kegelschnitte zwei Linien-Systeme setzen, so erhalten wir einen Satz, den zuerst DESARGUES gab *). Der allgemeine Satz gehört H. STURM **). —

714. Wir haben in allen bisherigen Entwicklungen auf die Werthe der ein für alle Mal gegebenen Constanten der Hülfs-Gleichung (*æquatio directrix*) keine weitere Rücksicht genommen. Wir können dieselben zum Theil gleich Null setzen und jene Gleichung, wie in den Beispielen der 701. Nummer, möglichst vereinfachen. An jede solche Gleichung können wir das Princip der Reciprocität, so weit wir dasselbe bisher entwickelt haben, anknüpfen. Es gewinnt dasselbe aber eine grosse Mannigfaltigkeit an neuen Anwendungen, wenn wir jenen neun Coefficienten der Hülfs-Gleichung bestimmte Werthe beilegen und gewisse zwischen denselben Statt findende Beziehungen annehmen, oder wenn wir, von der geometrischen Seite, irgend einen bestimmten Kegelschnitt zur Hülfs-Curve nehmen. Wir befinden uns hier auf einem ergiebigen Felde der Untersuchung; ein Blick auf die wenigen Andeutungen, welche die folgenden Nummern enthalten, wird uns hiervon überzeugen.

Wenn wir derjenigen Curve, deren Polare wir suchen, eine, in Beziehung auf die Coordinaten-Axe, beliebige Lage geben, so können wir, unbeschadet der Allgemeinheit, in den Untersuchungen über die Natur der Polar-Curve die Form der gegebenen Hülfs-Gleichung dadurch vereinfachen, dass wir die Lage und die Richtung der Coordinaten-Axen gehörig bestimmen. Wenn die gegebene Hülfs-Gleichung bei beliebiger Axen-An-

---

Die drei Seiten eines Dreiecks und irgend drei durch die Winkelpuncte desselben und ein und denselben Punct gehende gerade Linie, oder, was dasselbe heisst, die Seiten irgend eines Vierecks und die beiden Diagonalen desselben haben die Richtung der sechs geraden Linien einer Involution.

Und, umgekehrt:

Wenn man aus drein geraden Linien der drei Linien-Paare einer Involution, indem man dieselben parallel mit sich selbst verrückt, ein Dreieck bildet, so gehen die drei übrigen geraden Linien der Involution durch ein und denselben Punct, wenn man sie, parallel mit sich selbst, so verschiebt, dass jede derselben durch denjenigen Winkelpunct jenes Dreiecks geht, welchen solche zwei gerade Linien bilden, mit welchem sie nicht zu demselben Linien-Paare der Involution gehört.

Der Beweis des vorstehenden Satzes bietet sich sogleich dar. Wir können die drei Seiten des Dreiecks durch folgende Gleichungen darstellen:

$$(x'-x'')(y-y')-(y'-y'')(x-x') = 0,$$
$$(x''-x''')(y-y'')-(y''-y''')(x-x'') = 0,$$
$$(x'''-x')(y-y''')-(y'''-y')(x-x''') = 0,$$

und erhalten alsdann (vergl. die Note zur 623. Nummer), indem wir die Coordinaten-Axen gehörig bestimmen, für die drei durch die drei Winkelpuncte des Dreiecks gehende gerade Linien folgende Gleichungen:

$$(x'-x'')(y-y''')+(y'-y'')(x-x''') = 0,$$
$$(x''-x''')(y-y')+(y''-y''')(x-x') = 0,$$
$$(x'''-x')(y-y'')+(y'''-y')(x-x'') = 0.$$

Die Summe der ersten Theile dieser drei Gleichungen reducirt sich auf Null und folglich gehen die drei bezüglichen geraden Linien durch ein und denselben Punct.

Nach den vorstehenden Sätzen können wir auf die bequemste Weise, wenn fünf gerade Linien einer Involution gegeben sind, die sechste gerade Linie der Involution bestimmen, so wie der sechste Punct einer Involution sich am leichtesten durch Hülfe des vorletzten Satzes in der Note zur 441. Nummer construiren lässt.

*) PONCELET, *Prop. proj.* 178.

**) GERGONNE, *Ann. T. XVII. p.* 180.

nahme wiederum folgende ist:

$$(\eta b+\vartheta a+\xi)y+(\varkappa b+\lambda a+\mu)x+(\nu b+\varrho a+\sigma) = 0, \qquad (1)$$

so bietet sich eine natürliche Vereinfachung dieser Gleichung dar, indem wir irgend zwei der drei durch die nachstehenden Gleichungen dargestellten geraden Linien:

$$\eta y+\vartheta x+\xi = 0, \qquad \varkappa y+\lambda x+\mu = 0, \qquad \nu y+\varrho x+\sigma = 0, \qquad (2)$$

zu den neuen Coordinaten-Axen wählen (698). Nehmen wir insbesondere die erste dieser drei geraden Linien zur ersten und die zweite derselben zur zweiten Coordinaten-Axe, so erhalten wir statt der Gleichung (1) eine Gleichung von folgender Form:

$$\eta by+\lambda ax+(\nu b+\varrho a+\sigma) = 0, \qquad (3)$$

und in dem besondern Fall, dass die Gleichung (1) symmetrisch ist und demnach die Bedingungs-Gleichungen (7) der 698. Nummer bestehen, eine Gleichung von folgender Form:

$$\eta by+\lambda ax+\sigma = 0. \qquad (4)$$

Geometrisch genommen entspricht dieser letzten Gleichung irgend eine (reelle oder imaginäre) Curve zweiter Ordnung, deren Mittelpunct in den Anfangspunct der Coordinaten fällt.

Die eben angezeigte Coordinaten-Verwandlung kann nicht Statt finden, wenn die beiden ersten der drei geraden Linien (2) parallel sind. Nehmen wir, um diese Ausnahme zu beseitigen, statt der ersten dieser drei geraden Linien, die dritte derselben zur ersten Coordinaten-Axe, so erhalten wir als Hülfs-Gleichung eine Gleichung von folgender Form:

$$(\eta b+\vartheta a+\xi)y+\lambda ax+\nu b = 0, \qquad (5)$$

und für jenen Ausnahms-Fall eine Gleichung von folgender Form:

$$(\vartheta a+\xi)y+\lambda ax+\nu b = 0. \qquad (6)$$

Wenn die Hülfs-Gleichung eine symmetrische ist, so ist in der letzten Gleichung $\vartheta = \varrho$ und $\xi = \nu$. Die entsprechende Hülfs-Curve ist alsdann eine Parabel, welche von der ersten Axe im Anfangspuncte berührt wird und welche die zweite Axe zu einem ihrer Durchmesser hat.

Da in der Gleichung (5) der Coefficient ξ offenbar nicht fehlen darf, so sehen wir, dass die neun Coefficienten der Hülfs-Gleichung (1) nicht solche Werthe haben dürfen, wonach die drei geraden Linien (3) durch denselben Punct gehen würden. Auch dürfen, was hieraus folgt, nicht irgend zwei dieser drei geraden Linien zusammenfallen. Diesen beiden Fällen entspricht, wo wir eine Curve zweiter Ordnung als Hülfs-Curve nehmen können, dass diese Curve nicht in ein System von zwei geraden Linien übergehen kann.

715. Wir wollen die Polar-Curve irgend eines beliebigen durch die allgemeine Gleichung:

$$ay^2+2bxy+cx^2+2dy+2ex+f = 0, \qquad (1)$$

dargestellten Kegelschnittes bestimmen, indem wir

$$\eta by+\lambda ax+\sigma = 0 \qquad (2)$$

zur Hülfs-Gleichung nehmen. Alsdann ergibt sich nach der 705. Nummer:

$$\frac{\eta y}{\sigma} = \frac{u}{w}, \qquad \frac{\lambda x}{\sigma} = \frac{v}{w}, \qquad (3)$$

wenn wir durch (w, v, u) die Coordinaten der Polaren irgend eines Punctes (y, x) bezeichnen. Für die gesuchte Polar-Curve erhalten wir hiernach, indem wir aus den beiden letzten Gleichungen die Werthe von y und x nehmen und statt dieser Grössen in die

Digitized by Google

Gleichung (1) substituiren, folgende Gleichung:

$$a\lambda^2\sigma^2u^2+2b\eta\lambda\sigma^2uv+c\eta^2\sigma^2v^2+2d\eta\lambda^2\sigma uw+2e\eta^2\lambda\sigma vw+f\eta^2\lambda^2w^2 = 0, \qquad (4)$$

die wir, der Kürze halber, auf folgende Weise schreiben wollen:

$$Fu^2+2Euv+Cv^2+2Duw+2Bvw+Aw^2 = 0. \qquad (5)$$

Man erhält:

$$(CF-E^2) = \eta^2\lambda^2\sigma^4(ac-b^2);$$

es sind also die beiden Ausdrücke $(CF-E^2)$ und $(ac-b^2)$ entweder beide positiv, oder beide negativ oder beide gleich Null. Je nachdem also der Anfangspunct der Coordinaten ausserhalb einer der beiden Polar-Curven (*courbes polaires réciproques*) (1) und (5), oder innerhalb derselben oder auf dem Umfange derselben liegt (488), ist die andere eine Hyperbel, Ellipse oder Parabel.

Wir wollen ferner noch die besondern Bestimmungen machen, dass

$$\eta = \lambda = 1, \qquad \sigma = -R^2,$$

wonach sich die Gleichungen (2) und (4) in folgende verwandeln;

$$by+ax = R^2, \qquad (6)$$

$$aR^4u^2+2bR^4uv+cR^4v^2+2dR^2uw+2cR^2vw+fw^2 = 0. \qquad (7)$$

Wenn $a = c$ und $b = 0$, so ist, bei der Voraussetzung rechtwinkliger Coordinaten, die gegebene Curve ein Kreis und die Polar-Curve dieses Kreises ein Kegelschnitt, welcher den Anfangspunct der Coordinaten zu einem seiner Brennpuncte hat; denn die Gleichung (7) geht alsdann in folgende über, wenn wir zugleich, der Kürze halber, $a = e = 1$ und $w = 1$ setzen:

$$R^4(u^2+v^2)+2R^2(du+ev)+f = 0.$$

Die Coordinaten des Mittelpunctes des gegebenen Kreises sind $y = -d$, $x = -e$ und also die Coordinaten der Polaren dieses Mittelpunctes (3):

$$u = -\frac{d}{R^2}, \qquad v = -\frac{e}{R^2}.$$

Diese Polare ist also (560) die Directrix der Polar-Curve und zwar diejenige, welche zu jenem ihrer Brennpuncte gehört, der in den Anfangspunct der Coordinaten fällt. Ob diese Curve eine Hyperbel, Ellipse oder Parabel ist, bestimmt sich wie in dem allgemeinern Falle.

Die vorstehenden Resultate hat zuerst H. PONCELET in der oben angeführten Abhandlung mitgetheilt. Viele einzelne Folgerungen daraus, die sich ohne Mühe noch sehr vervielfältigen liessen, finden sich in zweien Abhandlungen des 18. Bandes der zu *Montpellier* erscheinenden Annalen. *)

Das Quadrat des Radius des gegebenen Kreises ist (d^2+e^2-f), das Quadrat der halben Brennpuncts-Ordinate, das heisst des halben Parameters (561), ist gleich $\left\{\frac{R^4}{d^2+e^2-f}\right\}$. Hiernach ergibt sich:

$$rp = R^2, \qquad (8)$$

wenn wir den Radius des gegebenen Kreises r und den halben Parameter der Polar-Curve p nennen. R bedeutet den Radius desjenigen Kreises, der, wenn wir die Pole geometrisch construiren, an die Stelle der Hülfs-Gleichung (6) tritt (701). Kreisen von gleichen Radien entsprechen also Polar-Curven mit gleichen Parametern.

*) PONCELET, *Mémoire etc. Nro. 115.* — BOBILLIER, *Démonstration de divers théorèmes de géométrie: Gerg. Ann. XVIII. Janvier, 1828.* — CHASLES, *Théorèmes sur les sections coniques confocales: Gerg. Ann. XVIII, Mars 1828.* —

Digitized by Google

716. Das Princip der Reciprocität führt zu einer neuen Construction der allgemeinen Aufgabe der Tactionen, die ich hier als ein Beispiel von der Anwendung dieses Principes, in Beziehung auf die Entwicklungen der vorigen Nummer, gebe. Fig. 40.

Einen Kreis zu beschreiben, welcher drei gegebene Kreise berührt.

Der Mittelpunct eines Kreises von gegebenem Radius $\varkappa$, der von zwei gegebenen Kreisen, deren Radien R und R' sind, ausserhalb oder von beiden innerhalb berührt wird, ist, wenn wir seine Abstände von den Mittelpuncten der beiden gegebenen Kreise r und r' nennen, dadurch bestimmt, dass

$$r \mp R = r' \mp R' = \varkappa,$$

und hieraus folgt:

$$r - r' = \pm(R' - R). \qquad (9)$$

Der Ort für die Mittelpuncte aller Kreise, welche von zwei gegebenen Kreisen gleichartig berührt werden, ist also eine Hyperbel, welche die Mittelpuncte der beiden gegebenen Kreise zu ihren Brennpuncten hat. Der eine Zweig dieser Hyperbel, welchem das obere Zeichen in der letzten Gleichung entspricht, bezieht sich auf solche Kreise, welche die beiden gegebenen Kreise nicht umschliessen, der andere Zweig auf solche Kreise, welche die beiden gegebenen umschliessen.

Die Mittelpuncte, K und K', derjenigen beiden Kreise, welche die drei gegebenen Kreise, C, C' und C'', gleichartig berühren, sind also zwei gemeinschaftliche Durchschnittspuncte dreier Hyperbeln, welche die Mittelpuncte der drei gegebenen Kreise, paarweise genommen, zu ihren Brennpuncten haben. Wir können also die Mittelpuncte jener beiden Berührungs-Kreise als die Durchschnittspuncte zweier Hyperbeln construiren, deren gemeinschaftlicher Brennpunct der Mittelpunct eines der drei gegebenen Kreise, etwa der Mittelpunct des Kreises C ist. Wenn wir irgend einen Kreis, der mit dem Kreise C concentrisch ist, zur Hülfs-Curve (*curva directrix*) nehmen, so sind die Polar-Curven dieser beiden Hyperbeln zwei Kreise und die Pole zweier gemeinschaftlichen Tangenten dieser Kreise sind die gesuchten Mittelpuncte. Wir wollen den Kreis C selbst zur Hülfs-Curve nehmen. Die Mittelpuncte der beiden Polar-Kreise liegen auf den beiden Central-Linien CC' und CC''. Ferner geht der erste dieser beiden Kreise, γ', durch diejenigen beiden Puncte der geraden Linie CC', welche die zugeordneten Pole der Mitten zwischen den beiden innern und den beiden äussern Rändern der beiden ersten Kreise C und C' sind. Denn die in diesen Mitten auf der Central-Linie CC' errichteten Perpendikel berühren offenbar in diesen Mitten jene Hyperbel, deren Polar-Curve der Kreis γ' ist. Gerade auf dieselbe Weise, indem wir bloss den dritten gegebenen Kreis C'' an die Stelle des zweiten setzen, bestimmt sich der andere Polar-Kreis γ''. Aber welche zwei der vier gemeinschaftlichen Tangenten der beiden Polar-Kreise sind die Polaren der gesuchten Mittelpuncte? Offenbar die beiden äussern, wenn, wie in dem Falle der 40. Figur, der Kreis C der grösseste, oder auch, wenn er der kleinste der drei gegebenen Kreise ist. Denn jeder jener beiden Mittelpuncte ist in diesem Falle nothwendig der Durchschnitt solcher zwei Zweige der beiden Hyperbeln, welche beide den gemeinschaftlichen Brennpunct enthalten oder beide denselben nicht enthalten. Ein solcher Durchschnittspunct liegt, in Beziehung auf den Mittelpunct des Kreises C, auf denselben Seiten der zu diesem gemeinschaftlichen Brennpuncte der beiden Hyperbeln gehörigen Directricen, es liegt also auch die Polare desselben auf derselben Seite der beiden Pole dieser Directricen, das heisst der Mittelpuncte der beiden Polar-Kreise γ' und γ''.

Auf ganz analoge Weise können wir auch die Mittelpuncte der übrigen sechs Berührungs-Kreise bestimmen und gelangen zu folgender allgemeinen Construction der an die Spitze dieser Nummer gestellten Aufgabe:

„Es seien C, C' und C'' die drei gegebenen Kreise und C der grösseste derselben. „Man suche zu den Mitten, einerseits zwischen den beiden innern und den beiden äussern „Rändern, und andrerseits zwischen jedem innern und äussern Rande der beiden Kreise „C und C', den zugeordneten Pol, in Beziehung auf den Kreis C und beschreibe über „den Abständen dieser beiden Paare von Polen als Durchmesser zwei neue Kreise γ' und „γ'_1. Man construire, indem man bloss den dritten gegebenen Kreis C'' an die Stelle des „zweiten, C', setzt, die beiden analogen Kreise γ'' und γ''_1. Die Pole der acht äussern „gemeinschaftlichen Tangenten der vier Kreis-Paare γ' und γ'', γ' und γ''_1, γ'_1 und γ'', γ'_1 „und γ''_1, in Beziehung auf den Kreis C, sind die Mittelpuncte derjenigen acht Kreise, „welche, im Allgemeinen, die drei gegebenen, C, C' und C'', berühren."

Die acht eben bezeichneten gemeinschaftlichen Tangenten schneiden sich, paarweise genommen, in solchen vier Puncten, die in gerader Linie liegen, der Polaren des Chordal-Punctes der drei gegebenen Kreise, in Beziehung auf den Kreis C, weil die Mittelpuncte der Berührungs-Kreise, paarweise genommen, auf solchen vier geraden Linien liegen, die sich in jenem Chordal-Puncte schneiden (153).

Einer der beiden durch (9) dargestellten Hyperbel-Zweige geht durch die beiden Durchschnitte der Kreise C und C'; der Kreis γ' berührt also die beiden Tangenten des Kreises C in diesen Durchschnittspuncten. Ein Gleiches thut der Kreis γ'_1. Es haben also die drei Kreise C, γ' und γ'_1 und ebenso die drei Kreise C, γ'' und γ''_1 zwei gemeinschaftliche Tangenten. Diese Tangenten sind reell oder imaginär, je nachdem die Kreise C und C', und die Kreise C und C'' sich schneiden oder nicht.

Als besondern Fall der allgemeinen Aufgabe will ich beispielsweise bloss den folgenden hervorheben:

Einen Kreis zu beschreiben, der zwei gegebene gerade Linien berührt und überdiess durch einen gegebenen Punct geht.

Die Mittelpuncte derjenigen vier Kreise, welche den Bedingungen dieser Aufgabe Genüge leisten, können wir als die Durchschnittspuncte einer Parabel und derjenigen beiden geraden Linien, welche die von den gegebenen geraden Linien gebildeten Scheitelwinkel halbiren, ansehen. Diese Parabel hat den gegebenen Punct zu ihrem Brennpuncte und eine (beliebige) der beiden gegebenen geraden Linien zu ihrer Directrix; ihr halber Parameter ist gleich dem Abstande jenes Punctes von dieser geraden Linie. Wenn wir den mit diesem halben Parameter aus dem gegebenen Puncte als Mittelpuncte beschriebenen Kreis zur Hülfs-Curve nehmen, so ist der Radius des Polar-Kreises der eben bezeichneten Parabel ebenfalls dem halben Parameter gleich (8) und geht überdiess durch den gegebenen Punct. Hiernach ergibt sich folgende Construction der vorstehenden Aufgabe:

„Man fälle von dem gegebenen Puncte aus ein Perpendikel auf eine beliebige der „beiden gegebenen geraden Linien und beschreibe aus dem gegebenen Puncte und dem „Fusspuncte dieses Perpendikels, als Mittelpuncten, und mit dem Perpendikel, als Ra„dius, zwei Kreise. Man halbire ferner die von den beiden gegebenen geraden Linien „gebildeten Scheitelwinkel durch zwei gerade Linien und lege dann von den Polen dieser „beiden Halbirungs-Linien, in Beziehung auf den ersten jener beiden Kreise, zwei Tan„genten-Paare an den zweiten derselben. Die Pole dieser Tangenten, in Beziehung auf

„den erstern Kreis, sind die Mittelpuncte derjenigen vier Kreise, welche, im Allgemeinen, „den Bedingungen der Aufgabe Genüge leisten.“ —

717. Wenn wir wieder, wie am Ende der 715. Nummer, einen Kreis zur Hülfs-Curve nehmen, so ergibt sich (3):

$$\frac{y}{x} = \frac{u}{v}.$$

Die Polare (v, u) irgend eines beliebigen Punctes (y, x) steht also auf derjenigen geraden Linie senkrecht, welche diesen Punct mit dem Anfangspuncte der Coordinaten verbindet. Es folgt hieraus, dass derjenige Winkel, unter welchem zwei gegebene Puncte vom Anfangspuncte aus gesehen werden, denjenigen Winkel, welchen die Polaren dieser beiden Puncte mit einander bilden, zu zwei Rechten ergänzt. Hiernach können wir, mit Hülfe des Principes der Reciprocität, aus jedem Satze, der sich auf den Vergleich von Winkel bezieht, einen zweiten Satz herleiten. (Vergl. die oben angeführte Abhandlung des H. PONCELET Nro. 108.) Ein Beispiel hierzu liefert die Nebeneinanderstellung folgender beiden Sätze:

Wenn man die Winkel eines gegebenen Dreiecks und ihre Nebenwinkel durch sechs gerade Linien halbirt, so gehen von diesen geraden Linien viermal drei durch denselben Punct.

Wenn man von irgend einem gegebenen Puncte nach den drei Winkelpuncten eines gegebenen Dreiecks drei gerade Linien zieht, und die Scheitelwinkel, welche von je zwei dieser Linien gebildet werden, durch zwei neue gerade Linien halbirt, so schneiden solche drei Linien-Paare die bezüglichen Seiten des Dreiecks in solchen dreimal zwei Puncten, von welchen viermal drei in gerader Linie liegen.

Die vier Durchschnittspuncte, die man nach dem ersten dieser beiden Sätze erhält, sind die Mittelpuncte solcher Kreise, welche die drei Seiten des gegebenen Dreiecks berühren. Die vier geraden Linien, die man nach dem zweiten dieser Sätze erhält, sind mithin die Directrixen solcher Kegelschnitte, welche durch die drei Winkelpuncte des gegebenen Dreiecks gehen und den gegebenen Punct zum Brennpuncte haben. (Es ist diess mit der Construction der 577. Nummer in Uebereinstimmung). Ueberhaupt entspricht jedem Satze über Winkel-Beziehungen beim Kreise ein zweiter Satz, der sich auf Winkel am Brennpuncte irgend eines beliebigen Kegelschnittes bezieht. Die folgenden Sätze enthalten ein einfaches Beispiel:

Peripherie-Winkel, welche in demselben Kreise auf demselben Bogen stehen, sind einander gleich, und halb so gross, als ein Winkel am Centrum, der auf gleichem Bogen steht.

*Das von zweien festen Tangenten eines beliebigen Kegelschnittes interceptirte Stück irgend einer dritten beweglichen Tangente wird, vom Brennpuncte aus, unter constantem Winkel gesehen *), und dieser Winkel ist halb so gross, als derjenige, unter welchem das von denselben Tangenten interceptirte Stück der Directrix, vom Brennpuncte aus, gesehen wird.*

718. In der Polar-Curve treten an die Stelle der beiden Brennpuncte eines gegebenen Kegelschnittes zwei gerade Linien. Vermittelst der Hülfs-Curve können wir alle

*) PONCELET, *Traité des prop. proj. p. 464.*

verfahren. Die Winkelpuncte aller rechten Winkel, deren Schenkel die gegebene Parabel berühren, liegen auf der Directrix derselben. Nach dem Princip der Reciprocität (717) gehen also die Hypotenusen aller derjenigen rechtwinkligen Dreiecke, welche der Polar-Curve eingeschrieben sind, und deren rechte Winkel in dem gegebenen Punct ihres Umfanges liegen, durch einen festen Punct (357). Die Polare dieses festen Punctes, in Beziehung auf die Polar-Curve, ist die gesuchte gerade Linie, denn der Pol der Directrix, in Beziehung auf die gegebene Parabel, ist der Brennpunct dieser Parabel. Wenn der gegebene Kegelschnitt den Mittelpunct des Hülfs-Kreises zu einem seiner Brennpuncte hat, so ist die Polar-Curve ein Kreis und die eine der beiden in Rede stehenden Brennpuncts-Polaren liegt unendlich weit. Die zweite dieser Polaren, deren geometrische Bedeutung in den folgenden Erörterungen noch deutlicher hervortritt, erhalten wir hiernach ohne Mühe; sie ist die Chordale (102) des Polar-Kreises und des Mittelpunctes des Hülfs-Kreises.

Wenn mehrere gegebene Kegelschnitte dieselben beiden reellen (und also auch (477) dieselben beiden imaginären) Brennpuncte haben, so sind diese Brennpuncte zwei zusammengehörige homologe Puncte derselben. Ein zweites System homologer Puncte bilden die beiden imaginären Brennpuncte, welche auf der, allen gegebenen Kegelschnitten gemeinschaftlichen, zweiten Axe, einer homologen geraden Linie derselben, liegen. Das dritte System homologer Puncte liegt unendlich weit, und mithin auch die entsprechende homologe gerade Linie (617). In der Polar-Figur erhalten wir, statt jedes Systems homologer Puncte, ein Chordal-System der Polar-Curven, statt jeder homologen geraden Linie einen Chordal-Punct. Die beiden reellen Brennpuncts-Polaren bilden das Chordal-System der Polar-Curven, die beiden imaginären Brennpuncts-Polaren schneiden sich in einem reellen Puncte, der Polaren der allen gegebenen Kegelschnitten gemeinschaftlichen zweiten Axe, in einem Chordal-Puncte der Polar-Curven. Der zweite Chordal-Punct ist der Mittelpunct des Hülfs-Kreises.

Wir wollen nun von irgend einer Polar-Curve, als ursprünglich gegeben, ausgehen und den Mittelpunct des Hülfs-Kreises beliebig annehmen. Alsdann erhalten wir für jene beiden geraden Linien, die der Gegenstand der Untersuchung in dieser Nummer sind, immer dieselben, welchen Radius der Hülfs-Kreis auch haben mag. Der Beweis hiervon ist in dem Vorstehenden schon einschliesslich enthalten; er ergibt sich indess auch leicht auf directe Weise. Es stelle die Gleichung (1) der 715. Nummer die gegebene Polar-Curve dar, der Mittelpunct des Hülfs-Kreises sei der Anfangspunct der Coordinaten, der Radius desselben gleich R. Alsdann sind die in Rede stehenden geraden Linien die Polaren der Brennpuncte der Curve (7). Für die Coordinaten jedes dieser Brennpuncte erhalten wir (477) Ausdrücke von folgender Form:

$$y = R^2\varphi, \qquad x = R^2\psi,$$

wobei φ und ψ solche Ausdrücke bedeuten, die von R unabhängig sind. Aus den Coordinaten-Werthen der Polaren eines solchen Punctes (3):

$$u = \varphi, \qquad v = \psi,$$

verschwindet R.

Wenn wir also aus den bisherigen Entwicklungen die Haupt-Momente hervorheben, so ergibt sich folgender Satz:

Wenn irgend ein Kegelschnitt und ein Punct gegeben sind, so gibt es immer zwei reelle und zwei imaginäre gerade Linien, welche die Eigenschaft besitzen, dass jede

beliebige Tangente des gegebenen Kegelschnittes, dieselben in solchen zwei Puncten schneidet, welche, wenn man sie mit dem gegebenen Puncte durch zwei gerade Linien verbindet, einen Winkel im letztgenannten Puncte bilden, der entweder selbst oder dessen Nebenwinkel von derjenigen geraden Linie, welche durch den Berührungspunct auf der beliebigen Tangente und den gegebenen Punct geht, halbirt wird. Es gibt unendlich viele Kegelschnitte, welche zu demselben gegebenen Puncte und denselben beiden Linien-Paaren in derselben Beziehung stehen. Es schneiden sich alle diese Kegelschnitte in denselben vier imaginären Puncten; das reelle Linien-Paar ist das Chordal-System derselben, ihre beiden Chordal-Puncte sind der Durchschnittspunct der beiden imaginären geraden Linien des andern Paares und der gegebene Punct.

719. Wir wollen in dieser Nummer untersuchen, ob ein gegebener Kegelschnitt, wenn wir die Hülfs-Curve gehörig bestimmen, seine eigne Polar-Curve sein kann, worin kein Widerspruch liegt, weil ein Kegelschnitt zugleich eine Curve zweiter Ordnung und zweiter Classe ist. Wenn die beiden Gleichungen (1) und (4) der 715. Nummer ein und dieselbe Curve darstellen sollen, so erhalten wir nach der 552. Nummer folgende Bedingungs-Gleichungen, wenn wir zugleich, der Kürze halber, σ und f gleich Eins setzen:

$$\frac{ae-bd}{b^2-ac} = \frac{e}{\lambda}, \quad \frac{cd-be}{b^2-ac} = \frac{d}{\eta}, \quad \frac{b-de}{b^2-ac} = \frac{b}{\eta\lambda}, \quad \frac{d^2-a}{b^2-ac} = \frac{c}{\lambda^2}, \quad \frac{e^2-c}{b^2-ac} = \frac{a}{\eta^2}. \tag{10}$$

Wir können, wenn wir den Coordinaten-Winkel unbestimmt lassen, unbeschadet der Allgemeinheit, die erste Coordinaten-Axe durch den Mittelpunct des gegebenen Kegelschnittes legen. Alsdann gibt die erste der vorstehenden Gleichungen $e = o$ (und entweder $b = o$ oder $d = o$, oder beides zugleich), hiernach die dritte Gleichung:

$$b^2-ac = \eta\lambda, \tag{11}$$

hiernach ferner die fünfte:

$$\frac{c}{a} = -\frac{\lambda}{\eta}, \tag{12}$$

und endlich die vierte $d = o$, wonach auch die zweite Gleichung befriedigt wird. Wir sehen hieraus, dass es, wenn irgend ein der Hülfs-Gleichung (2) entsprechender Kegelschnitt:

$$\eta y^2+\lambda x^2+1 = o, \tag{13}$$

als Hülfs-Curve gegeben ist, unendlich viele Kegelschnitte gibt, welche ihre eigenen Polar-Curven sind. Alle diese Curven haben denselben Mittelpunct als die gegebene. Sie sind alle Ellipsen oder Hyperbeln, je nachdem, umgekehrt, die Hülfs-Curve eine Hyperbel oder Ellipse ist (11). Sie haben alle denselben Inhalt (251) und dieser Inhalt ist gleich dem Inhalte der Hülfs-Curve, multiplicirt mit $\sqrt{-1}$ (11). Der Quotient derjenigen beiden Durchmesser jeder der in Rede stehenden Curven, welche in die beiden Coordinaten-Axen, das heisst, in zwei beliebige zugeordnete Durchmesser der Hülfs-Curve, fallen, ist constant und gleich dem Quotienten dieser beiden zugeordneten Durchmesser (12) (eigentlich multiplicirt mit $\sqrt{-1}$, wenn wir uns nicht der hergebrachten Definition der zweiten Durchmesser einer Hyperbel ansehmiegen).

Es ist sogleich ersichtlich, dass, wenn von zwei Kegelschnitten einer, in Beziehung auf den andern, seine eigene Polar-Curve ist, die beiden Curven in einem durchaus gegenseitigen Verhältnisse zu einander stehen.

Aus dem Vorstehenden folgt, dass jede Eigenschaft eines gegebenen Kegelschnittes durch Hülfe eines zweiten, gehörig zu bestimmenden, unmittelbar sich verdoppeln lässt.

Wenn wir insbesondere in der Gleichung (11) h = 0 setzen, so erhalten wir, wenn die Hülfs-Curve gegeben ist, für diejenige Curve, welche ihre eigene Polar-Curve ist, eine solche, welche über den beiden Axen der Hülfs-Curve beschrieben ist, aber, je nachdem diese eine Ellipse oder Hyperbel, umgekehrt, eine Hyperbel oder Ellipse ist. Diesen besondern Fall hat schon H. BOBILLIER hervorgehoben *). Wenn also zum Beispiel die Hülfs-Curve ein Kreis ist, so ist eine gleichseitige Hyperbel, welche mit diesem Kreise denselben Mittelpunct hat und ihn doppelt berührt, ihre eigene Polar-Curve. Jeder Eigenschaft einer gleichseitigen Hyperbel, welche sich auf den Vergleich von Winkel bezieht, entspricht also eine zweite solche Eigenschaft, wobei der Mittelpunct derselben in Betracht kommt. Der über der Quer-Axe einer gleichseitigen Hyperbel, als Durchmesser, beschriebene Kreis ist, in Beziehung auf diese Hyperbel, seine eigene Polar-Curve. Auch beim Kreise ordnen sich alle Winkel-Beziehungen paarweise zusammen. Denn wenn die Hülfs-Curve eine gleichseitige Hyperbel ist, so kommt (3):

$$\frac{y}{x} = -\frac{n}{v},$$

woraus folgt, was H. BOBILLIER am angeführten Orte zuerst bemerkt hat, dass der Winkel, den irgend zwei gegebene gerade Linien mit einander bilden, demjenigen gleich ist, unter welchem die Pole dieser geraden Linien, vom Mittelpuncte der Hülfs-Hyperbel aus, gesehen werden. —

720. Statt der Gleichung (2), in der 715. Nummer, wollen wir nun folgende Gleichung:

$$py+ax+ph = 0, \qquad (1)$$

zur Hülfs-Gleichung nehmen. Es entspricht derselben, als Hülfs-Curve, eine Parabel, deren Gleichung folgende ist (701):

$$x^2+2py = 0. \qquad (2)$$

Wenn wir hiernach die Polare eines Punctes (y, x) durch (w, v) bezeichnen, so erhalten wir, nach der 705. Nummer:

$$y = w, \qquad x = pv. \qquad (3)$$

Aus diesen beiden Gleichungen ergeben sich sogleich mehrere einfache Grundregeln, um Eigenschaften einer gegebenen Figur auf ihre Polar-Figur zu übertragen. Dieselben absoluten Grössen-Beziehungen der Ordinaten beliebiger Puncte in jeder der beiden Figuren gelten unmittelbar auch von den, mit entgegengesetzten Zeichen genommenen, Ordinaten der Durchschnittspuncte der entsprechenden geraden Linien in der Polar-Figur mit der zweiten Coordinaten-Axe. Beziehungen der von den geraden Linien in der einen Figur gebildeten Winkel zu einander entsprechen Beziehungen zwischen den Abscissen der entsprechenden Puncte in der andern Figur. Die Pole von geraden Linien, die parallel sind, liegen auf einer der zweiten Coordinaten-Axe parallelen geraden Linien. Das Product der Abscissen zweier Puncte ist constant, wenn ihre Polaren auf einander senkrecht stehen, und umgekehrt. Aus der Gleichung:

$$v'v''+1 = 0,$$

ergibt sich nemlich (3):

$$x'x''+p^2 = 0.$$

Beziehungen endlich zwischen Winkeln, die von solchen geraden Linien, welche Puncte einer von zwei Polar-Figuren mit dem Anfangspuncte der Coordinaten verbinden, an

*) *Mémoire sur l'hyperbole équilatère: GERG. Ann. XIX. Juin 1829 p. 349.*

Digitized by Google

diesem Anfangspuncte, gebildet werden, entsprechen Beziehungen zwischen den Abscissen der Durchschnitte der ersten Axe mit den entsprechenden geraden Linien in der andern Polar-Figur. Aus den Gleichungen (3) ergibt sich nemlich folgende:

$$\frac{y}{x} = \frac{1}{p} \cdot \frac{w}{v}.$$

Die Polaren irgend zweier Puncte, die vom Anfangspuncte aus unter rechtem Winkel gesehen werden, bestimmen auf der ersten Axe zwei Segmente, deren Product constant und gleich $(-p^2)$ ist.

720. Wenn irgend ein Kegelschnitt durch folgende Gleichung:

$$ay^2+2hxy+cx^2+2dy+2ex+f = 0,$$

gegeben ist, so erhalten wir, nach den Gleichungen (3), für die Polar-Curve desselben folgende Gleichung:

$$aw^2+2bpvw+cp^2v^2+2dw+2epv+f = 0.$$

Wir wollen auf einige einfache Beziehungen eines solchen Kegelschnittes und seiner Polar-Curve, Beziehungen, die immer vollkommen gegenseitig sind, aufmerksam machen.

1) Wenn $a = 0$, so ist die erste Curve eine Hyperbel, deren eine Asymptote der zweiten Coordinaten-Axe parallel ist: die zweite Curve ist eine Parabel.
2) Wenn $b = 0$, so sind zwei zugeordnete Durchmesser der ersten Curve den Coordinaten-Axen parallel: der Mittelpunct der zweiten Curve liegt auf der zweiten Coornaten-Axe.
3) Wenn $c = 0$, so ist die erste Curve eine Hyperbel, deren eine Asymptote der ersten Coordinaten-Axe parallel ist: die zweite Curve berührt die zweite Axe.
4) Wenn $d = 0$, so geht derjenige Durchmesser der ersten Curve, dessen conjugirter der zweiten Coordinaten-Axe parallel ist, durch den Anfangspunct: der Mittelpunct der zweiten Curve liegt auf der ersten Axe.
5) Wenn $e = 0$, so geht derjenige Durchmesser der ersten Curve, dessen zugeordneter der ersten Axe parallel ist, durch den Anfangspunct: die an die zweite Curve, vom Anfangspuncte aus, gelegten Tangenten bilden mit den beiden Coordinaten-Axen ein System von vier Harmonicalen.
6) Wenn $f = 0$, so geht die erste Curve durch den Anfangspunct: die zweite Curve wird von der ersten Axe berührt.
7) Je nachdem die erste Curve eine Hyperbel oder Ellipse ist, hat die zweite Curve reelle Tangenten, die er zweiten Coordinaten-Axe parallel sind oder nicht. Die Polar-Curven von ähnlichen und ähnlich liegenden Curven, sind solche, welche zwei feste, der zweiten Axe parallele, gerade Linien berühren.

721. Ich will schliesslich noch ein paar Beispiele von der Anwendung der Resultate der beiden letzten Nummern geben.

Das Verhältniss der Abstände der beiden Durchschnittspuncte einer beweglichen Tangente mit zwei festen Tangenten einer Parabel von einer dritten festen Tangente ist constant (628).

Nach dem ersten der in der vorigen Nummer betrachteten Fälle schliesst sich an diesen Satz der folgende an:

Wenn man zwei feste Puncte auf dem Umfange einer gegebenen Hyperbel mit einem dritten auf demselben beweglichen Puncte durch zwei gerade Linien verbindet, so wird jede, einer Asymptote der Hyperbel parallele, gerade Linie von diesen beiden

Digitized by Google

geraden Linien in solchen zwei Puncten geschnitten, deren Abstände von dem Durchschnittspuncte derselben geraden Linie mit der Curve in einem constanten Verhältnisse stehen.

Mit diesem letzten Satze gehört wiederum, nach dem dritten Falle der vorigen Nummer, der folgende zusammen:

Wenn ein beliebiges Dreieck um einen gegebenen Kegelschnitt beschrieben ist und man zieht von irgend einem festen Puncte (P) der Basis dieses Dreiecks zwei gerade Linien nach den Durchschnittspuncten der beiden Schenkel desselben mit einer beweglichen Tangente des Kegelschnittes, so gibt es eine gerade Linie von gegebener Richtung (AB), welche jenen beiden geraden Linien in solchen zwei Puncten begegnet, deren Abstände von der Basis des Dreiecks in constantem Verhältnisse stehen.

Die Richtung der geraden Linie AB bleibt dieselbe, wo auch der feste Punct (P) auf der Basis des umschriebenen Dreiecks angenommen werden mag.

Wenn wir in dem zweiten Satze der vorliegenden Nummer statt jener geraden Linie, die einer der beiden Asymptoten der gegebenen Hyperbel parallel ist, eine dieser Asymptoten selbst nehmen, so ergibt sich folgender Satz:

Wenn man zwei feste Punete auf dem Umfange einer gegebenen Hyperbel mit einem dritten auf demselben liegenden Puncte durch zwei gerade Linien verbindet, so wird auf jeder Asymptote von diesen beiden geraden Linien ein Stück von constanter Länge interceptirt (305).

Einer Hyperbel, welche die zweite Coordinaten-Axe zu einer ihrer Asymptoten hat, entspricht eine Parabel, deren ein Durchmesser die erste Axe ist. (In diesem Falle ist $a = o$, $d = o$). Hiernach erhalten wir aus dem vorstehenden Satze den folgenden:

Wenn man das von zwei festen Tangenten einer gegebenen Parabel interceptirte Stück einer beweglichen dritten Tangente derselben nach der Richtung ihrer Durchmesser auf eine beliebige gerade Linie projicirt, so ist die Projection von constanter Länge.

Aus dem vorletzten Satze folgt noch ein zweiter Satz, der dem dritten dieser Nummer entspricht. In dem letztgenannten Satze ist alsdann der Berührungspunct auf der Basis des dem gegebenen Kegelschnitte umschriebenen Dreieckes, also irgend ein fester Punct auf dem Umfange der Curve, der Punct P. Es sind alsdann diejenigen Segmente von constanter Länge, welche auf der geraden Linie AB von denjenigen beiden geraden Linien, welche den Berührungspunct auf der Basis mit den Durchschnittspuncten der beiden Schenkel des Dreiecks und einer beweglichen Tangente verbinden. Der Scheitel des Dreiecks und der Berührungspunct auf jedem Schenkel desselben sind als solche zwei Durchschnittspuncte zu betrachten. Hiernach ist ersichtlich, dass die gerade Linie AB als vierte Harmonicale zu denjenigen drei geraden Linien gehört, welche den Punct P mit dem Scheitel und den beiden Berührungspuncten auf den Schenkeln des umschriebenen Dreiecks verbinden. Hiernach kann man dem in Rede stehenden Satze folgende Aussage geben (623, Note):

Wenn man irgend einen Punct auf dem Umfange eines gegebenen Kegelschnittes mit den drei Paaren von Durchschnittspuncten zweier festen Tangenten mit irgend dreien beliebigen Tangenten durch gerade Linien verbindet, so erhält man eine Involution von sechs geraden Linien.

Aus diesem Satze ergibt sich nach der 713. Nummer folgender neue Satz:

Wenn man zwei feste Puncte auf dem Umfange eines gegebenen Kegelschnittes mit irgend dreien andern Puncten desselben durch sechs gerade Linien verbindet, so schneiden diese geraden Linien eine beliebige Tangente des Kegelschnittes in den sechs Puncten einer Involution.

722. Um noch ein zweites Beispiel zu geben, wollen wir von folgendem allbekannten Satze ausgehen:

Die Winkelpuncte aller rechten Winkel, deren Scheitel eine gegebene Parabel berühren, liegen in gerader Linie.

Nach dem ersten Falle der 720. Nummer gehört mit diesem Satze der folgende zusammen:

Alle diejenigen geraden Linien, welche solche zwei Puncte einer gegebenen Hyperbel mit einander verbinden, für welche das Product der Abstände von einer gegebenen, einer der beiden Asymptoten parallelen, geraden Linien constant ist, gehen durch einen festen Punct.

Dieser feste Punct liegt auf einer, der andern Asymptote der gegebenen Hyperbel parallelen, geraden Linie, deren Durchschnitt mit der gegebenen geraden Linie auf der Curve liegt. Nach dem dritten Falle der 720. Nummer stellt sich neben den letzten Satz der folgende:

Wenn man von solchen zwei auf einer gegebenen Tangente eines gegebenen Kegelschnittes irgend beliebig angenommenen Puncten, für welche das Product der Abstände von irgend einem festen Punete derselben Tangente constant ist, noch zwei Tangenten an den Kegelschnitt legt, so schneiden sich solche Tangenten in einem Puncte, der auf einer festen geraden Linie liegt.

Nach dem sechsten in der 720. Nummer betrachteten Falle erhalten wir aus diesem Satze wiederum den folgenden:

Wenn ein rechter Winkel, dessen Scheitel auf dem Umfange eines gegebenen Kegelschnittes liegt, um diesen Scheitel sich beliebig dreht, so gehen die Chorden, welche durch die Schenkel desselben in ihren verschiedenen Lagen bestimmt werden, durch einen festen Punct (357).

Aus diesem letzten Satze erhalten wir endlich wieder den an die Spitze dieser Nummer gestellten, wenn wir einen Kreis zur Hülfs-Curve nehmen; eine Bemerkung, die wir bereits schon beiläufig gemacht haben (718).

723. Wenn wir in der 720. Nummer $p = 1$ setzen, so erhalten wir

$$y = w, \qquad x = v,$$

und folglich durch blosse Coordinaten-Vertauschung aus der Gleichung irgend einer Curve die Gleichung der Polar-Curve derselben. Es stellen die beiden Gleichungen:

$$F(y, x) = 0, \qquad F(w, v) = 0,$$

zwei solche Polar-Curven dar.

Auf ähnliche Weise erhalten wir, wenn wir zur 715. Nummer zurückgehen und zunächst wieder $\eta = \lambda = 1$ und dann ferner auch $\sigma = 1$ setzen:

$$y = \frac{u}{w}, \qquad x = \frac{v}{w},$$

oder auch, indem wir nach der Note zur 416. Nummer die dritte Ordinate z einführen und dann $x = 1$ und $v = 1$ setzen:

Digitized by Google

$$y = n, \qquad z = w.$$

Wir erhalten also auch hier wiederum die Gleichung der Polar-Curve einer gegebenen Curve durch blosse Coordinaten-Vertauschung. *)

*) Die vorstehenden Bemerkungen des Textes führen zu einem Principe, das mit dem bisher erörterten Principe der Reciprocität enge verwandt ist. Ich will dasselbe sogleich an einem einfachen Beispiele erläutern, indem ich folgende Gleichungen zu Grunde lege:

$$y^2+x^2 = c^2, \quad (I) \qquad v^2+n^2 = k^2, \quad (IV)$$
$$y^2+z^2 = s^2, \quad (II) \qquad v^2+w^2 = l^2, \quad (V)$$
$$\psi^2+\varphi^2 = \mu^2, \quad (III) \qquad \gamma^2+\lambda^2 = \nu^2. \quad (VI)$$

Alle diese Gleichungen haben dieselbe Form. Die Gleichung (I) stellt einen Kreis dar, der Punct [y = n, x = o] ist der Mittelpunct desselben. Die Gleichung (II) stellt (416, Note) eine Hyperbel dar, deren Axen mit den Coordinaten-Axen zusammenfallen und deren halbe reelle, in die zweite Coordinaten-Axe fallende, Axe gleich ist der Einheit. Der Punct [y = o, z = o] liegt nach der Richtung der imaginären Axe der Hyperbel unendlich weit. In der Gleichung (III) bedeuten ψ und φ die Quotienten der Abstände irgend eines Punctes von einer beliebigen festen geraden Linie in die Abstände desselben Punctes von der ersten und zweiten Coordinaten-Axe. Nehmen wir rechtwinklige Coordinaten-Axen an, so stellt die Gleichung (III) irgend einen Kegelschnitt dar, dessen ein Brennpunct in den Anfangspunct der Coordinaten fällt. Der Punct [ψ = o, φ = o] ist dieser Brennpunct. Die Gleichung (IV) stellt einen Kreis dar, die gerade Linie [v = o, u = o] liegt unendlich weit. Die Gleichung (V) stellt eine Hyperbel dar, deren Axen mit den Coordinaten-Axen zusammenfallen. Die in die erste Coordinaten-Axe fallende Axe ist imaginär und gleich $\sqrt{-1}$. Die gerade Linie [w = o, v = o] ist die erste Coordinaten-Axe. In der Gleichung (VI) bedeuten γ und λ die Quotienten der Abstände der beiden Durchschnittspuncte einer beliebigen geraden Linie mit den beiden Coordinaten-Axen von dem Anfangspuncte respective in die Abstände derselben Durchschnittspuncte von zweien festen auf den beiden Coordinaten-Axen beliebig angenommenen Puncten. Die Gleichung (VI) stellt alsdann irgend einen gegebenen Kegelschnitt dar, bezogen auf leicht zu bestimmende Coordinaten-Axen. Die gerade Linie [γ = o, λ = o] ist die Polare des Anfangspunctes, in Beziehung auf den gegebenen Kegelschnitt, und geht durch die beiden festen, auf den beiden Coordinaten-Axen angenommenen, Puncte.

Um auszudrücken, dass drei gegebene Puncte in gerader Linie liegen, erhalten wir in den drei Coordinaten-Systemen, auf welche sich die drei ersten Gleichungen beziehen, Gleichungen, welche genau dieselbe Form haben, und eben solche Gleichungen in den drei letzten Coordinaten-Systemen drücken aus, dass drei gegebene gerade Linien in demselben Puncte sich schneiden. Auf ähnliche Weise zeigen Gleichungen von derselben Form in den drei ersten Systemen an, dass drei gegebene gerade Linien durch denselben Punct gehen, und in den drei letzten, dass drei gegebene Puncte in gerader Linie liegen. Ferner hat die Tangente in einem gegebenen Puncte einer gegebenen Curve in den drei ersten Systemen dieselbe Form, und dieselbe Form hat auch die Gleichung des Berührungspunctes auf einer gegebenen Tangente in den drei letzten Systemen. Aus diesen allgemeinen Bemerkungen ergeben sich, indem wir von einem jener ersten Systeme zu einem von diesen letztern übergehen, alle jene Uebertragungen vermittelst des Principes der Reciprocität, wobei die besondere Form der (linearen) Hülfs-Gleichung nicht weiter in Betracht kommt.

Aber auch jede einzelne Gleichung zwischen Coordinaten in einem Systeme erhält eine andere, analoge, geometrische Deutung, wenn wir statt dieser Coordinaten die Coordinaten eines andern Systemes nehmen. Beispielsweise wollen wir die folgenden Gleichungen zusammenstellen:

$$y'y''+x'x'' = o, \quad (VII) \qquad v'v''+u'u'' = n, \quad (X)$$
$$y'y''+z'z'' = n, \quad (VIII) \qquad v'v''+w''w'' = o, \quad (XI)$$
$$\psi'\psi''+\varphi'\varphi'' = n, \quad (IX) \qquad \gamma'\gamma''+\lambda'\lambda'' = n, \quad (XII)$$

Die Gleichung (VII) bedeutet, dass die beiden Puncte (y'', x'') und (y', x'), vom Anfangspunete aus, unter rechtem Winkel gesehen werden; die Gleichung (VIII), dass das Product der Abstände der beiden Puncte (y'', z'') und (y', z') von der ersten Axe gleich Eins ist; die Gleichung (IX) wiederum, dass die beiden Puncte (ψ'', φ'') und (ψ', φ') vom Anfangspuncte aus, unter rechtem Winkel gesehen werden. Die Gleichung (X) zeigt an,

724. Ich muss mich hier mit den vorstehenden wenigen Ausführungen des besondern Falles begnügen, wo die Hülfs-Gleichung eine lineare ist. Wenn wir beliebige Gleichungen zu Grunde legen, so ist die Art der Behandlung dieselbe, es kommt bloss darauf an, aus solchen Entwicklungen einfache geometrische Resultate herzuleiten. So liegt zum Beispiel die Bemerkung nahe, dass die Theorie von der Abwicklung der Curven, welche, wie das oben entwickelte Princip der Reciprocität, auf die Variation der constanten Grössen beruht, ebenfalls hierher gehört.

---

dass die beiden geraden Linien (v'', u'') und (v', u') auf einander senkrecht stehen; die Gleichung (XI), dass die beiden geraden Linien (w'', v'') und (w', v') auf der ersten Axe zwei Segmente bestimmen, deren Product gleich Eins ist, und endlich die Gleichung (XII), wenn wir die Abstände der Durchschnittspuncte der beiden geraden Linien (γ'', λ'') und (γ', λ') mit den beiden Coordinaten-Axen vom Anfangspuncte Y'', X'' und Y', X', und die Abstände der beiden festen Puncte auf den beiden Axen vom Anfangspuncte b und a nennen, dass

$$\frac{Y''-b}{Y''}\cdot\frac{Y'-b}{Y'}+\frac{X''-a}{X''}\cdot\frac{X'-a}{X'}=0.$$

Wenn wir hiernach in den drei ersten Coordinaten-Systemen durch den Punct (o, o) eine gerade Linie und in den Durchschnittspuncten dieser geraden Linie mit den bezüglichen Curven (I), (II) und (III) an jede dieser Curven zwei Tangenten legen, ferner noch irgend eine beliebige dritte Tangente an jede derselben ziehen und die Durchschnittspuncte der letztgenannten Tangente mit den beiden erstgenannten respective durch (γ'', x'') und (γ', x'), (γ'', s'') und (γ', s') und durch (ψ'', q'') und (ψ', q') bezeichnen; wenn wir ferner in den drei letzten Coordinaten-Systemen von irgend einem Puncte der geraden Linie (n, o) zwei Tangenten an jede der bezüglichen Curven (IV), (V) und (VI) legen, die Berührungspuncte auf einem solchen Tangenten-Paare durch zwei gerade Linien mit irgend einem dritten beliebigen Puncte der bezüglichen Curve durch zwei gerade Linien verbinden und diese geraden Linien respective durch (v'', u'') und (v', u'), (v'', w'') und (v', w') und durch (γ'', λ'') und (γ', λ') bezeichnen: — so ist offenbar, dass, wenn eine der Gleichungen (VII) — (XII) besteht, diese Gleichungen alle sechs befriedigt werden. Hiernach sind also auch die nachstehenden Sätze s i e b e n s e c h s bewiesen, wenn e i n e r derselben als bewiesen angesehen werden kann.

1) *Irgend eine beliebige Tangente eines gegebenen Kreises schneidet irgend zwei parallele Tangenten desselben Kreises in solchen zwei Puncten, die, vom Mittelpuncte desselben aus, unter einem rechtem Winkel gesehen werden.*

2) *Irgend eine beliebige Tangente einer gegebenen Hyperbel begegnet irgend zweien Tangenten, welche sich in irgend einem Puncte einer Axe der gegebenen Hyperbel (der reellen Axe) schneiden, in solchen zwei Puncten, für welche das Product der Abstände von der andern Axe (der imaginären) constant und dem Quadrate der halben ersteenannten Axe gleich ist.*

3) *Auf irgend einer beliebigen Tangente eines gegebenen Kegelschnittes wird von irgend zweien andern, auf einer Directrix sich schneidenden, Tangenten ein solches Segment interceptirt, das, vom bezüglichen Brennpuncte aus, unter rechtem Winkel gesehen wird.*

4) *Alle Peripherie-Winkel im Halbkreise sind rechte Winkel.*

5) *Wenn man von irgend zwei Puncten einer gegebenen Hyperbel, die von einer der beiden Axen derselben (der Quer-Axe) gleich weit abstehen, zwei gerade Linien nach irgend einem dritten Puncte der Curve zieht, so bestimmen diese beiden geraden Linien auf der andern Axe (der imaginären) zwei Segmente, deren Product dem Quadrate dieser halben Axe gleich ist.*

6) Der sechste Satz bezieht sich auf Segmente, die auf zweien im Pol einer gegebenen geraden Linie, in Beziehung auf einen gegebenen Kegelschnitt, sich schneidenden Axen von der gegebenen geraden Linie und solchen Linien-Paaren bestimmt werden, welche irgend zwei Puncte des Kegelschnittes, die mit jenem Pole in gerader Linie liegen, mit irgend einem dritten Puncte des Kegelschnittes verbinden. Die unmittelbare Aussage des Satzes ist weniger einfach. —

Digitized by Google

§ 4.

Neue allgemeine Theorie der Curven.

725. Es sei

$$F(y, x) = 0 \qquad (1)$$

die Gleichung irgend einer gegebenen Curve zwischen gewöhnlichen Punct-Coordinaten. Es besteht also diese Gleichung, wenn y und x diejenigen Werthe erhalten, welche sich auf irgend einen beliebigen Punct dieser Curve beziehen. Die Tangente in diesem Puncte hat folgende Gleichung:

$$Y-y = \frac{dy}{dx}(X-x), \qquad (2)$$

indem wir, zur Unterscheidung, Y und X als die veränderlichen Grössen nehmen und den Differential-Coefficienten auf den Punct (y, x) beziehen. (Es wird nemlich die vorstehende Gleichung einmal befriedigt, wenn wir zugleich Y = y und X = x setzen, und dann ferner auch, wenn wir zugleich Y = y+dy und X = x+dx setzen). Die Coordinaten der durch die Gleichung (2) dargestellten geraden Linien sind, wenn wir u = 1 setzen (400):

$$v = -\frac{dy}{dx}, \qquad w = -\left(\frac{ydx-xdy}{dx}\right). \qquad (3)$$

Um also die Gleichung der gegebenen Curve zwischen Linien-Coordinaten zu erhalten, brauchen wir bloss y und x zwischen den drei Gleichungen (1) und (3) zu eliminiren.

726. Aus den beiden Gleichungen (3) ergibt sich folgende:

$$y+vx+w = 0. \qquad (4)$$

Wenn wir diese Gleichung vollständig differentiiren, so kommt:

$$dy+vdx+dw+xdv = 0,$$

und da dy+vdx = 0, so folgt:

$$x = \frac{dw}{dv}, \qquad (5)$$

und wenn wir diesen Werth von x in die Gleichung (4) substituiren, ergibt sich:

$$y = -\left(\frac{wdv-vdw}{dv}\right). \qquad (6)$$

Dieselben Werthe von y und x erhalten wir unmittelbar, wenn wir berücksichtigen, dass (y, x) der Berührungspunct auf der Tangente (w, v) ist, und jener Berührungspunct folgende Gleichung hat:

$$W-w = \frac{dw}{dv}(V-v),$$

indem wir, zur Unterscheidung, die veränderlichen Grössen W und V nennen. Umgekehrt erhalten wir die vorstehende Gleichung des Berührungspunctes unmittelbar aus den beiden Gleichungen (5) und (6) (400).

727. Wir haben (3):

$$vdx+dy = 0; \qquad (7)$$

wenn wir diese Gleichung von Neuem differentiiren, indem wir dx als constant betrachten, und dann $\frac{d^2y}{dx^2} = q$ setzen, so kommt:

$$\frac{dv}{dx} = -q. \qquad (8)$$

Digitized by Google

Wir haben ferner (5):

$$xdv+dw = o, \qquad (9)$$

und wenn wir diese Gleichung von Neuem differentiiren, indem wir dv als constant betrachten, und dann $\frac{d^2w}{dv^2} = Q$ setzen, so kommt:

$$\frac{dx}{dv} = -Q. \qquad (10)$$

Aus den beiden Gleichungen (8) und (10) ergibt sich folgende einfache Beziehung zwischen den beiden zweiten Differential-Quotienten:

$$Qq = t. \qquad (11)$$

Aus der Zusammenstellung der ersten der beiden Gleichungen (3) und der Gleichungen (5), (8) und (10) ergeben sich noch folgende:

$$\frac{dw}{dx} = xq, \qquad \frac{dy}{dv} = vQ, \qquad \frac{dw}{dy} = -\frac{qx}{v}.$$

728. Wenn wir die Gleichung (11) differentiiren, so kommt:

$$pdQ = -Qdq,$$

und mithin auch (8):

$$\frac{qdQ}{dv} = \frac{Qdq}{qdx},$$

oder:

$$q^3R = r, \qquad Q^3r = R, \qquad (12)$$

indem wir

$$\frac{dQ}{dv} = \frac{d^3w}{dv^3} = R, \qquad \frac{dq}{dx} = \frac{d^3y}{dx^3} = r,$$

setzen.

Wenn wir weiter gehen und eine der beiden Gleichungen (12), etwa die erste derselben, differentiiren, so kommt:

$$dr-3Rq^2dq-q^3dR = o,$$

und wenn wir die beiden ersten Glieder dieser Gleichung durch qdx, das dritte Glied durch (—dv) dividiren, und dann reduciren, indem wir zugleich

$$\frac{dR}{dv} = \frac{d^4w}{dv^4} = S, \qquad \frac{dr}{dx} = \frac{d^4y}{dx^4} = s,$$

setzen, so ergibt sich:

$$qs-3r^2+q^5S = o. \qquad (13)$$

Aus dieser Gleichung können wir durch Hülfe der Gleichungen (11) und (12) oder, einfacher, durch die blosse gegenseitige Vertauschung der grossen Buchstaben mit den entsprechenden kleinen, folgende ableiten:

$$QS-3R^2+Q^5s = o. \qquad (14)$$

Auf diese Weise können wir fortfahren und den Differential-Quotienten einer beliebigen Ordnung in einem Coordinaten-Systeme durch die Differential-Quotienten derselben Ordnung und der niederern Ordnungen in dem andern Coordinaten-Systeme ausdrücken.

729. Nach den beiden vorigen Nummern erhalten wir, wenn eine Curve durch ihre Differential-Gleichung von einer beliebigen Ordnung zwischen gewöhnlichen Punct-Coordinaten y und x gegeben ist, unmittelbar die Differential-Gleichung derselben Ordnung dieser Curve zwischen den Linien-Coordinaten w und v, und, umgekehrt, jene Differential-Gleichung aus dieser. So ergibt sich allgemein aus der Gleichung:

Digitized by Google

$$F[\ldots s, r, q, p, y, x] = 0,$$

die folgende:

$$F\left(\ldots \frac{3R^2-QS}{Q^5}, \frac{R}{Q^3}, \frac{1}{Q}, (-v), -(w-vP), -P\right) = 0,$$

indem wir, der Symmetrie halber, die beiden ersten Differential-Quotienten p und P nennen. Wir erhalten zwei neue Gleichungen, welche sich wiederum auf ein und dieselbe Curve beziehen, wenn wir in den beiden vorstehenden Gleichungen die grossen und kleinen sich entsprechenden Buchstaben gegenseitig mit einander vertauschen.

730. Wir können die Gleichungen zwischen den Linien-Coordinaten w und v auf eine doppelte Weise allgemein discutiren. Wir können nemlich einerseits, mit Hülfe der TAYLOR'schen Reihe, die Bedeutung der verschiedenen Differential-Quotienten geometrisch nachweisen, wie diess zum Beispiel, in Beziehung auf die gewöhnlichen Coordinaten, in *LACROIX, Traité élémentaire de calcul différentiel et de calcul intégral* 60, geschehen ist, oder wir können auch, von der andern Seite, die einmal schon vorliegenden Entwicklungen, in Beziehung auf die gewöhnlichen Coordinaten, y und x auf die Coordinaten w und v übertragen. Ich will hier vorzugsweise den letztern Weg einschlagen und habe zu diesem Ende die bisherigen Entwicklungen dieses Paragraphen vorangeschickt.

Der Symmetrie halber wollen wir endlich noch in die zu discutirende Gleichung eine dritte Grösse u einführen, indem wir $\frac{v}{u}$ und $\frac{w}{u}$ an die Stelle von v und w schreiben, und demnach dieselbe auf folgende Weise bezeichnen:

$$F\left(\frac{w}{u}, \frac{v}{u}\right) = U = 0. \qquad (1)$$

Wenn diese Gleichung eine algebraische ist, so ist sie, in Beziehung auf w, v und u, homogen. Wenn in dem Folgenden von Differential-Quotienten von w, in Beziehung auf v, die Rede sein wird, so müssen wir, um den frühern Entwicklungen uns anzuschliessen, u = 1 setzen. Ferner wollen wir, wenn von Differential-Quotienten von w, in Beziehung auf u, die Rede sein wird, stillschweigend dabei verstehen, dass v = t gesetzt werde. Auf diese Weise gewinnen wir den Vortheil, dass wir auf eine symmetrische Weise die Beziehungen der bezüglichen Curve zu jeder der beiden Coordinaten-Axen erhalten.

731. Je nachdem $\frac{v}{u}\left(= -\frac{dy}{dx}\right)$ negativ oder positiv ist, wachsen die Punct-Ordinaten der Curve oder nehmen ab, wenn wir uns, nach der Richtung der ersten Axe hin, weiter vom Anfangspuncte entfernen. Je nachdem die beiden Ausdrücke:

$$\frac{d^2w}{dv^2}, \qquad \frac{vdw-wdv}{dv},$$

bezogen auf irgend einen Punct irgend einer durch ihre Gleichung gegebenen Curve, entgegengesetzte oder übereinstimmende Zeichen erhalten, kehrt die Curve ihre concave oder ihre convexe Seite der ersten Coordinaten-Axe zu. (LACROIX a. a. O. 62).

Da ferner $\frac{dw}{dv} = -x$, so ist für die Tangenten in den Durchschnittspuncten der Curve mit der zweiten Coordinaten-Axe

$$\frac{dw}{dv} = 0,$$

und man erhält diese Tangenten, wenn man die letzte Gleichung entwickelt und dann mit

der Gleichung der Curve zusammenstellt. Für die Tangenten in den Durchschnittspuncten der Curve mit der ersten Axe ist

$$\frac{dw}{du} = o;$$

und endlich ergibt sich für die Tangenten der gegebenen Curve in ihren Durchschnittspuncten mit irgend einer zweiten Curve:

$$f(y, x) = o, \qquad (2)$$

folgende Gleichung:

$$f\left(-\frac{dw}{du}, -\frac{dw}{dv}\right) = o. \text{ *)} \qquad (3)$$

*) Man sieht sogleich ein, dass, wenn die gegebene Gleichung (1) eine algebraische und von irgend einem n. Grade, in Beziehung auf w, v und u, ist, die partiellen Differential-Coefficienten $\frac{dw}{dv}$ und $\frac{dw}{du}$ dieselben Grössen in der (n—1). Potenz enthalten, und wenn also die Gleichung (2) ebenfalls eine algebraische und von irgend einem m. Grade, in Beziehung auf y und x, ist, so steigt die Gleichung (3), in Beziehung auf w, v und u, bis zum m(n—1). Grade. Wir erhalten also mn(n—1) Tangenten der Curve (1) in ihren Durchschnittspuncten mit der Curve (2) und also auch, worauf es uns hier ankommt, eine gleiche Anzahl solcher Durchschnittspuncte. Da die Curve (2) von der m. Ordnung ist, so ist die gegebene Curve von der n(n—1). Ordnung. Also eine Curve von der n. Classe ist, im Allgemeinen, von der n(n—1). Ordnung, eine Curve von der n. Ordnung ist, im Allgemeinen, von der n(n—1). Classe. Unmittelbar hieraus folgt, dass die Polar-Curve einer gegebenen Curve n. Ordnung, in Beziehung auf irgend eine gegebene lineare Hülfs-Gleichung, im Allgemeinen, eine Curve n(n—1). Ordnung, und die Polar-Curve einer gegebenen Curve n. Classe von der n(n—1). Classe ist. Es ergibt sich ferner, dass zwei Curven n. und m. Ordnung, im Allgemeinen und höchstens, mn(m—1)(n—1) gemeinschaftliche Tangenten und zwei Curven von denselben Classen eine gleiche Anzahl von Durchschnitten haben.

Die vorstehenden Resultate hat zuerst H. Poncelet in Gergonne's Annalen und dann ausführlicher in seiner oben angeführten Abhandlung im 4. Bande des Crelle'schen Journals Nro. 66 und 73 aufgestellt. Es scheinen mir dieselben fest zu stehen, ungeachtet aller dagegen erhobenen Zweifel und Einwürfe. Es bleibt hierbei nur ein Paradox zu erklären. Da nemlich die Polar-Curve einer gegebenen Curve n. Ordnung von der n(n—1) Ordnung ist und die gegebene Curve gegenseitig (und zwar in Beziehung auf dirselbe Hülfs-Gleichung, wenn diese eine symmetrische ist, in welchem Falle wir auch rein geometrisch, vermittelst eines Kegelschnittes, construiren können) die Polar-Curve jener zweiten Curve ist, so reducirt sich in dem vorliegenden Falle die Polar-Curve einer Curve n(n—1). Ordnung, die, im Allgemeinen, von der [n(n—1)][n(n—1)—1] Ordnung ist, auf die n. Ordnung. Setzen wir zum Beispiel n = 3, so reducirt sich der 30. Grad auf den dritten. Wir wollen bei diesem Beispiele stehen bleiben. Für die Polar-Curven derjenigen Curven, welche durch die allgemeine Gleichung des 6. Grades dargestellt werden, erhalten wir wirklich eine Gleichung des 30. Grades, die aber nicht die allgemeine Gleichung dieses Grades sein kann, weil sie nur so viele beliebige Constante enthält, als die allgemeine Gleichung des 6. Grades, nemlich nur 27. Hiernach hebt sich, wie auch schon sowol H. Gergonne als H. Poncelet bemerkt, jeder scheinbare Widerspruch. Aber es bleibt im Einzelnen noch nachzuweisen, wodurch jene Gleichung des 30. Grades sich reducirt. Offenbar kann diess nur dann geschehen, wenn die Coefficienten dieser Gleichung durch besondere Werthe der Coefficienten der allgemeinen Gleichung des 6. Grades Null oder unendlich werden, oder dadurch, dass diese Gleichung reelle Factoren hat, die wir, als der Aufgabe fremd, fortlassen. Es bedarf diess noch einer nähern Erörterung. Die entsprechenden geometrischen Beziehungen bieten sich ebenfalls nicht sogleich dar. H. Poncelet gibt eine Erklärungsweise (a. a. O. Nro. 67), die wenigstens nicht ausreichend ist. Nach ihm reducirt sich die Zahl der m(m—1) Tangenten, welche sich, von einem gegebenen Puncte aus, an eine gegebene Curve m. Ordnung legen lassen (und also auch der Grad ihrer Polar-Curve) um 2p Einheiten, wenn diese Curve p Doppelpuncte hat, an deren

Wenn die gegebene Curve eine Asymptote hat, so ist für den Berührungspunct auf derselben x, im Allgemeinen, unendlich. Mithin bekommt man für jene Asymptote

$$\frac{dv}{dw} = 0.$$

Eine Ausnahme hiervon findet Statt, wenn die Asymptote mit der zweiten Coordinaten-Axe zusammenfällt; alsdann aber ist y unendlich und man hat:

$$\frac{du}{dw} = 0.$$

Man erhält also die Asymptoten der in Rede stehenden Curve, wenn man ihre Gleichung mit einer der beiden letzten Gleichungen zusammenstellt. Wenn indess diese Zusammenstellung zu Werthen von $\frac{w}{u}$ und $\frac{w}{v}$ führt, die beide unendlich werden, so erhält man keine Asymptoten, sondern durch $\frac{v}{u}$ ist alsdann die Richtung der Durchmesser eines parabolischen Zweiges der Curve gegeben.

732. Für das Differential des Bogens der bezüglichen Curve hat man (10):

$$\pm\left(1+\frac{dx^2}{dy^2}\right)^{\frac{1}{2}}.dx = \mp(1+v^2).^{\frac{1}{2}}\frac{d^2w}{dv^2}dv. —$$

Für das Differential der Fläche, welche von der Curve, der ersten Coordinaten-Axe und zwei Punct-Ordinaten begränzt wird, hat man

$$ydx = \frac{vdw-wdv}{dv}\cdot\frac{d^2w}{dv^2}dv = -\tfrac{1}{2}vd.\left(\frac{dw}{dv}\right)^2+w\frac{d^2w}{dv^2}dv.$$

Auf ähnliche Weise hat man für das von der Curve, der zweiten Coordinaten-Axe und zwei auf einander folgende Abscissen begränzte Flächen-Differential:

$$xdy = \frac{dw}{dv}\cdot\frac{dv}{dv}dv = -\tfrac{1}{2}vd.\left(\frac{dw}{dv}\right)^2$$

und endlich, wenn das Flächen-Differential durch die Curve und zwei durch den Anfangspunct der Coordinaten gehende gerade Linien begränzt ist:

$$\frac{ydx-xdy}{2} = \tfrac{1}{2}w\frac{d^2w}{dv^2}dv.$$

Bei dem Gebrauche von Linien-Coordinaten bietet sich der Gedanke ganz natürlich dar, Flächenräume durch die gegebene Curve, durch zwei Tangenten derselben und durch die zweite Coordinaten-Axe zu begränzen. Das Differential eines so bestimmten Flächenraumes ist alsdann, was sogleich einleuchtet:

$$-\tfrac{1}{2}xdw = \tfrac{1}{2}\left(\frac{dw}{dv}\right)^2dv. —$$

733. Wenn zwei gegebene Curven sich in irgend einem Puncte berühren, so ist für diesen Punct, indem wir zur Unterscheidung die accentuirten Buchstaben auf die zweite

Stelle auch conjugirte Puncte u. s. w. treten und die auch unendlich weit liegen können. Aber eine Curve 6. Ordnung hat höchstens 10 Doppelpuncte. (Es folgt diess auf dem Wege, den Cramer in seiner *Analyse des lignes courbes* einschlägt, namentlich daraus, dass eine solche Curve von einer Curve 4. Ordnung höchstens in 24 Puncten geschnitten wird, wonach unter den 14 Puncten, durch welche sich immer eine Curve 4. Ordnung legen lässt, höchstens 10 Doppelpuncte der Curve 6. Ordnung sind.) Hiernach kann also jene Curve, die, im Allgemeinen, von der 30. Ordnung ist, sich höchstens auf die 10. Ordnung reduciren.

Curve beziehen:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy'}{dx'}, \qquad y = y', \qquad x = x'.$$

Die erste und dritte dieser drei Gleichungen geben:

$$v = v', \qquad \frac{dw}{dv} = \frac{dw'}{dv'},$$

und die zweite Gleichung gibt, wenn wir die vorstehenden beiden berücksichtigen:

$$w = w'.$$

Es stimmen also zwei sich berührende Curven ebenfalls in den Coordinaten w und v, und dem Differential-Quotienten, in Beziehung auf diese Coordinaten, überein.

Die Gleichung (tt) der 727. Nummer zeigt, dass zwei sich dreipunctig osculirende Curven, da sie, was y und x und die beiden ersten Differential-Quotienten von y, in Beziehung auf x, betrifft, übereinstimmen, ebenfalls übereinstimmen in den Werthen von w, v und den beiden ersten Differential-Quotienten von w, in Beziehung auf v. Ferner folgt aus der Gleichung (tt), dass bei einer vierpunctigen Osculation die beiden Curven, auch in Betreff der dritten Differential-Quotienten, von w, in Beziehung auf v, übereinstimmen und aus der Gleichung (t3) ist ersichtlich, dass bei einer fünfpunctigen Osculation auch die vierten Differential-Quotienten gleiche Werthe erhalten. Wir überzeugen uns auf diesem Wege, dass die Theorie der Osculation in dem neuen Systeme derselben Theorie, in dem Systeme der gewöhnlichen Punct-Coordinaten, ganz und gar analog ist, und dass bei jedem beliebigen Grade des Contactes so viele Tangenten als Puncte zusammenfallen.

734. Der allgemeine Ausdruck für den Krümmungshalbmesser ist folgender:

$$\frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{1}{2}}}{dx\,d^2y} = (1+v^2)^{\frac{3}{2}}\frac{d^2w}{dv^2}.$$

Die Mittelpuncte der Krümmungs-Kreise für alle verschiedenen Puncte einer gegebenen Curve liegen bekanntlich auf einer zweiten Curve, deren Tangenten die Normalen der gegebenen Curve sind, und durch deren Abwicklung man diese Curve erhält. Wir können leicht die Gleichung jener zweiten, der abgewickelten, Curve erhalten. Es sei

$$F(w, v) = 0 \qquad (1)$$

die Gleichung der gegebenen Curve. Für den Berührungspunct auf irgend einer beliebigen Tangente (w, v) dieser Curve ergibt sich, indem wir W und V als die eigentlichen veränderlichen Grössen (*coordonnées courantes*) betrachten, folgende Gleichung:

$$W-w = \frac{dw}{dv}(V-v).$$

Für die Normale in diesem Berührungspuncte, die wir durch (w', v') bezeichnen wollen, hat man zunächst:

$$v = -\frac{1}{v'},$$

und hiernach erhält man aus der letzten Gleichung:

$$w = w'+\frac{dw}{dv}\left(\frac{v'^2+1}{v'}\right).$$

Substituiren wir endlich die eben gefundenen Werthe von w und v in die Gleichung (1), so kommt

$$F\left\{\left(w'+\frac{dw}{dv}\left(\frac{v'^2+1}{v'}\right)\right), -\frac{1}{v'}\right\} = 0$$

Digitized by Google

und diess ist die gesuchte Gleichung der abgewickelten Curve, wenn wir den Werth des Differential-Quotienten $\frac{dw}{dv}$ als Function von v aus der Gleichung (t) ziehen, für v seinen Werth $\left(\frac{1}{v'}\right)$ setzen und dann überall in der letzten Gleichung w' und v' als veränderliche Grössen betrachten.

Es sei ferner

$$f(y, x) = 0 \qquad (2)$$

die Gleichung der gegebenen Curve zwischen Punct-Coordinaten. Die Gleichung der Normalen in irgend einem Puncte (y, x) dieser Curve ist bekanntlich, wenn wir Y und X als die eigentlichen veränderlichen Grössen betrachten:

$$Y - y = -\frac{dx}{dy}(X - x)$$

und also sind die Coordinaten derselben:

$$v = \frac{dx}{dy}, \qquad w = -\frac{ydy + xdx}{dy},$$

Wenn wir zwischen den beiden letzten Gleichungen und der Gleichung (2) y und x eliminiren, so erhalten wir wiederum die Gleichung der abgewickelten Curve. Umgekehrt erhält man, wenn die Gleichung der abgewickelten Curve zwischen Linien-Coordinaten gegeben ist, vermittelst der letzten beiden Gleichungen, unmittelbar die Differential-Gleichung der abwickelnden Curve.

Ich enthalte mich, des beschränkten Raumes wegen, aller detaillirten Entwicklungen.

735. Ich gehe zu einigen Andeutungen über die Theorie der singulären Puncte und singulären geraden Linien über. Wenn

$$F(y, x) = Z = 0 \qquad (1)$$

die Gleichung irgend einer gegebenen Curve ist, die einen Doppeltpunct hat, so wird derselbe dadurch angezeigt, dass zugleich

$$\frac{dZ}{dy} = n, \qquad \frac{dZ}{dx} = 0, \qquad (2)$$

wonach $\frac{dy}{dx}$ unter der Form $\frac{0}{n}$ erscheint, und sein wahrer Werth ein zwiefacher ist. Wenn die Gleichung

$$f(w, v) = U = 0 \qquad (3)$$

eine Curve darstellt, deren zwei Zweige von derselben geraden Linie berührt werden, so wird diese gerade Linie dadurch angezeigt, dass

$$\frac{dU}{dw} = n, \qquad \frac{dU}{dv} = 0, \qquad (4)$$

wonach $\frac{dw}{dv}$ unter der Form $\frac{0}{0}$ erscheint, und sein wahrer Werth ein zwiefacher ist. Da wir hiernach zur Bestimmung jenes Doppeltpunctes und dieser gemeinschaftlichen Tangente zweier Zweige jedesmal zugleich drei Gleichungen erhalten, so ist ersichtlich, dass, im Allgemeinen, eine algebraische Curve einerseits keine zwei sich schneidende Zweige und andrerseits keine solche zwei Zweige hat, welche beide von derselben geraden Linie berührt werden, und dass dieselbe überhaupt keine singuläre Puncte und singuläre gerade Linien hat. Wenn wir ein System von zwei Curven als eine einzige Curve betrachten, so erhalten wir, in Uebereinstimmung mit den vorstehenden Bemerkungen, so viele Doppeltpuncte und so viele, zwei Zweige berührende, gerade Linien, als die beiden Curven Durchschnittspuncte und gemeinschaftliche Tangenten haben.

Digitized by Google

Ein conjugirter, isolirter Punct einer gegebenen Curve (1) wird dadurch angezeigt, dass $\frac{dy}{dx}$ oder einer der folgenden Differential-Coefficienten von y, in Beziehung auf x, imaginär wird: eine conjugirte isolirte gerade Linie einer gegebenen Curve (1) wird dadurch angezeigt, dass der erste oder einer der spätern Differential-Coefficienten von w, in Beziehung auf v, imaginär wird.

Für Rückkehrpuncte und Wendungspuncte ist bekanntlich der zweite Differential-Coefficient $\frac{d^2y}{dx^2}$ gleich Null oder unendlich; die Tangente in solchen Puncten ist eine singuläre gerade Linie und für dieselbe mithin (727) der zweite Differential-Coefficient $\frac{d^2w}{dv^2}$, umgekehrt, gleich Null oder unendlich.

Wenn $\frac{dw}{dv}$ unendlich wird, so ist die bezügliche Tangente eine Asymptote. Die TAYLORsche Reihe versagt alsdann ihren Dienst zur Entwicklung von w. In diesem Falle müssen wir untersuchen, ob die Gleichungen (4) nicht beide zugleich befriedigt werden und jener Differential-Coefficient, der alsdann ursprünglich unter der Form $\frac{0}{0}$ erscheint, durch Fortlassung eines gemeinschaftlichen Factors in Nenner und Zähler sich unter seinem wahren Werthe, als unendlich gross, darstellt. Wenn diess geschieht, so ist die Asymptote eine singuläre gerade Linie, die auch noch von einem zweiten Zweige der Curve berührt wird. Es kann alsdann auch, was eine leichte Entwicklung zeigt, der auf dieser Asymptote unendlich weit entfernt liegende Punct ein solcher singulärer Punct sein, der einem Rückkehr- oder Wendungs-Punct entspricht. Einfache Beispiele hiervon liefern die Gleichungen

$$w^3 = p^3v, \qquad w^3 = p^3v^2,$$

für $w = 0$ und $v = 0$.

736. Wir haben in diesem letzten Paragraphen w und v als die beiden Linien-Coordinaten betrachtet, nehmen wir statt derselben w und u, so bleibt Alles unverändert, wenn wir die beiden Coordinaten-Axen mit einander vertauschen. Wenn wir v und u als Linien-Coordinaten einführen, so geht die Gleichung (4) der 726. Nummer in folgende über:

$$uy + vx + 1 = 0,$$

und diese Gleichung erhält wiederum die Form der Gleichung (4), wenn wir dieselbe durch y dividiren, z für $\frac{1}{y}$ schreiben und dann y gleich Eins nehmen. Auf diese Weise kommt nemlich:

$$z + vx + u = 0.$$

Wir können hiernach in allen bisherigen Entwicklungen dieses Paragraphen z mit y und u mit w vertauschen. Auf diese Weise erhalten wir zum Beispiel:

$$\frac{dz}{dx} = -v, \qquad \frac{du}{dv} = -x, \qquad \frac{d^2z}{dx^2} \cdot \frac{d^2u}{dv^2} = 1.$$

737. Wenn irgend eine Curve, deren Gleichung folgende ist:

$$F(z, x) = Y = 0,$$

einen singulären Punct hat, so ergibt sich für denselben, ähnlich wie in der 735. Nummer, zugleich:

$$\frac{dY}{dz} = 0, \qquad \frac{dY}{dx} = 0.$$

Wenn irgend eine Curve, deren Gleichung folgende ist:

$$f(u, v) = W = o,$$

eine singuläre gerade Linie hat, so ergibt sich für dieselbe sogleich:

$$\frac{dW}{du} = o, \qquad \frac{dW}{dv} = o.$$

In dem ersten Coordinaten-Systeme begegnet man unwillkührlich auch den singulären Puncten in unendlicher Entfernung, deren Existenz erst vor Kurzem H. PONCELET angezeigt hat, und zugleich bietet sich eine leichte Discussion derselben dar, weil das z eines solchen Punctes Null wird, während das x desselben, im Allgemeinen, einen endlichen Werth behält. Auf eine ähnliche Weise knüpft sich an das zweite Coordinaten-System eine einfache Discussion der unendlich weit entfernt liegenden singulären geraden Linien einer gegebenen Curve, für welche zugleich $u = o$ und $v = o$. —

Verbesserungen.

Erster Band.

S. 8 Z. 13 v. u. statt q lies q'.
„ 12 „ 11 „ „ fehlt im Ausdrucke für *cosα* der Zähler 1.
„ 25 „ 11 v. o. st. A″—A″ l. A′—A‴.
Die Schluss-Bemerkung der 52. Nummer bedarf einer Berichtigung, die sich sogleich ergibt, wenn man wie am Ende der 449. Nummer des zweiten Bandes verfährt.
„ 33 „ 22 „ „ st. QQ_n und PP_n l. QP_n und PQ_n.
„ 46 „ 12 v. u. st. *xsinφ* l. *xcosφ*.
„ „ „ 9 „ „ st. y l. x.
„ „ „ 4 „ „ st. *ysinφ* l. *xsinφ*.
„ 87 „ 6 „ „ st. x l. x.
„ 134 „ 13 „ „ steht der Factor 2 zuviel.
„ 138 „ 14 „ „ statt $\alpha^2+\beta$ l. $\alpha^2-\beta$.
„ 144 „ 11 v. o. st. $sin\vartheta$ l. $sin^2\vartheta$.
„ „ „ 10 „ „ st. $\alpha'^2-\beta$ l. $\alpha^2-\beta$.
„ 147 „ 14 v. u. st. y l. y^2.
„ 148 „ 17 „ „ st. *Introduction* l. *Introductio*.
„ 150 „ 18 v. o. st. erste l. zweite.
„ 155 „ 19 v. u. st. M″M‴ l. M′M″.
„ „ „ 9 „ „ st. entgegengesetztem l. gleichem.
„ „ „ 8 „ „ st. kleiner oder grösser als das l. grösser oder kleiner als das vierfache.
„ 163 „ 15 „ „ st. $\xi y''$ l. $\xi y'$.
„ 165 „ 3 „ „ st. y l. —y.
„ „ „ 1 „ „ st. $-2(q-q')x+$ l. $+2(q-q')x-$.
„ 181 „ 20 „ „ st. Wir . . . Parallellinien l. Je nachdem $(\gamma^2-\epsilon)$ und demnach auch $(\delta^2-\beta\epsilon)$ positiv, gleich Null oder negativ ist, also je nachdem die Coordinaten-Axen die Curve schneideo, berühren oder nicht schneideo, sind jene Parallellinien reell, fallen zusammen oder sind imaginär.
„ „ „ 10 „ „ st. nur l. nun.
„ 184 „ 16 „ „ st. 2μ l. $2\epsilon\mu$.
„ 249 „ 4 v. o. st. TV l. TU.
„ 271 „ 5 „ „ st. χ überall x.
In der 16. Figur der 1. Tafel ist eioe durch O′ gehende gerade Linie falsch gezogen.

Zweiter Band.

„ 4 „ 8 v. u. am Ende der Zeile lies $\left(-\frac{w'}{u'}\right)$ statt $\left(-\frac{w'}{v'}\right)$.
„ 9 „ 1 „ „ statt α' l. x′.
„ 14 „ 16 „ „ st. u‴ l. c‴.
„ 17 „ 8 „ „ st. *ohne dass die Winkel sich drehen* l. *wie auch die Winkel sich drehen mögen*.
„ 30 „ 9 „ „ st. $sin''\beta$ l. $sin\beta''$.
„ 32 „ 2 „ „ st. 440 l. 441.
„ 40 „ 14 v. o. st. χ l. x.
„ „ „ 7 v. u. st. x l. x′.
„ 69 „ 12 „ „ st. Dx l. Dy.
„ 71 „ 8 „ „ st. ψ' l. ψ.
„ 73 „ 15 v. o. ist das Zeicheo des Ausdrucks für (a+a′) zu ändern, wodurch auch eine Zeichen-Aenderung in den Gleichungen (7), (8), (10) und (11) hervorgebracht wird.
„ 118 „ 15 „ „ st. $\left(\frac{dU}{dw}\right)$ l. $\left(\frac{dU}{du}\right)$.
„ 176 „ 1 v. u. st. $\frac{E}{C}=\frac{E'}{C'}$ l. $\frac{E}{D}=\frac{E'}{D'}$.
„ 192 „ 7 v. o. st. (DBD′—′B) l. (BD′—B′D).

Beweis einen ganz andern Weg, als der Beweis des zugehörigen Satzes, wenn wir denselben durch Anwendung von Linien-Coordinaten führen (70, 424). Und überdiess kann jeder der beiden Sätze in jedem der beiden Coordinaten-Systeme bewiesen werden. Das System der Linien-Coordinaten behält also seine ganze Bedeutung neben dem Principe der Reciprocität; es werden durch dasselbe die Beweismittel verdoppelt. Wollte man jenes Princip als Beweismittel anwenden, so würde man zwar, indem man auch nur die allbekannten Sätze über Kreise und gerade Linien zu Grunde legte, zu einer Menge von Resultaten mit bisher gar nicht geahneter Leichtigkeit kommen, und eine solche Arbeit wäre gewiss eine verdienstliche: aber ich sehe nicht ein, wie man auf diesem Wege das Ganze der Geometrie systematisch zusammenzufassen vermöchte. Vielleicht sollte man die Systeme der Punct- und Linien-Coordinaten noch vervielfältigen. Alsdann liesse sich ein Princip aufstellen, das mit dem Princip der Reciprocität Aehnlichkeit hat, und nach welchem, wenn die analytische Beweisführung irgend eines Satzes vorliegt, zugleich so viele Sätze bewiesen sind, als es verschiedene Coordinaten-Systeme gibt. Ich habe diesem Principe nur eine Note am Ende des dritten Paragraphen der zweiten Abtheilung des vorliegenden Bandes widmen können. Vielleicht könnte man alsdann, ohne an Leichtigkeit einzubüssen, zum Behuf der Beweisführung das Princip der Reciprocität entbehren und dasselbe erschiene dann als ein blosses Band, das die verschiedenen Sätze unter einander verknüpft.

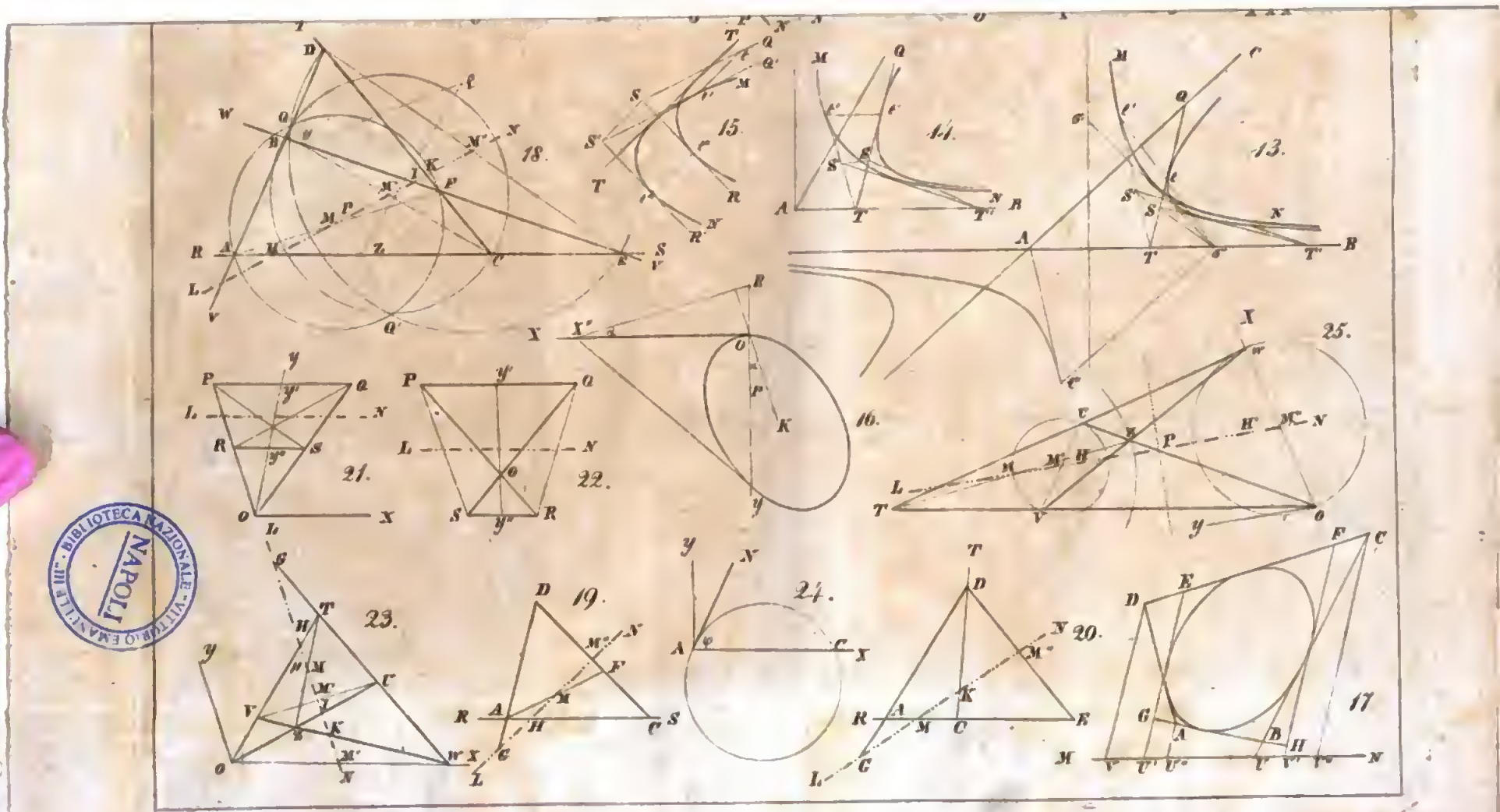
Man kann das Verhältniss der Geometrie zur Analysis aus verschiedenen Gesichtspuncten betrachten. Ich möchte mich zu der Ansicht bekennen, dass die Analysis eine Wissenschaft ist, die, unabhängig von jeder Anwendung, selbstständig für sich allein dasteht, und die Geometrie, so wie von einer andern Seite die Mechanik, bloss als die bildliche Deutung gewisser Beziehungen aus dem grossen erhabenen Ganzen erscheint. Wenn wir diese Ansicht zu Grunde legen und consequent durchführen, so erhält dadurch die Behandlung der Geometrie einen eigenthümlichen Character, auf die ich hier noch besonders aufmerksam machen zu müssen glaube. Ich kann diess nicht besser als durch ein paar Beispiele thun. Die Verbindung zweier Gleichungen zwischen zwei veränderlichen Grössen zu einer dritten solchen Gleichung, vermittelst eines unbestimmten Coefficienten, eine ganz gewöhnliche analytische Operation, bezeichnet, wenn wir geometrisch deuten, den Uebergang von zwei gegebenen Curven zu einer dritten, welche mit den beiden gegebenen

dieselben Durchschnittspuncte oder dieselben gemeinschaftlichen Tangenten hat. Der Elimination der Werthe für die beiden veränderlichen Grössen zwischen den beiden gegebenen Gleichungen entspricht die Bestimmung dieser Durchschnittspuncte oder dieser gemeinschaftlichen Tangenten. Die geometrische Interpretation eines analytischen Factums, der gleichen Wurzeln der auf diese Weise resultirenden Gleichungen, ist, an und für sich, die Tangenten-Theorie und überhaupt die Theorie des Contactes einer beliebigen Ordnung. Die geometrische Interpretation des wichtigsten Satzes der Algebra, des Satzes, dass jede ganze algebraische Function einer einzigen veränderlichen Grösse sich in reelle Factoren des ersten und zweiten Grades zerlegen lässt, ist, an und für sich, die wichtige Theorie der Chorden und Chordalpuncte, so wie der homologen Puncte und homologen geraden Linien, und zwar in grösserer Ausdehnung als diese Theorie bisher aufgestellt worden ist (610). —

Es gibt, in Beziehung auf die drei Dimensionen des Raumes, Entwicklungen, die den Entwicklungen der beiden vorliegenden Bände analog sind und wodurch sich auch hier die Beweismittel verdoppeln. An den letzten Paragraphen des zweiten Bandes schliesst sich namentlich eine neue allgemeine Theorie der Oberflächen an. Das Princip der Reciprocität besteht auch für die Constructionen im Raume. Es ist aus einer analytischen Betrachtung hervorgegangen und liefert seinerseits wiederum Beiträge zur Analysis. Ich habe mich, was diesen Punct betrifft, begnügen müssen, in einer Note anzudeuten, wie dasselbe unmittelbar zu einer allgemeinen Theorie der singulären Auflösungen führt. — Man durchsieht, dass in meiner Arbeit Keime zu neuen sich weit ausbreitenden Arbeiten liegen. —

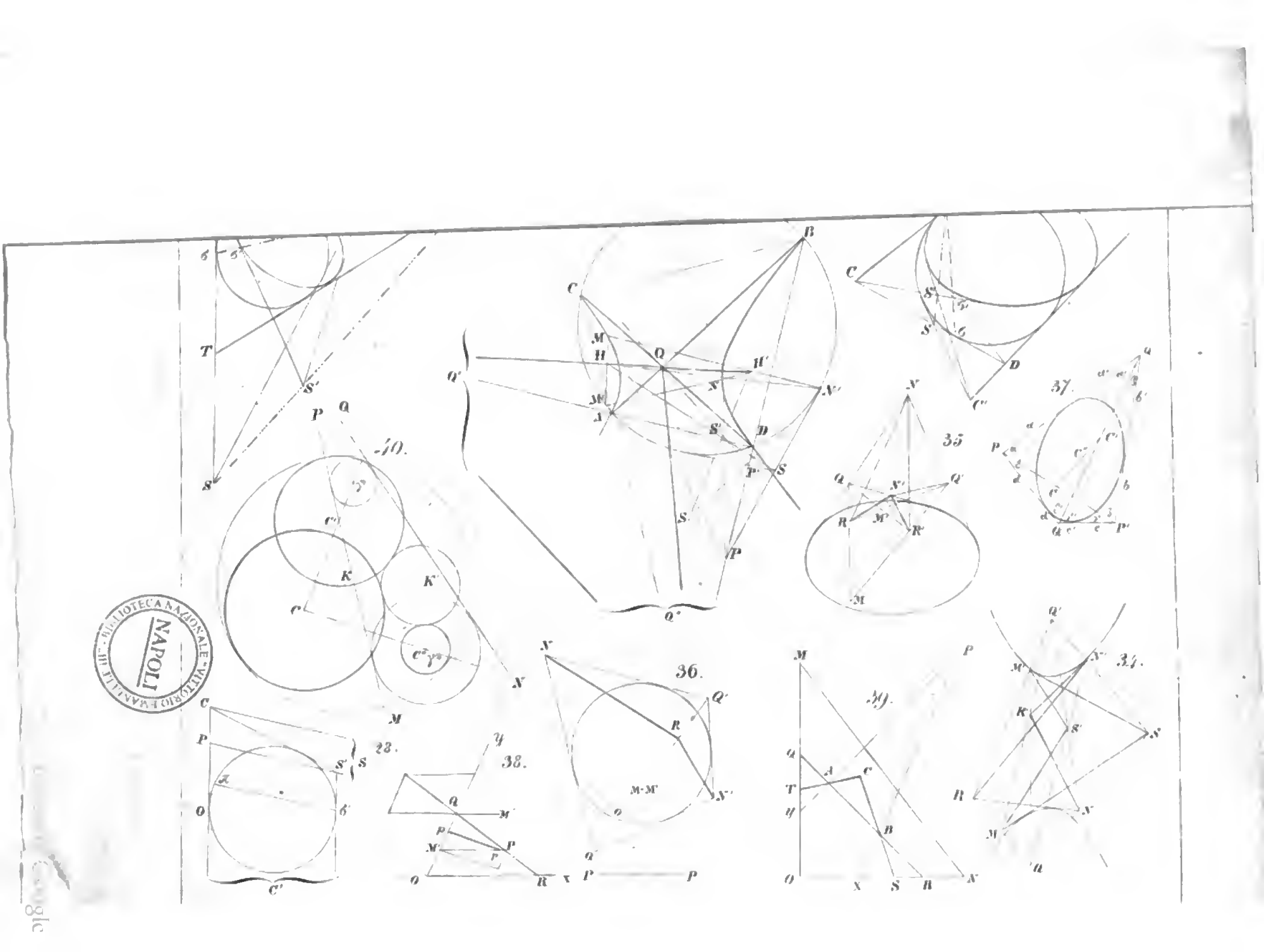
Bonn, im Herbste 1830.

VA1 1518154
C 16104



BIBLIOTECA NAZIONALE VITTORIO EMANUELE III NAPOLI

Digitized by Google



BIBLIOTECA NAZIONALE VITTORIO EMANUELE
NAPOLI

Digitized by Google

Google